

Θεωρία Υπολογισμού και Μαθηματική Λογική
Μαθηματική Λογική και Εφαρμογές της

Ασκήσεις 2

Παράδοση Μέχρι 3 Ιουλίου 2017, 4:00 μμ

Άριστα = 15

1 Βλέπε **Στοιχειώδεις συνεπαγωγές τύπων Α' τάξης**

Αποδείξτε ότι: $\models (\theta \rightarrow (\exists u \theta))$, για οποιοδήποτε τύπο Α' Τάξης θ .

Βρείτε ένα τύπο φ για τον οποίο ισχύει $\models (\exists u \varphi)$, αλλά δεν ισχύει $\models \varphi$.

1 Μονάδα

2 Βλέπε **Fitting 3.3, Propositional Resolution**

α Χρησιμοποιώντας το σύστημα της προτασιακής επίλυσης, αποδείξτε τη συνεπαγωγή

$$((p \wedge q) \rightarrow (s \vee r)) \models ((p \wedge (\neg s)) \rightarrow (r \vee (\neg q))) .$$

β Χρησιμοποιώντας το σύστημα της προτασιακής επίλυσης και τις ιδιότητες Ορθότητας και Πληρότητας -- Fitting, Proposition 3.4.6 και Theorem 3.7.9 -- αποδείξτε ότι το παρακάτω σύνολο είναι ικανοποιήσιμο, αλλά μόνο με $p = \text{false}$: $\{ (r \vee (\neg p)), (p \rightarrow (q \rightarrow s)), \neg(s \wedge p \wedge r), (p \rightarrow q) \}$.

2 Μονάδες

3 Βλέπε **Fitting, Proposition 5.5.1**

Το $\Sigma \cup \{\psi\}$ είναι ένα σύνολο τύπων Α' Τάξης, και η μεταβλητή x_0 δεν εμφανίζεται στο $\Sigma \cup \{\psi\}$.

Έστω ότι $\Sigma \cup \{Q(x_0)\} \models \psi$, όπου το Q είναι σύμβολο σχέσης με ένα όρισμα.

Αποδείξτε ότι $\Sigma \cup \{(\exists x Q(x))\} \models \psi$.

½ Μονάδα

4 Βλέπε **Fitting 6.2, First-Order Resolution**

Χρησιμοποιώντας το σύστημα της επίλυσης για τύπους Α' Τάξης, αποδείξτε ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$\theta \rightarrow (\exists u \varphi) \models \exists u (\theta \rightarrow \varphi), \quad \text{για οποιουδήποτε τύπους Α' Τάξης } \theta, \varphi .$$

1½ Μονάδα

5 *Fitting*, Exercise 6.2.2.

2 Μονάδες

6 Βλέπε **Fitting 7.2, Unification**

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της ενοποίησης, βρείτε ενοποιητές για τα παρακάτω ζεύγη όρων:

α $h(t_1, h(t_2, t_4))$ με $h(f(t_2), h(g(t_3), t_2))$

β $h(h(t_4, t_1), h(t_2, t_4))$ με $h(h(t_1, f(t_2)), h(g(t_3), t_2))$

1½ Μονάδα

Στις παρακάτω ασκήσεις βρείτε φυσικές απαγωγές που να χρησιμοποιούν μόνο τους κανόνες στο Figure 1.2 και στην ενότητα 2.3 Proof theory of predicate logic του Huth-Ryan.

Αναφέρετε ποιός κανόνας χρησιμοποιείται σε κάθε γραμμή, και σε ποιές προηγούμενες γραμμές / υπο-αποδείξεις εφαρμόζεται.

7 Βρείτε φυσικές απαγωγές: $\vdash (q \rightarrow s) \vee (s \rightarrow p) \quad \neg(p \wedge (\neg q)) \vdash (p \rightarrow q) .$

Νύξη Εξετάστε αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι κανόνες PBC είτε LEM . **1½ Μονάδα**

8 Έστω θ ένας τύπος Α' Τάξης. Κατασκευάστε φυσικές απαγωγές:

$(\forall u \theta) \vdash \theta$	$\theta \vdash (\exists v \theta)$	
$(\forall u (\exists v \theta)) \vdash (\exists v \theta)$	$(\forall u \theta) \vdash (\exists v (\forall u \theta))$	
$(\exists v \theta) \vdash (\forall v (\exists v \theta))$	$(\exists u (\forall u \theta)) \vdash (\forall u \theta)$	1½ Μονάδα

9 Έστω φ, θ τύποι Α' τάξης, όπου $u \notin FV(\theta)$. Κατασκευάστε φυσικές απαγωγές:

$\exists u (\theta \rightarrow \varphi) \vdash (\theta \rightarrow \exists u \varphi)$	$\forall u (\varphi \rightarrow \theta) \vdash (\exists u \varphi) \rightarrow \theta$	1½ Μονάδα
--	--	------------------

10 Βρείτε φυσικές απαγωγές:

$\forall x (P(x) \vee Q(y)) \vdash (\forall x P(x)) \vee Q(y)$
$\exists x ((\neg R(x)) \rightarrow (\forall y R(y))) \vdash \exists x R(x)$

Νύξη Εξετάστε αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι κανόνες PBC είτε LEM . **2 Μονάδες**

ΠΡΟΣΟΧΗ !!

Προσπαθείστε να παραδώσετε τις ασκήσεις ως την καθορισμένη προθεσμία: ενδέχεται το progress να κλείσει σχετικά νωρίς λόγω της ορκωμοσίας του Ιουλίου.

Μπορείτε να τις παραδώσετε *τμηματικά*, άν θέλετε.

Απαντείστε σε όλες τις ασκήσεις.

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι ΑΤΟΜΙΚΕΣ.

Χρησιμοποιείστε κειμενογράφο και γραμματοσειρά μεγέθους 12pt .

Οι φόρμουλες μπορούν να είναι χειρόγραφες -- ανάλογου μεγέθους -- αν είναι ευκολότερο.

Αν παραδώσετε τις απαντήσεις ηλεκτρονικά, στείλετε αρχείο κειμένου – μη στείλετε σκαναρισμένο χειρόγραφο.