

Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 11

Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων

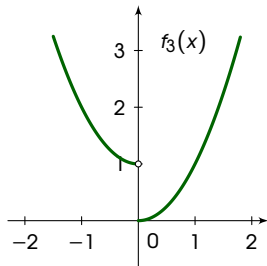
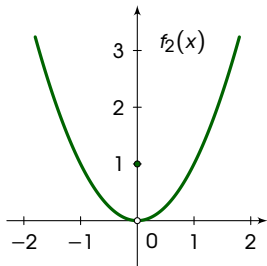
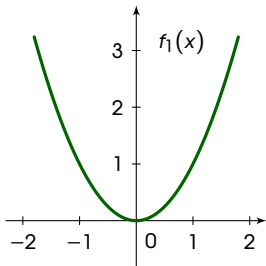
Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

21 Δεκεμβρίου 2021

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$



Καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν οι αντίστοιχες τιμές των f_1 και f_2 προσεγγίζουν επίσης το μηδέν όχι όμως και αυτές της f_3 . Αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά ($x < 0$) οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το ένα, ενώ αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά ($x > 0$) οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το μηδέν.

Λέμε ότι οι f_1 και f_2 συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το x τείνει στο μηδέν και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0.$$

Το μηδέν το λέμε **όριο** των f_1 και f_2 καθώς το x τείνει στο μηδέν. Για την f_3 θέλοντας να δηλώσουμε τις διαφορετικές οριακές τιμές που προκύπτουν ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζει το x το μηδέν γράφουμε

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_3(x) := \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = 0.$$

Γράφουμε επίσης

$$f_3(0-) := \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1, \quad f_3(0+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = 0,$$

και λέμε το $f_3(0-)$ **αριστερό πλευρικό όριο** της f_3 , ή απλά **όριο από τα αριστερά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά, και το $f_3(0+)$ **δεξιό πλευρικό όριο** της f_3 , ή απλά **όριο από τα δεξιά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά.

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0 , εκτός ίσως από το x_0 . Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός L είναι τό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ή $f(x) \rightarrow L$ καθώς $x \rightarrow x_0$, εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ) ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Παρατηρούμε ότι αν για τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ισχύει

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Το κλάσμα στο ζητούμενο όριο γράφεται

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

κατά συνέπεια για $x \neq 1$ είναι

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = (x + 1),$$

επομένως από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Παράδειγμα

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του πηλίκου για x κοντά στο μηδέν, έτσι για $-1 < x < 1$ είναι $1-x > 0$ και $1+x > 0$, οπότε

$$\frac{|1+x| - |1-x|}{x} = \frac{1+x - (1-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2, \quad 0 < |x| < 1$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1+x| - |1-x|}{x} = 2.$$

Θεώρημα (Ιδιότητες ορίων)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0 , εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

τότε

- ① $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda A + \mu B$, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = AB$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, εάν $B \neq 0$.
- ④ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = A^n$, για $n \in \mathbb{N}$.
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$, για $n \in \mathbb{N}$ και $f(x) \geq 0$ σε διάστημα που περιέχει το x_0 αν ο n είναι άρτιος.

Θεώρημα

Έστω ότι οι συναρτήσεις f , g και h είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0 , εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε x . Εάν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$.

Πρόταση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Πόρισμα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Από την ανισότητα

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$$

το Πόρισμα εξασφαλίζει ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

υπάρχει και από το Θεώρημα έπεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Για x κοντά στο 0 το $\cos x$ είναι κοντά στο 1, έτσι γράφοντας

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x + 1} \end{aligned}$$

και αφού τα όρια των δύο κλασμάτων στο δεξί μέλος υπάρχουν, παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \frac{0}{2} = 0.$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0 , εκτός ίσως από το x_0 .

• Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο** $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $A > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > A \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

• Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο** $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $A > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) < -A \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Για τις συναρτήσεις

$$g_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{και} \quad g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} g_1(x) \quad \text{δεν υπάρχει, ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g_2(x) = +\infty.$$

Κοιτάζοντας τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του $|x|$, δηλαδή για $x \rightarrow \pm\infty$, έχουμε

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κατάλληλο άπειρο διάστημα.

- Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x > A.$$

- Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x < -A.$$

Παράδειγμα

Γνωρίζοντας ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0$$

καθώς $x \rightarrow +\infty$. Για $x > 0$ αν n_x είναι το ακέραιο μέρος του x , τότε

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n_x + 1} &\leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n_x} \\ \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n_x} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1} \\ \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 1} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x} \left(1 + \frac{1}{n_x}\right). \end{aligned}$$

Καθώς $n_x \rightarrow \infty$ (ισοδύναμα $x \rightarrow \infty$) τα δύο άκρα της ανισότητας τείνουν στο e , κατά συνέπεια και η ενδιάμεση ποσότητα συγκλίνει στο ίδιο όριο καθώς $x \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}), \quad a > 0.$$

Γράφοντας

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

και παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής στο τελευταίο κλάσμα τείνει στο $+\infty$ καθώς $x \rightarrow +\infty$ εκτιμάμε ότι το ζητούμενο όριο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν.

Πράγματι για $\epsilon > 0$ έχουμε

$$0 < \sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \leq \frac{a}{2\sqrt{x}} < \epsilon \quad \text{για } x > \left(\frac{a}{2\epsilon}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0.$$

Για τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είδαμε ότι τα όρια και των δύο καθώς $x \rightarrow 0$ υπάρχουν και είναι ίσα με μηδέν αλλά διαφέρουν στο ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = f_1(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) \neq f_2(0).$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0 . Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για να είναι δηλαδή η f συνεχής στο x_0 πρέπει να ισχύουν τα εξής :

- ① $f(x_0)$ υπάρχει
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει, και
- ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, σχηματικά μπορούμε να γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0 .

Η f λέγεται **συνεχής από αριστερά** στο x_0 αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0).$$

Η f λέγεται **συνεχής από δεξιά** στο x_0 αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0).$$

Ορισμός (Συνέχεια σε διάστημα)

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος. Ειδικά η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$ και επιπλέον $f(a+) = f(a)$ και $f(b-) = f(b)$.

Παράδειγμα

Κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = a \lim_{x \rightarrow x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0)$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των ορίων. Για παράδειγμα για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $n = 2$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) = x_0 x_0 = x_0^2,$$

ενώ για $n = 3$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 \right) = x_0 x_0^2 = x_0^3,$$

και για γενικό n εργαζόμαστε επαγωγικά. Για $x_0 \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε από το πρώτο μέρος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} 1}{\lim_{x \rightarrow x_0} x^n} = \frac{1}{x_0^n}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής λέγονται **σημεία ασυνέχειας** της συνάρτησης και η συνάρτηση λέγεται **ασυνεχής** στα σημεία αυτά.

Παρατήρηση

Ας δούμε τι σημαίνει ότι μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε σημείο, έστω x_0 . Σύμφωνα με τον ορισμό είτε το $f(x_0)$ δεν ορίζεται, είτε αν ορίζεται θα υπάρχει ένας, τουλάχιστον, τρόπος όπου ενώ το x προσεγγίζει το σημείο x_0 η εικόνα $f(x)$ δεν προσεγγίζει το $f(x_0)$. Ισοδύναμα θα υπάρχει μια ακολουθία σημείων $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με $x_n \rightarrow x_0$, αλλά $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας είναι

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0 . Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ και το x_0), ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad |x - x_0| < \delta,$$

Συνέχεια των συναρτήσεων \sin και \cos

Δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις \sin και \cos είναι συνεχείς στο \mathbb{R} .

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω $\epsilon > 0$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } |x - y| < \delta, \text{ τότε } |\sin x - \sin y| < \epsilon.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

παίρνουμε μέσω της $|\sin x| \leq |x|$

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|.$$

Έτσι για $\delta = \epsilon$ έχουμε

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| < \delta = \epsilon.$$

Συνέχεια των συναρτήσεων \sin και \cos (συνέχεια)

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Το αποτέλεσμα για τη συνάρτηση \cos προκύπτει με ανάλογο τρόπο από την αντίστοιχη ταυτότητα

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή του δ , τόσο για την \sin όσο και για την \cos , είναι ανεξάρτητη του x και εξαρτάται μόνο από το ϵ .

Παράδειγμα

Εάν $a > 0$ η συνάρτηση a^x είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Θεώρημα

Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 , τότε οι

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x_0) \neq 0$$

είναι συνεχείς στο x_0 .

Θεώρημα

Έστω ότι η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται. Εάν η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $y_0 = g(x_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

Θεώρημα

Εάν η συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I είναι διάστημα, είναι ένα-προς-ένα συνεχής συνάρτηση, τότε η f^{-1} είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

- ① Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στο \mathbb{R} .
- ② Οι τριγωνομετρικές \sin και \cos στο \mathbb{R} .
- ③ Οι εκθετικές a^x , $a > 0$ στο \mathbb{R} .
- ④ Οι ρητές εκτός από τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή.
- ⑤ Οι τριγωνομετρικές \tan και \sec σε κάθε διάστημα $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Οι \cot και \csc σε κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ⑥ Οι ρίζες $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ στο \mathbb{R} αν ο n είναι περιττός, και στο $[0, +\infty)$ αν ο n είναι άρτιος.
- ⑦ Οι λογαριθμικές $\log_a x$, $a > 0$ στο $(0, +\infty)$.
- ⑧ Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές \sin^{-1} και \cos^{-1} στο διάστημα $[-1, 1]$, και \tan^{-1} στο \mathbb{R} .

Θεώρημα (Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής)

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $f(a) = A$, $f(b) = B$. Εάν το C είναι μεταξύ A και B , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in [a, b]$ ώστε $f(c) = C$.
Ειδικά αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Θεώρημα (Θεώρημα του σταθερού σημείου)

Εάν η $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$.

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Τότε η f παίρνει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό, δηλαδή υπάρχουν σημεία x_1 και x_2 στο $[a, b]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Γράφουμε

$$f(x_1) = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad f(x_2) = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, με $x \in (0, 1)$ δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } |x_1 - x_2| < \delta, \text{ τότε } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad (1)$$

για κάθε x_1, x_2 στο $(0, 1)$.

Αν x_1 και x_2 είναι σημεία του $(0, 1)$ έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \leq 2|x_1 - x_2| \quad (2)$$

έτσι για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγοντας $\delta = \epsilon/2$ η (1) έπεται από την (2).

Ορισμός

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** σε κάποιο διάστημα I αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (το οποίο εξαρτάται μόνο από το ϵ), ώστε

$$\text{αν } |x_1 - x_2| < \delta, \text{ τότε } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(a, +\infty)$, όπου $a > 0$.

Αν $x_1 > a$ και $x_2 > a$, βρίσκουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2},$$

αφού $x_1 x_2 > a^2$. Έτσι για $\epsilon > 0$ και $\delta = a^2 \epsilon$ έπεται ότι αν $|x_1 - x_2| < \delta$, τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} = \epsilon,$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση $1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(a, +\infty)$. Σημειώνουμε ότι η $1/x$ είναι, επίσης, ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[a, +\infty)$.

Άσκηση

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

Πρόταση

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου I είναι ένα διάστημα στο \mathbb{R} . Εάν $[a, b] \subset I$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Διαφορετικά, μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.

Εάν το I είναι διάστημα και $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, με $k = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις η συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

λέγεται **καμπύλη**. Αν $n = 2$ έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο, ενώ αν $n = 3$ έχουμε καμπύλη στο χώρο.

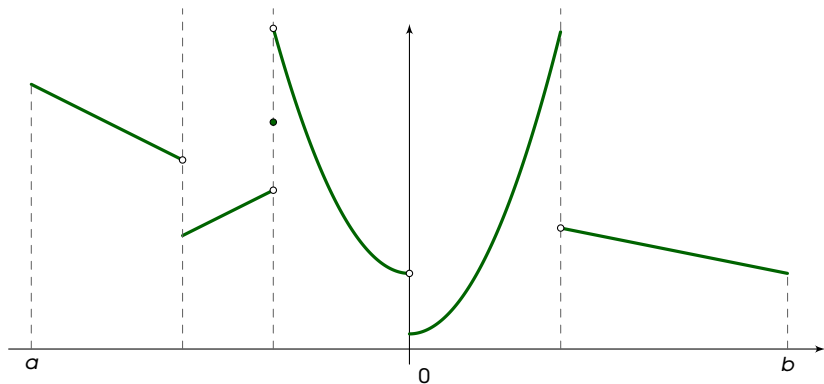
Αν η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, παρατηρούμε ότι το γράφημα της f , $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$, είναι το πεδίο τιμών μια ειδικής περίπτωσης επίπεδης καμπύλης της

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \quad x \in I,$$

αφού η ταυτοτική συνάρτηση $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, με $\tau(x) = x$ είναι συνεχής στο I . Πολλές φορές, καταχρηστικά, λέμε καμπύλη την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , δηλαδή το γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο είναι η αποτύπωση του γραφήματος της f . Για καμπύλες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα σε επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[a, b]$ εάν το διάστημα μπορεί να χωριστεί σε υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η f είναι συνεχής και τα πλευρικά όρια στα άκρα των υποδιαστημάτων υπάρχουν.



Είναι η $f(x) = \tan x$ τμηματικά συνεχής στο $[0, \pi]$;