Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ 25 Ιουνίου 2024

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ : . . . . . .

ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΑΦΕ	ΣΤΗΛΗ :		ΜΟΝΑΔΕΣ:	120

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήσεις που απαρτίζουν έξι θέματα.

1. Ερωτήσεις με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε τη λύση με ένα σύντομο υπολογισμό, ή δίχως αιτιολόγηση αν κρίνετε ότι δεν χρειάζεται. 5 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

2. Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό/Λάθος" ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση. 4 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

3. Ερωτήσεις στις οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται. 10 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτηση ή υποερώτηση στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.
Ερωτήσεις του τύπου 1 και 2 είναι ισοδύναμες.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Σε οποιοδήποτε πρόβλημα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ο τριγωνομετρικός κύκλος δίνει πολλές πληροφορίες και αναμφισβήτητα βοηθάει.

Τριγωνομετρικοι αριθμοί κάποιων γωνιών

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Δώστε την απάντηση.

(α΄) ■ $\lim\limits_{N\to\infty} \arctan(e^N) = \dfrac{\pi}{2}$

Η συνάρτηση $f(x) = \arctan x$ είναι συνεχής, κατά συνέπεια αφού $e^N \to +\infty$, καθώς $N \to +\infty$ θα έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty} \arctan(e^N) = \arctan\left(\lim_{N\to+\infty} e^N\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(β΄) ■ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x)}{x} = 1$

$$\frac{\tan(\sin x)}{x} = \frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(\sin x)}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x} \to 1\cdot 1\cdot 1 = 1,$$

καθώς $x \to 0$, αφού $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ και $(\sin x)/x \to 1$, καθώς $x \to 0$.

(γ΄) ■ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n + (n/2)}\right)^n = e^{2/3}$

$$\left(1 + \frac{1}{n + (n/2)}\right)^n = \left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^n \to e^{2/3}$$

Θ2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x - x + 2, \qquad x > 0.$$

(α΄) Να βρεθούν τα ακρότατα της f και να χαρακτηριστούν (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο, ή απόλυτο μέγιστο/ελάχιστο).

Υπολογίζουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$$

κατά συνέπεια η f έχει απόλυτο μέγιστο στο $x = 1$.

(β΄) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f σε διάστημα γύρω από το $x_0 = 1$.

Το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f γύρω από το σημείο $x_0 = 1$ είναι

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

έτσι υπολογίζοντας

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3},$$

βρίσκουμε

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

(γ') Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της f από το P_2 στο διάστημα $(1/2, 3/2)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) = R_2(x) = \frac{2}{3!\xi^3}(x-1)^3 \Rightarrow |f(x) - P_2(x)| &\leq \max_{x,\xi \in [1/2,3/2]} \left| \frac{2}{3!\,\xi^3}(x-1)^3 \right| \\ &= \frac{2}{3!\,(1/2)^3}\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Θ3. Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός, να βρεθεί το μέγιστο διάστημα I_n ώστε

$$|e^{x+n} - e^{x-n}| > n$$

για όλα τα σημεία x του διαστήματος.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$e^t - e^s = e^{\xi}(t - s), \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } t \text{ και } s$$

έτσι για $t = x + n$ και $s = x - n$ βρίσκουμε

$$|e^{x+n} - e^{x-n}| = e^{x+n} - e^{x-n} = e^{\xi}2n, \qquad x - n < \xi < x + n$$

έτσι για να ισχύει η δοσμένη σχέση θα πρέπει να ισχύει

$$e^{\xi}2n > n \Leftrightarrow e^{\xi} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi > -\ln 2$$

για όλα τα ξ στο διάστημα $(x - n, x + n)$, γεγονός που επιβάλλει να ισχύει $x - n > -\ln 2$, ισοδύναμα $x > n - \ln 2$. Έτσι το ζητούμενο μέγιστο διάστημα είναι το $(n - \ln 2, +\infty)$.

Θ4. Κυκλώστε κατάλληλα, ή δώστε την απάντηση.

(α') Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + e^{a_n}}$ συγκλίνει. Σ Λ

Επειδή $1 + e^{a_n} > 1$, έπεται ότι

$$\left| \frac{a_n}{1 + e^{a_n}} \right| \leq |a_n|,$$

άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+e^{a_n}}$ συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει.

(β') Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n}$ συγκλίνει. Σ Λ

Από τη σύγκλιση της σειράς έχουμε ότι $a_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, επομένως $e^{-a_n} \to e^0 = 1$, κατά συνέπεια η σειρά με το εκθετικό αποκλίνει. Θυμίζουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $b_n \to 0$.

(γ') Αν $r \in \mathbb{R}$, πότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (e^r)^n$ συγκλίνει;

Η σειρά είναι γεωμετρική και συγκλίνει αν και μόνο αν $|e^r| < 1$, κατά συνέπεια για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει να είναι $r < 1$.

i. Αν $r > 0$ ii. Αν $r = 0$ iii. Αν $r < 0$ iv. Για όλα τα r

■ Για τα r για τα οποία συγκλίνει $\sum_{n=0}^{\infty}(e^r)^n = \frac{1}{1-e^r}$.

(δ΄) ■ $(1-i)^{24} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{24} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{24} = 2^{12}$

αφού

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{24} &= (\sqrt{2})^{24}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{24}\\ &= (\sqrt{2})^{24}\left(\cos 24\frac{7\pi}{4} + i\sin 24\frac{7\pi}{4}\right) \qquad \text{(De Moivre)}\\ &= 2^{12}(\cos(42\pi) + i\sin(42\pi))\\ &= 2^{12}(1+0i).\end{aligned}$$

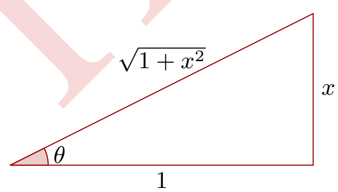
(ε΄) ■ **Ένα σχήμα είναι χρήσιμο.** Αν $\arctan x = \theta$, τότε $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Έχουμε

$$\arctan x = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = x, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Για $\theta \geq 0$ είναι $x \geq 0$ και $\tan\theta = x = \frac{x}{1}$, οπότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο, βλέπε Σχήμα, προκύπτει ότι

$$\cos\theta = \frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$



Σχήμα 1: Βοηθητικό τρίγωνο

Αν $\theta < 0$, τότε $x < 0$, και επειδή η συνάρτηση arctan είναι περιττή, έχουμε σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση με $-\theta$ στη θέση του θ και $-x$ στη θέση του x,

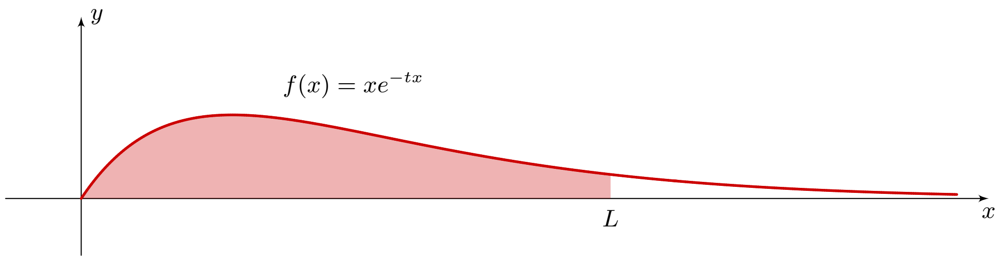
$$\begin{aligned}\arctan x = \theta \Rightarrow -\arctan x = -\theta &\Rightarrow \arctan(-x) = -\theta\\ &\Rightarrow \cos(-\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}}\\ &\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

αφού η cos είναι άρτια συνάρτηση.

Θ5. Για $t > 0$ και $L > 0$ θέτουμε

$$A_L(t) = \int_0^L xe^{-tx}\,dx.$$

Το ολοκλήρωμα-εμβαδόν είναι αύξουσα συνάρτηση του άκρου L.



Σχήμα 2: $A_L(t) =$ Εμβαδόν σκιασμένης περιοχής.

(α΄) $L_1 < L_2 \Rightarrow A_{L_1}(t) < A_{L_2}(t)$. Σ Λ

Αφού για $L_1 < L_2$

$$A_{L_2} = A_{L_1} + \int_{L_1}^{L_2} xe^{-tx}\,dx$$

και $xe^{-tx} > 0$, βλέπε Σχήμα 2.

(β΄) $A_{L+h}(t) - A_{L-h}(t) = \displaystyle\int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx$. Σ Λ

Από την προσθετική ιδιότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned} A_{L+h}(t) - A_{L-h}(t) &= \int_0^{L+h} xe^{-tx}\,dx - \int_0^{L-h} xe^{-tx}\,dx \\ &= \int_0^{L-h} xe^{-tx}\,dx + \int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx - \int_0^{L-h} xe^{-tx}\,dx \\ &= \int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx. \end{aligned}$$

(γ΄) Υπολογίστε το $A_L(t)$.

$$\begin{aligned} A_L(t) = \int_0^L xe^{-tx}\,dt &= \int_0^L x\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\,dx \\ &= -\frac{x}{t}e^{-tx}\Big|_0^L + \int_0^L \frac{1}{t}e^{-tx}\,dx \\ &= -\frac{L}{t}e^{-tL} - \frac{1}{t^2}e^{-tx}\Big|_0^L \\ &= -\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

(δ΄) ■ $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-tx}\,dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L xe^{-tx}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left(-\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}$.

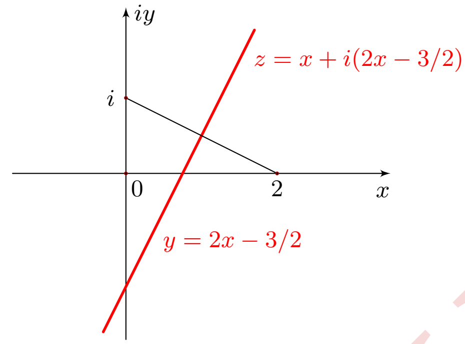
(ε΄) ■ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx = Le^{-tL}$

αφού από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\frac{1}{2h}\int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx = \xi e^{-t\xi}, \qquad L-h < \xi < L+h.$$

Θ6. Ένα σχήμα είναι χρήσιμο. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + iy$ για τους οποίους ισχύει $|z - i| = |z - 2|$, και να περιγραφούν γεωμετρικά.

Η απόλυτη τιμή ή μέτρο μιγαδικού αριθμού εκφράζει απόσταση, και οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση είναι αυτοί που απέχουν την ίδια απόσταση από τα σημεία $w_1 = i$ και $w_2 = 2$, κατά συνέπεια είναι αυτοί που βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα w_1 και w_2, κάθε σημείο της μεσοκαθέτου είναι η κορυφή ισοσκελούς τριγώνου με βάση τα $w_1 = i$ και $w_2 = 2$.



Σχήμα 3: Η μεσοκάθετος στο τμήμα $[i, 2]$

Αν $z = x + iy$, θέλουμε

$$\begin{aligned}|z - i| = |z - 2| \Leftrightarrow |x + i(y-1)| = |(x-2) + iy| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2\\ &\Leftrightarrow -2y = -4x + 3\\ &\Leftrightarrow y = 2x - 3/2\end{aligned}$$

έτσι η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι η $y = 2x - 3/2$.