Θεωρία Υπολογισμού και Μαθ/κή Λογική **Μαθηματική Λογική και Εφ/γές της**

Ασκήσεις 1 ***Άριστα = 20***

Οι απαντήσεις πρέπει να παραδοθούν ως το τέλος των μαθημάτων Εαρινού Εξ. **2018-2019**
Απαντείστε σε όλες τις ασκήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι ΑΤΟΜΙΚΕΣ.
Χρησιμοποιείστε κειμενογράφο και γραμματοσειρά μεγέθους 12pt. *Άν παραδώσετε τις απαντήσεις ηλεκτρονικά, στείλετε* αρχείο κειμένου – μη στείλετε σκαναρισμένο χειρόγραφο.

Συντακτικό τύπων Α' Τάξης

1α Έστω ένα λεξιλόγιο Λ με ένα σύμβολο για σχέσεις R με δύο ορίσματα, και με ένα σύμβολο για συναρτήσεις f με ένα όρισμα. Για κάθε μία από τις παρακάτω συμβολοσειρές εξηγείστε γιατί δεν είναι τύπος Α΄ Τάξης ως προς το παραπάνω λεξιλόγιο Λ και το σύνολο μεταβλητών V={x, y, z} (ή επιβεβαιώστε ότι είναι):

$f(f(y))$ $\quad$ $(R(y, x) = R(x, y))$ $\quad$ $R(x, z(x))$

$(\forall x \leq f(z, z)\ R(x, x))$ $\quad$ $(y \rightarrow y)$ $\quad$ $(\exists xy\ R(x, y))$ **1½ Μονάδα**

1β Αποδείξτε ότι μία συμβολοσειρά της μορφής $\forall u$ είτε $\exists u$, όπου $u \in V$, δεν γίνεται να είναι τύπος Α΄ Τάξης. **1½ Μονάδα**

1γ Κατασκευάστε τα parse-trees των παρακάτω τύπων Α′ Τάξης και εξηγείστε ως προς τί διαφέρουν μεταξύ τους. $(R(x, y) \wedge (y = z))$, $(R(x, y) \wedge (z = y))$, $((z = y) \wedge R(x, y))$ **1 Μονάδα**

2α Για κάθε μία εμφάνιση μεταβλητής στον παρακάτω τύπο Α′ Τάξης, βρείτε από ποιά εμφάνιση ποσοδείκτη δεσμεύεται (άν δεν είναι ελεύθερη).

$(\exists u (R(x, u) \wedge (\exists w (R(u, w) \wedge (\exists u (R(w, u) \wedge R(u, y)))))))$ **1 Μονάδα**

2β Έστω τ ένα parse-tree ενός τύπου Α΄ τάξης φ , και u μία μεταβλητή. Δώστε (αμοιβαία) επαγωγικούς ορισμούς δύο συναρτήσεων Ε(τ, u) , Δ(τ, u) , όπου:

Ε(τ, u) = *true* αν και μόνο αν η μεταβλητή u εμφανίζεται στον τύπο φ .

Δ(τ, u) = *true* αν και μόνο αν η μεταβλητή u εμφανίζεται δεσμευμένη στον τύπο φ . **2 Μονάδες**

Δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους Α' Τάξης

3 Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με σύμβολα για σχέσεις S_1 , S_2 , με ένα όρισμα, και $M = (U, \sigma_1, \sigma_2)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ. Θεωρούμε τις σχέσεις σ_1, σ_2 ως χαρακτηριστικές συναρτήσεις αντίστοιχων υποσυνόλων του U, τα οποία ονομάζουμε (καταχρηστικά) επίσης σ_1, σ_2 .

α Βρείτε ένα τύπο Α΄ Τάξης φ χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, ώστε η δήλωση φ^M να ισχύει αν και μόνο αν: τα σύνολα σ_1 , σ_2 δεν αποτελούν διαμερισμό του U . **2 Μονάδες**

β Βρείτε ένα τύπο Α΄ Τάξης ψ με μία ελεύθερη μεταβλητή x , ώστε η δήλωση $\varphi^M(a)$ -- όπου το στοιχείο a αντικαθιστά τη μεταβλητή x -- να ισχύει αν και μόνο αν: το σύνολο $\sigma_1 - \{a\}$ έχει το πολύ δύο στοιχεία. **1 Μονάδα**

4 Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα *σύμβολο για σχέσεις* R με *ένα όρισμα*, και M = (U, ρ) ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ . Κατασκευάστε τις δηλώσεις φ^M , ψ^M που αντιστοιχούν στους τύπους

$\varphi :\ \forall x\ (R(x) \rightarrow \forall y\ R(y))$, $\quad$ $\psi :\ \exists x\ ((\neg R(x)) \rightarrow \forall y\ R(y))$. **½ Μονάδα**

Έστω U = { n | n ακέραιος που διαιρείται με το 3 } , ρ = { n | n ακέραιος που διαιρείται με το 2 } .
Βρείτε τις τιμές αλήθειας των δηλώσεων φ^M , ψ^M σε αυτή την περίπτωση. **1½ Μονάδα**

5 Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα *σύμβολο για σχέσεις* R *με δύο ορίσματα*, και $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ . Το M θεωρείται ως κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών το U , όπου: υπάρχει ακμή από το u στο v, αν και μόνο αν $\rho(u, v) =$ *true* .
Έστω φ ο τύπος στην Άσκηση 2α . Βρείτε ποιά γραφοθεωρητική ιδιότητα των M , a , b εκφράζει η δήλωση $\varphi^M(a, b)$ -- όπου τα a , b αντικαθιστούν τις μεταβλητές x , y. **1 Μονάδα**

Συνεπαγωγή τύπων Α' Τάξης

6α Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $(\exists y\ (\forall x\ R(x, y)))\ \models\ (\forall x\ (\exists y\ R(x, y)))$.
Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει η συνεπαγωγή
$(\forall x\ (\exists y\ R(x, y)))\ \models\ (\exists y\ (\forall x\ R(x, y)))$ **1½ Μονάδα**

6β Για κάθε μία από τις παρακάτω συνεπαγωγές, δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει:
$(\exists y\ \Delta(x, y))\ ,\ (\exists x\ \Delta(x, y))\ \models\ \Delta(x, y)$ $(x = y)\ ,\ (\exists y\ \Delta(x , y))\ \models\ (\exists y\ \Delta(y , y))$.
1 Μονάδα

6γ Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $(\forall x\ (\forall y\ (x = y)))\ ,\ (\exists x\ (\exists y\ \Delta(x, y)))\ \models\ \Delta(x, y)$.
1 Μονάδα

7 Βρείτε τύπους Α΄ Τάξης φ , ψ , που να δείχνουν ότι η δήλωση " άν $\models \varphi$ τότε $\models \psi$ " δεν είναι, γενικά, ισοδύναμη με τη δήλωση " $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ " . **1 Μονάδα**

Στοιχειώδεις συνεπαγωγές τύπων Α' Τάξης

8α Επιβεβαιώστε ότι ο τύπος $(\exists x\ (\forall y\ (P(x) \rightarrow P(y))))$ είναι έγκυρος. **1 Μονάδα**

8β Επιβεβαιώστε τη λογική ισοδυναμία $(\exists x\ ((\neg R(x)) \rightarrow (\forall y\ R(y))))\ \models\!=\!|\ (\exists x\ R(x))$.
1½ Μονάδα

Huth - Ryan <u>*Logic in Computer Science 2nd Ed.*</u>

Κεφάλαια - ενότητες 1.1 , 1.3 , 1.4.1 , 1.4.2

Σ. Κοσμαδάκης *Λογική Α΄ Τάξης (Σημειώσεις)*

M. Fitting <u>*First-Order Logic and Automated Theorem Proving 2nd Ed.*</u>

Κεφάλαια - ενότητες 1 , 2.1 , 2.2 (εκτός από Theorem 2.2.5) , 2.3
2.4 (εκτός από Definitions 2.4.6 , 2.4.7)
5.1 (εκτός από Definition 5.1.5) ,
5.3 (εκτός από Propositions 5.3.7 , 5.3.8)