Υπο-αποδείξεις (blocks) σε φυσικές απαγωγές — Σ. Κοσμαδάκης

- **Υπο-αποδείξεις (blocks) και εμφωλιασμός τους**

Μία *φυσική απαγωγή* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mid\!-\ \psi$, $n \geq 0$, αποτελείται από *γραμμές*, αριθμημένες από 1 έως M .
Μία γραμμή i *εμφανίζεται πριν* από μία γραμμή j , αν $i<j$.

Ένα ***block*** *b* της απαγωγής μπορεί να *ανοίξει* (να αρχίσει) σε μία γραμμή i της απαγωγής, και να *κλείσει* (να τελειώσει) σε μία γραμμή j , όπου $n < i \leq j < M$. Παρατηρείστε ότι ένα block δεν μπορεί να συμπεριλαμβάνει τις υποθέσεις ή το συμπέρασμα της απαγωγής της οποίας είναι μέρος.
Ένα block *b* ταυτοποιείται μέσω του ζεύγους των παραπάνω ακέραιων i, j, συμβολικά *b* : (i, j) . Ο τύπος που γράφεται στην πρώτη γραμμή του block ονομάζεται *υπόθεση* της υπο-απόδειξης, και ο τύπος που γράφεται στην τελευταία γραμμή ονομάζεται *συμπέρασμα* της υπο-απόδειξης. Παρατηρείστε ότι το συμπέρασμα ενός block μπορεί να ταυτίζεται με την υπόθεσή του.
Μία γραμμή k της απαγωγής *περιέχεται στο* block *b* : (i, j) , όταν $i \leq k \leq j$.
Ένα block *b* : (k_1 , k_2) *εμφανίζεται πριν* από την γραμμή j , όταν $k_2 < j$.

Έστω *b* : (i, j) και *b΄* : (k, m) δύο διαφορετικά blocks μιάς φυσικής απαγωγής. Πρέπει να ισχύει:

$j < k$ (το *b εμφανίζεται πριν* το *b΄*) ή $m < i$ (το *b΄ εμφανίζεται πριν* το *b*)

ή $i < k \leq m < j$ (το *b΄ περιέχεται* στο *b*) ή $k < i \leq j < m$ (το *b περιέχεται* στο *b΄*) .

Παρατηρείστε ότι δύο διαφορετικά blocks δεν μπορούν να έχουν την ίδια γραμμή σαν υπόθεση, ούτε να έχουν την ίδια γραμμή σαν συμπέρασμα.

- **Διαθεσιμότητα γραμμών και υπο-αποδείξεων (blocks)**

Μία γραμμή k μιάς φυσικής απαγωγής ***ανήκει*** σε κάποιο block *b* της απαγωγής, όταν:
το *b* είναι *το πιό εσωτερικό* block που περιέχει την k .

Μία γραμμή k μιάς φυσικής απαγωγής ***ανήκει*** στην φυσική απαγωγή, όταν:
η γραμμή k δεν περιέχεται σε κανένα block.

Παρατηρείστε ότι: Οι υποθέσεις και το συμπέρασμα κάποιου block *b* ανήκουν πάντα στο b .
Επίσης, οι υποθέσεις και το συμπέρασμα της απαγωγής ανήκουν πάντα στην απαγωγή.

Μία γραμμή k μιάς φυσικής απαγωγής ***είναι διαθέσιμη*** για κάποιο block *b* της απαγωγής, όταν:
Η γραμμή k ανήκει είτε στο *b* , ή σε κάποιο block που περιέχει το *b* , ή στην φυσική απαγωγή.

Μία γραμμή k μιάς φυσικής απαγωγής ***είναι διαθέσιμη*** για την φυσική απαγωγή, όταν:
Η γραμμή k ανήκει στην απαγωγή.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζονται τα εξής:

Ένα block *c* μιάς φυσικής απαγωγής ***ανήκει*** σε κάποιο block *b* της απαγωγής (ή στην φυσική απαγωγή).

Ένα block *c* μιάς φυσικής απαγωγής ***είναι διαθέσιμο*** για κάποιο block *b* της απαγωγής (ή για την φυσική απαγωγή).

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι:

Κάθε γραμμή / block που περιέχεται σε κάποιο block *b* , ή θα ανήκει στο *b* , ή θα ανήκει σε ακριβώς ένα από τα blocks που περιέχονται στο *b* . Για κάθε γραμμή / block της απαγωγής ισχύει το αντίστοιχο.

Κάθε γραμμή / block που είναι διαθέσιμη για ένα block *b* και περιέχεται στο *b* , θα ανήκει στο *b* .

- **Συντακτικός έλεγχος μίας φυσικής απαγωγής (proof checking)**

Δίνεται μία φυσική απαγωγή $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, $n \geq 0$, με γραμμές αριθμημένες από 1 έως M .
Ονομάζουμε θ_j τον τύπο που εμφανίζεται στη γραμμή j της απαγωγής.

Γιά να επαληθεύσουμε ότι ένα block *b* της απαγωγής είναι *συντακτικά σωστό*, χρησιμοποιούμε την παρακάτω διαδικασία:

Check-Block *b*

I Ελέγχουμε ότι: Για κάθε γραμμή j που <u>ανήκει</u> στο *b* -- *εκτός* από την *υπόθεση* του *b* :
ο τύπος θ_j παράγεται εφαρμόζοντας έναν από τους κανόνες,
σε κάποιες γραμμές / blocks που *εμφανίζονται πριν* από την γραμμή j ,
και που είναι *διαθέσιμες* / *διαθέσιμα* για το *b* .

II Ελέγχουμε *καλώντας αναδρομικά* την διαδικασία *Check-Block* ότι:
Κάθε block που <u>ανήκει</u> στο *b* είναι συντακτικά σωστό.

Για να επαληθεύσουμε ότι η απαγωγή $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ είναι *συντακτικά σωστή*, χρησιμοποιούμε την παρακάτω διαδικασία:

Check-Deduction

0 Ελέγχουμε ότι : $\theta_i \equiv \varphi_i$, i = 1,..., n , $\theta_M \equiv \psi$.

I Ελέγχουμε ότι: Για κάθε γραμμή j > n που <u>ανήκει</u> στην απαγωγή,
ο τύπος θ_j παράγεται εφαρμόζοντας έναν από τους κανόνες,
σε κάποιες γραμμές / blocks που *εμφανίζονται πριν* από την γραμμή j ,
και που *ανήκουν* στην απαγωγή.

Ελέγχουμε καλώντας τη διαδικασία *Check-Block* ότι:
Κάθε block που <u>ανήκει</u> στην απαγωγή είναι συντακτικά σωστό.

Παρατηρείστε ότι ο συντακτικός έλεγχος μίας γραμμής (ή block) γίνεται:
Από την διαδικασία *Check-Deduction* (ή από κάποια κλήση της *Check-Block* από την *Check-Deduction*),
όταν η γραμμή (ή block) ανήκει στην φυσική απαγωγή,
Ή, από την κλήση *Check-Block c* (ή από κάποια κλήση της *Check-Block* από την *Check-Block c*),
όταν η γραμμή (ή block) ανήκει στο block *c* .

Ερώτημα 2 Επιβεβαιώστε ότι:
Η διαδικασία *Check-Block b* θα ελέγξει κάθε γραμμή / block που περιέχεται στο block *b* .
Η διαδικασία *Check-Deduction* θα ελέγξει κάθε γραμμή / block τής φυσικής απαγωγής.

- **Ορθότητα (soundness) μίας φυσικής απαγωγής**

Έστω μία φυσική απαγωγή $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, $n \geq 0$, με γραμμές αριθμημένες από 1 έως M .
Ονομάζουμε θ_j τον τύπο που εμφανίζεται στη γραμμή j της απαγωγής. Θέτουμε $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

Για κάθε block c της απαγωγής, και για την ίδια την απαγωγή, ορίζουμε επαγωγικά
το *βάθος εμφωλιασμού* $d(c)$:

1) Άν το c δεν περιέχει blocks, $d(c) = 0$.
2) Έστω $b_1, ..., b_m$ τα blocks που ανήκουν στο c : ορίζουμε $d(c) = 1 + (\max_{i=1,...,m} d(b_i))$.

Έστω c ένα block της απαγωγής με υπόθεση υ και συμπέρασμα σ : ονομάζουμε *δήλωση του* c
τον τύπο $(\upsilon \rightarrow \sigma)$.

Για κάθε block c της φυσικής απαγωγής:

Ονομάζουμε *ενδιάμεσες υποθέσεις για το block* c , το σύνολο τύπων
$Y(c) = \{ \upsilon \mid \upsilon$ είναι η υπόθεση κάποιου block που περιέχει το $c \}$.

Ονομάζουμε *ενδιάμεσες δηλώσεις για το block* c , το σύνολο τύπων
$\Delta(c) = \{ \delta \mid \delta$ είναι η δήλωση κάποιου block που ανήκει σε κάποιο block που περιέχει το c
ή στην φυσική απαγωγή, και που εμφανίζεται πριν το $c \}$.

Παρατηρείστε ότι: Άν το block c ανήκει στην φυσική απαγωγή, $Y(c) = \{ \}$, και το $\Delta(c)$ αποτελείται από τις δηλώσεις των blocks που ανήκουν στην φυσική απαγωγή και που εμφανίζονται πριν το c .

Λήμμα Ορθότητας για τα blocks μίας φυσικής απαγωγής
Έστω $c : (k_1, k_2)$ ένα block μίας φυσικής απαγωγής, και έστω υ η υπόθεση του c :
Για οποιαδήποτε γραμμή j της απαγωγής που ανήκει στο c , $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \models (\upsilon \rightarrow \theta_j)$.

Απόδειξη Θα προχωρήσουμε με επαγωγή στο βάθος εμφωλιασμού του c .

<u>*Βασική Περίπτωση*</u> $d(c) = 0$, δηλαδή το c δεν περιέχει blocks.
Από τον συντακτικό έλεγχο του block c , κάθε τύπος θ_j που ανήκει στο c παράγεται εφαρμόζοντας επαναληπτικά κανόνες:
(1) σε γραμμές που εμφανίζονται πριν από τη γραμμή j και που είναι διαθέσιμες για το c -- δηλαδή σε γραμμές που περιέχονται (άρα ανήκουν) στο c , ή περιέχονται στο σύνολο $\Sigma \cup Y(c)$,
(2) σε blocks που εμφανίζονται πριν από τη γραμμή j και που είναι διαθέσιμα για το c -- δηλαδή σε blocks που οι δηλώσεις τους περιέχονται στο σύνολο $\Delta(c)$, αφού το c δεν περιέχει blocks.
Παρατηρείστε ότι κάθε γραμμή j όπου $k_1 \leq j \leq k_2$ θα ανήκει στο c .
Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή στο j , ότι $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_j$, $k_1 \leq j \leq k_2$.
Έστω $j = k_1$: Προφανώς $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_{k1}$, αφού $\theta_{k1} \equiv \upsilon$.
Έστω $j = K+1$, όπου $k_1 \leq K \leq k_2 - 1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε γραμμή p του c που εμφανίζεται πριν τη γραμμή K+1 , $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_p$. Με βάση τον συντακτικό έλεγχο του c και την ορθότητα των κανόνων, $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \cup \{\theta_{k1}, \dots, \theta_K\} \models \theta_{K+1}$. Επομένως (χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση), $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_{K+1}$.

<u>*Επαγωγικό Βήμα*</u> $d(c) = 1 + (\max_{i=1,...,m} d(b_i))$, όπου $b_1, ..., b_m$ τα blocks που ανήκουν στο c , με τη σειρά που εμφανίζονται.
Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το Λήμμα ισχύει, για κάθε block b_i (προφανώς $d(b_i) < d(c)$) .
Έστω δ_i η δήλωση του b_i . Παρατηρείστε ότι $Y(b_i) = Y(c) \cup \{\upsilon\}$, και $\Delta(b_i) = \Delta(c) \cup \{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}\}$.
Από την επαγωγική υπόθεση για το b_i έχουμε $\Sigma \cup Y(b_i) \cup \Delta(b_i) \models \delta_i$.
Από τις παρατηρήσεις: $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \delta_1$, $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \cup \{\delta_1\} \models \delta_2$, ... $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \cup \{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}\} \models \delta_i$, και επομένως $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \delta_i$, για $i = 1,...,m$.

Από τον συντακτικό έλεγχο του block c , κάθε τύπος θ_j που ανήκει στο c παράγεται εφαρμόζοντας επαναληπτικά κανόνες:

(1) σε γραμμές που εμφανίζονται πριν από τη γραμμή j και που είναι διαθέσιμες για το c -- δηλαδή σε γραμμές που ανήκουν στο c , ή περιέχονται στο σύνολο $\Sigma \cup Y(c)$,

(2) σε blocks που εμφανίζονται πριν από τη γραμμή j και που είναι διαθέσιμα για το c -- δηλαδή σε blocks που οι δηλώσεις τους περιέχονται στο σύνολο $\Delta(c) \cup \{\delta_p \mid$ το b_p εμφανίζεται πριν τη γραμμή $j\}$.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο j ότι: Άν η γραμμή j ανήκει στο c , $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_j$.

Έστω $j = k_1$: Προφανώς $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_{k1}$, αφού $\theta_{k1} \equiv \upsilon$.

Έστω $j = K+1$, όπου $k_1 \leq K \leq k_2 - 1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε γραμμή p που ανήκει στο c και εμφανίζεται πριν τη γραμμή $K+1$, $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_p$.

Έστω Θ το σύνολο $\{ \theta_p \mid$ η γραμμή p εμφανίζεται πριν την $K+1$ και ανήκει στο $c \}$, και Δ το σύνολο $\{ \delta_p \mid$ το block b_p εμφανίζεται πριν τη γραμμή $K+1 \}$. Με βάση τον συντακτικό έλεγχο του c και την ορθότητα των κανόνων, $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \cup \Theta \cup \Delta \models \theta_{K+1}$. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση και τις παραπάνω παρατηρήσεις, $\Sigma \cup Y(c) \cup \Delta(c) \cup \{\upsilon\} \models \theta_{K+1}$. ♥

Πόρισμα Έστω c ένα block που ανήκει σε μία φυσική απαγωγή, και δ η δήλωση του c : τότε $\Sigma \models \delta$.

Απόδειξη Έστω $c_1, \ldots, c_m$ τα blocks που ανήκουν στη φυσική απαγωγή, με τη σειρά που εμφανίζονται, και έστω δ_j η δήλωση του c_j : έχουμε ότι $Y(c_j) = \{ \}$, και $\Delta(c_j) = \{ \delta_1 , \ldots , \delta_{j-1} \}$.

Από το Λήμμα Ορθότητας για τα blocks της φυσικής απαγωγής έχουμε: $\Sigma \models \delta_1$, $\Sigma \cup \{\delta_1\} \models \delta_2$, ... , $\Sigma \cup \{\delta_1 , \ldots , \delta_{j-1}\} \models \delta_j$, άρα $\Sigma \models \delta_j$, για $j = 1, \ldots , m$. ♥

Θεώρημα Ορθότητας για μία φυσική απαγωγή

Για οποιαδήποτε γραμμή j που ανήκει στην απαγωγή, $\Sigma \models \theta_j$.

Απόδειξη Το ζητούμενο είναι προφανές για $j \leq n$.

Από τον συντακτικό έλεγχο της φυσικής απαγωγής, κάθε τύπος θ_j που ανήκει στην απαγωγή, $j > n$, παράγεται εφαρμόζοντας έναν από τους κανόνες, σε κάποιες γραμμές / blocks που εμφανίζονται πριν από την γραμμή j και που ανήκουν στην απαγωγή.

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή στο j ότι $\Sigma \models \theta_j$, για $j > n$.

Έστω $j = n+1$: Άν ο τύπος θ_{n+1} ανήκει στην απαγωγή, παράγεται εφαρμόζοντας έναν κανόνα σε κάποιους από τους τύπους $\varphi_1 , \ldots , \varphi_n$. Από την ορθότητα των κανόνων έχουμε $\Sigma \models \theta_{n+1}$.

Έστω $j = K+1$, όπου $n+1 \leq K \leq M-1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι: για κάθε γραμμή p που ανήκει στην απαγωγή και εμφανίζεται πριν από τη γραμμή $K+1$, ισχύει $\Sigma \models \theta_p$. Επίσης, από το παραπάνω Πόρισμα έχουμε ότι, για κάθε block c που ανήκει στην απαγωγή: $\Sigma \models \delta$, όπου δ η δήλωση του c . 'Αρα, με βάση τον συντακτικό έλεγχο της φυσικής απαγωγής και την ορθότητα των κανόνων $\Sigma \models \theta_{K+1}$. ♥