Σημασιολογία τύπων Α΄ Τάξης   Σ. Κοσμαδάκης

- **Επαγωγικός ορισμός τιμών αλήθειας τύπων**

Ένας τύπος Α΄ τάξης φ ορίζει μια συνάρτηση με ορίσματα

α) ένα μοντέλο M αντίστοιχο στο λεξιλόγιο του φ ,

β) ένα πίνακα L που καταχωρεί, για κάθε μεταβλητή u , ένα στοιχείο a του πεδίου ορισμού U του M -- συμβολικά, $L[u] = a$.

Αποτέλεσμα της συνάρτησης, είναι η *τιμή αλήθειας της δήλωσης* $\varphi^M(L[u_1]\ ,\ \ldots,\ L[u_m])$ -- βλέπε τις δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους -- όπου $u_1, \ldots, u_m$ είναι οι ελεύθερες μεταβλητές του φ .

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\varphi^M(L)$ για την τιμή αλήθειας της δήλωσης $\varphi^M(L[u_1]\ , \ldots, L[u_m])$.

Αρχικές περιπτώσεις   Ο τύπος φ είναι ατομικός:

$\varphi^M(L)$ είναι η τιμή αλήθειας της δήλωσης που προκύπτει αντικαθιστώντας στον φ

(1) κάθε σύμβολο του λεξιλογίου με την αντίστοιχη σχέση / συνάρτηση / σταθερά του M

(2) τις ελεύθερες εμφανίσεις κάθε μίας μεταβλητής u , με το στοιχείο $L[u]$.

Επαγωγικό βήμα

(i) Ο τύπος φ είναι προτασιακός συνδυασμός των τύπων φ_1 , φ_2 :

$(\varphi_1\wedge\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ and $\varphi_2^M(L)$ $(\varphi_1\vee\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ or $\varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L)$ implies $\varphi_2^M(L)$ $(\neg\varphi_1)^M(L) =$ not $\varphi_1^M(L)$.

(ii) Ο τύπος φ είναι $(\forall u\ \varphi_1)$ / $(\exists u\ \varphi_1)$:

$(\forall u\ \varphi_1)^M(L) = \mathrm{AND}_{d\in U}\ \ \varphi_1^M(L\ ;\ u \mapsto d)$

$(\exists u\ \varphi_1)^M(L) = \mathrm{OR}_{d\in U}\ \ \varphi_1^M(L\ ;\ u \mapsto d)$

όπου $L\ ;\ u \mapsto d$ είναι ένας πίνακας L' που περιέχει όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα L , με τη μοναδική διαφορά ότι $L'[u] = d$.

Ερώτημα 0

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, για τον οποίο $FV(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.

Έστω L , K δύο πίνακες όπως παραπάνω, για τους οποίους $L[u_j] = K[u_j]$, $j = 1,...,m$.

Χρησιμοποιείστε τις αναδρομικές ιδιότητες (i, ii) για να επιβεβαιώσετε ότι: $\varphi^M(L) = \varphi^M(K)$.

- **Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων Α΄ Τάξης**

1 Προτασιακοί συνδυασμοί

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Για οποιοδήποτε τύπο θ θα ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

$$(\varphi \wedge \theta) \models (\varphi' \wedge \theta) \qquad (\varphi \vee \theta) \models (\varphi' \vee \theta)$$

$$(\varphi' \to \theta) \models (\varphi \to \theta) \qquad (\theta \to \varphi) \models (\theta \to \varphi')$$

$$(\neg\varphi') \models (\neg\varphi) .$$

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

2 Ποσοδείκτες

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Θα ισχύουν οι συνεπαγωγές: $(\exists u\, \varphi) \models (\exists u\, \varphi')$ $\qquad$ $(\forall u\, \varphi) \models (\forall u\, \varphi')$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (ii) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

3 Μετακίνηση ποσοδεικτών

(Α) Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$$\neg(\exists u\, \varphi) \models\,\dashv (\forall u\, \neg\varphi) \qquad \neg(\forall u\, \varphi) \models\,\dashv (\exists u\, \neg\varphi) .$$

(Β) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$$\exists u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,\dashv (\exists u\, \varphi) \wedge \theta \qquad \exists u\, (\varphi \vee \theta) \models\,\dashv (\exists u\, \varphi) \vee \theta$$

$$\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,\dashv (\forall u\, \varphi) \wedge \theta \qquad \forall u\, (\varphi \vee \theta) \models\,\dashv (\forall u\, \varphi) \vee \theta$$

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models (\forall u\, \varphi) \wedge \theta$
και $(\exists u\, \varphi) \vee \theta \models \exists u\, (\varphi \vee \theta)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 2 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Β) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 1,* είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.

(Γ) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$$\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\,\dashv (\forall u\, \varphi) \to \theta \qquad \exists u\, (\theta \to \varphi) \models\,\dashv (\theta \to \exists u\, \varphi)$$

$$\forall u\, (\varphi \to \theta) \models\,\dashv (\exists u\, \varphi) \to \theta \qquad \forall u\, (\theta \to \varphi) \models\,\dashv (\theta \to \forall u\, \varphi)$$

Ερώτημα 3 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $(\forall u\, \varphi) \to \theta \models \exists u\, (\varphi \to \theta)$
και $\theta \to (\exists u\, \varphi) \models \exists u\, (\theta \to \varphi)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 4 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Γ) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 3,* είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.

Αξιώματα για την ισότητα (Fitting)

Η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας

Ανακλαστικότητα $(\forall x)\ (x = x)$

Συμμετρία $(\forall x)\ (\forall y)\ [\ (x = y) \rightarrow (y = x)\ ]$

Μεταβατικότητα $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ [\ (\ (x = y) \wedge (y = z)\ ) \rightarrow (x = z)\ ]$

Η ισότητα είναι ομοιότητα (congruence), *ως προς κάθε συνάρτηση* f *και ως προς κάθε σχέση* R

$$(\forall x_1)\ (\forall y_1) \ldots (\forall x_m)\ (\forall y_m)\ [\ (\ (x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_m = y_m)\ ) \rightarrow (f(x_1, \ldots, x_m) = f(y_1, \ldots, y_m))\ ]$$

$$(\forall x_1)\ (\forall y_1) \ldots (\forall x_m)\ (\forall y_m)\ [\ (\ (x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_m = y_m)\ ) \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_m) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_m))\ ]$$

Ισοδύναμη μορφή των αξιωμάτων για την ισότητα (Huth-Ryan)

i) Ανακλαστικότητα $(\forall x)\ (x = x)$

ii) Αντικατάσταση (replacement), *για οποιοδήποτε τύπο Α' τάξης* Φ

$$(\forall x)\ (\forall y)\ [\ (x = y) \rightarrow (\ \Phi\{z/x\} \rightarrow \Phi\{z/y\}\ )\ ]$$

Ισοδύναμοι παραγόμενοι κανόνες

$$\frac{}{t = t'} \qquad \frac{t = t'}{t' = t} \qquad \frac{t_1 = t \qquad t = t_2}{t_1 = t_2}$$

για κάθε συνάρτηση f :

$$\frac{t_1 = s_1 \ \ldots \ t_m = s_m}{f(t_1, \ldots, t_m) = f(s_1, \ldots, s_m)}$$

για κάθε σχέση R :

$$\frac{t_1 = s_1 \ \ldots \ t_m = s_m \qquad R(t_1, \ldots, t_m)}{R(s_1, \ldots, s_m)}$$

Θεώρημα

Έστω Σ ένα σύνολο τύπων Α' τάξης, ως προς ένα λεξιλόγιο Λ.

Έστω $\text{ΑξΙσ}(\Lambda)$ το σύνολο των παραπάνω αξιωμάτων, όπου f , R είναι οποιαδήποτε σύμβολα συναρτήσεων είτε σχέσεων, στο λεξιλόγιο Λ.

Το σύνολο Σ είναι μη-ικανοποιήσιμο, αν και μόνο αν το σύνολο $\Sigma \cup \text{ΑξΙσ}(\Lambda)$ είναι αντιφατικό (παράγει την κενή συνθήκη, στο σύστημα της επίλυσης).