Θεωρία Υπολογισμού και Μαθηματική Λογική
Μαθηματική Λογική και Εφαρμογές της

Ασκήσεις 1

Παράδοση Μέχρι 4 Μάη 2017, *4:00 μμ* **Άριστα = 15**

1 Βλέπε **Συντακτικό τύπων Α' Τάξης**

Έστω ένα λεξιλόγιο Λ , με ένα *σύμβολο για σχέσεις* R με *δύο ορίσματα*, και ένα *σύμβολο για συναρτήσεις* f με *ένα όρισμα*.

Για κάθε μία από τις παρακάτω συμβολοσειρές, εξηγείστε γιατί δεν είναι ατομικός τύπος ως προς το λεξιλόγιο Λ και το σύνολο μεταβλητών V={ x, y, z, ... } :

$f(x, f(y))$ $R(y, z) = f(x)$ $R(x, R(z, z))$ $f(R(x, y))$

1 Μονάδα

2 Βλέπε **Συνεπαγωγή τύπων Α' Τάξης**

Βρείτε τύπους Α΄ Τάξης φ , ψ , που να δείχνουν ότι ο ισχυρισμός " άν $\models \varphi$ τότε $\models \psi$ "
δεν είναι, γενικά, ταυτόσημος με τον ισχυρισμό " $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ " .

1 Μονάδα

3 Βλέπε **Δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους Α' Τάξης**

Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με *σύμβολα για σχέσεις* S_1 , S_2 , S_3 με *ένα όρισμα*, και $M = (U, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ : τα $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι υπο-σύνολα του U .

α Βρείτε ένα τύπο Α΄ Τάξης φ χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, έτσι ώστε: η δήλωση φ^M να ισχύει,
αν και μόνο αν: η τομή των σ_1 , σ_2 είναι υπο-σύνολο του σ_3 .

β Βρείτε ένα τύπο Α΄ Τάξης ψ με μία ελεύθερη μεταβλητή x , έτσι ώστε: η δήλωση $\varphi^M(a)$
-- όπου το στοιχείο a αντικαθιστά τη μεταβλητή x -- να ισχύει αν και μόνο αν:
το a είναι ένα στοιχείο του σ_1 που δεν ανήκει στην ένωση των σ_2 , σ_3 .

1 Μονάδα

4 Βλέπε **Δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους Α' Τάξης**

Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα *σύμβολο για σχέσεις* R με *ένα όρισμα*, και M = (U, ρ) ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ . Κατασκευάστε τις δηλώσεις φ^M , ψ^M που αντιστοιχούν στους τύπους

$\varphi : \forall x\, (R(x) \rightarrow \forall y\, R(y)\,)$, $\psi : \exists x\, (\, (\neg R(x)) \rightarrow \forall y\, R(y)\,)$. **½ Μονάδα**

Έστω U = { n | n ακέραιος που διαιρείται με το 3 } , ρ = { n | n ακέραιος που διαιρείται με το 2 } .
Βρείτε τις τιμές αλήθειας των δηλώσεων φ^M , ψ^M σε αυτή την περίπτωση. **1 Μονάδα**

5 Βλέπε **Στοιχειώδεις συνεπαγωγές τύπων Α' Τάξης**

α Επιβεβαιώστε ότι ο τύπος $\exists x\, (\forall y\, (P(x) \rightarrow P(y)\,)\,)$ είναι έγκυρος. **1 Μονάδα**

β Επιβεβαιώστε τη λογική ισοδυναμία $\exists x\, (\, (\neg R(x)) \rightarrow (\forall y\, R(y))\,) \models\,\dashv \exists x\, R(x)$. **1½ Μονάδα**

6 Βλέπε **Δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους Α' Τάξης**

Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα *σύμβολο για σχέσεις* R *με δύο ορίσματα*, και $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ. Το M παριστάνεται σαν ένα κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών το U, όπου: υπάρχει ακμή από το u στο v, αν και μόνο αν $(u, v) \in \rho$.

Για $a \in U$, έστω $\delta_M(a)$ ο έξω-βαθμός της κορυφής a στο παραπάνω γράφημα (δηλ. ο πληθάριθμος του συνόλου $\{ v \mid (a, v) \in \rho \}$).

Έστω φ ο τύπος $\forall y (\forall y' ((R(x, y) \wedge R(x, y')) \to (y = y')))$ και $\varphi^M(a)$ η αντίστοιχη δήλωση -- όπου το a αντικαθιστά τη μεταβλητή x. Επιβεβαιώστε τα παρακάτω:

(α) Άν $K_M(a) \leq 1$, $\varphi^M(a)$ είναι *true* (β) Άν $K_M(a) > 1$, $\varphi^M(a)$ είναι *false* .

1 Μονάδα

7 Βλέπε **Συνεπαγωγή τύπων Α' Τάξης**

α Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\exists y (\forall x\, R(x, y)) \models \forall x (\exists y\, R(x, y))$.

Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\forall x (\exists y\, R(x, y)) \models \exists y (\forall x\, R(x, y))$

1½ Μονάδα

β Για κάθε μία από τις παρακάτω συνεπαγωγές, δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει:

$(\exists y\, \Delta(x, y)), (\exists x\, \Delta(x, y)) \models \Delta(x, y)$ $x = y, \exists y\, \Delta(x, y) \models \exists y\, \Delta(y, y)$.

Επιβεβαιώστε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\forall x (\forall y (x = y)), \exists x (\exists y\, \Delta(x, y)) \models \Delta(x, y)$.

1½ Μονάδα

Σε κάθε μία από τις παρακάτω ασκήσεις βρείτε μιά φυσική απαγωγή, που να χρησιμοποιεί μόνο *τους κανόνες στη σελίδα 27 του* Huth-Ryan , Figure 1.2.
Αναφέρετε ποιός κανόνας χρησιμοποιείται σε κάθε γραμμή της απαγωγής, και σε ποιές προηγούμενες γραμμές είτε υπο-αποδείξεις εφαρμόζεται.

8 Βρείτε φυσικές απαγωγές: $\neg p, \neg q \vdash \neg(p \vee q)$ $\neg(p \vee q) \vdash (\neg p) \wedge (\neg q)$

$p, \neg q \vdash \neg(p \to q)$ $(\neg p) \vee q \vdash (p \to q)$. **1 Μονάδα**

9 Τα $\theta, \chi, \psi, \varphi$ είναι προτασιακοί τύποι.

α Έστω ότι δίνεται μιά φυσική απαγωγή $(\theta \wedge \chi) \vdash \psi$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις γραμμές της, κατασκευάστε μιά φυσική απαγωγή $(\chi \wedge \theta) \vdash \psi$.

β Έστω ότι δίνεται μιά φυσική απαγωγή $\theta \vdash \chi$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις γραμμές της, κατασκευάστε μιά φυσική απαγωγή $(\varphi \to \theta) \vdash (\varphi \to \chi)$

1 Μονάδα

10 Βρείτε φυσικές απαγωγές: $(p \wedge q) \to s \vdash (p \wedge (\neg s)) \to (\neg q)$

$q \to (s \vee r) \vdash (q \wedge (\neg s)) \to r$

$(p \vee q), (\neg p) \vee (\neg q) \vdash ((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$. **2 Μονάδες**

Απαντείστε σε όλες τις ασκήσεις.

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι ΑΤΟΜΙΚΕΣ.

Χρησιμοποιείστε κειμενογράφο και γραμματοσειρά μεγέθους 12pt .
Οι φόρμουλες μπορούν να είναι χειρόγραφες -- *ανάλογου μεγέθους* -- *αν είναι ευκολώτερο*.

Άν παραδώσετε τις απαντήσεις ηλεκτρονικά, στείλετε αρχείο κειμένου – *μη στείλετε σκαναρισμένο χειρόγραφο.*