Μαθηματικά I

Διάλεξη 10

Ολοκληρώματα και Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

14 Δεκεμβρίου 2021

- **Ολοκλήρωση κατά μέρη**
  Ολοκληρώνοντας τη σχέση $(fg)' = f'g + fg'$ προκύπτει ο τύπος
  $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$
  Θέτοντας $u = f(x)$ και $v = g(x)$ έχουμε $du = f'(x)\,dx$ και $dv = g'(x)\,dx$, οπότε ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε διαφορική μορφή γράφεται
  $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int x\cos x\,dx.$$

Υπολογίζουμε
$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

- **Ανάλυση σε απλά κλάσματα**

  Κάθε ρητή συνάρτηση, $p(x)/q(x)$ όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του αριθμητή, μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, τόσων στο πλήθος όσο το πλήθος των παραγόντων του $q(x)$, της μορφής

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \text{ή} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m},$$

  όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{(2x+5)^3}$$

$$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+4)^2}$$

  Κάνοντας, σε κάθε μια από τις περιπτώσεις, τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνοντας τα πολυώνυμα στους αριθμητές προκύπτει ένα σύστημα με αγνώστους τις σταθερές $A, B, C, \ldots$.

Θεώρημα (Ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Αν p και q είναι πολυώνυμα, ο βαθμός του p είναι μικρότερος του βαθμού του q, και το q αναλύεται σε παράγοντες ανά δύο διαφορετικούς μεταξύ τους

$$q(x) = Q(x+a_1)^{m_1}\cdots(x+a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}$$

όπου Q είναι μια σταθερά και τα τριώνυμα δεν έχουν πραγματικές ρίζες, τότε υπάρχουν σταθερές $A_1^1,\ldots A_1^{m_1}$, $A_k^1,\ldots A_k^{m_k}$, $B_1^1,\ldots B_1^{n_1}$, $B_l^1,\ldots B_l^{n_l}$, $C_1^1,\ldots C_1^{n_1}$, $C_l^1,\ldots C_l^{n_l}$ μονοσήμαντα ορισμένες, ώστε

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} =& \frac{A_1^1}{x+a_1}+\cdots+\frac{A_1^{m_1}}{(x+a_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{A_k^1}{x+a_k}+\cdots+\frac{A_k^{m_k}}{(x+a_k)^{m_k}}\\ &+\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_1^{n_1}x+C_1^{n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}}+\cdots\\ &+\frac{B_l^1x+C_l^1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_l^{n_l}x+C_l^{n_l}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_l}}.\end{aligned}$$

- **Αλλαγή μεταβλητής**
  Ο τύπος της αντικατάστασης στη περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος παίρνει την απλή μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad t = g(x), \quad dt = g'(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p}, \qquad x > e^{-1}, \quad p \neq 1.$$

Θέτοντας $u = 1+\log x$, οπότε $du = (1+\log x)'\,dx = 1/x\,dx$, παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \frac{1}{1-p}u^{1-p} + C = \frac{1}{1-p}(1+\log x)^{1-p} + C.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ή ολοκληρώματος Riemann, μιας συνάρτησης f ορισμένης στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ απαιτείται η συνάρτηση ναείναι φραγμένη στο $[a, b]$. Η έννοια του ολοκληρώματος επεκτείνεται σε περιπτώσεις όπου το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι πεπερασμένο ή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Ορισμός

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** εάν

1. Τουλάχιστον ένα από τα άκρα ολοκλήρωσης είναι άπειρο, δηλαδή $\alpha = -\infty$, ή $\beta = +\infty$, ή $\beta = -\alpha = +\infty$.
2. Η f είναι μη φραγμένη σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου I)

1. Εάν για κάθε $t \geq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, t]$ γράφουμε
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{1}$$
Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

2. Εάν για κάθε $t \leq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t, a]$ γράφουμε
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx. \tag{2}$$
Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (2) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου Ι)

Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και τα δύο ολοκληρώματα $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Παράδειγμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Υπολογίζουμε

$$\int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan s - arctan 0 = \arctan s$$

έτσι

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{s\to+\infty} \arctan s = \frac{\pi}{2}$$

Από συμμετρία έχουμε επίσης

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

κατά συνέπεια

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου II)

1. Εάν για κάθε $t \in [a, b)$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, t]$, και μη φραγμένη στο b γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\, dx. \tag{3}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (3) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

2. Εάν για κάθε $t \in (a, b]$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t, b]$, και μη φραγμένη στο a γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)\, dx. \tag{4}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (4) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι **αποκλίνει**.

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου II)

Εάν η f είναι μη φραγμένη μόνο στο στο $c \in (a, b)$ θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν και τα δύο ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ αποκλίνει το $\int_a^b f(x)\,dx$ αποκλίνει. Σε περίπτωση που η f είναι μη φραγμένη σε περισσότερα από ένα σημεία ο ορισμός επεκτείνεται ανάλογα.

Την (5) μπορούμε εναλλακτικά να τη γράφουμε στη μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

συγκλίνει και υπολογίστε την τιμή του.

Η συνάρτηση $f(x) = 1/\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και μη φραγμένη κοντά στο μηδέν, άρα για $\epsilon > 0$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\epsilon, 1]$, και

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{x^{1-1/2}}{1-1/2}\Big]_\epsilon^1 = 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right).$$

Έτσι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

Παράδειγμα

Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου p συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx.$$

και για αυτές που συγκλίνει να βρεθεί η τιμή του.

(i) Για $p = 1$ και $T > 1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big]_1^T = \log T$$

και

$$\lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\, dx = \lim_{T\to+\infty} \log T = +\infty.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

(ii) Για $p \neq 1$ και $T > 1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^T x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^T = \frac{T^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Αν $p < 1 \Leftrightarrow 1-p > 0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(T^{1-p}-1\right) = +\infty.$$

Αν $p > 1 \Leftrightarrow p-1 > 0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{T^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Επομένως

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & p \leq 1, \\ 1/(p-1) & p > 1. \end{cases}$$

Θεώρημα

Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

1. $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \geq a$.
2. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει για κάθε* $b \geq a$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά* $M > 0$ *ώστε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad \text{για κάθε } b \geq a.$$

Θεώρημα (Βασικό κριτήριο σύγκρισης)

Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g ισχύει

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \geq a$.
2. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει για κάθε* $b \geq a$.

Εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *συγκλίνει τότε και το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει και*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Ορισμός

Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει απολύτως** αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Εάν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Θεώρημα

Εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή εάν ένα ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

συγκλίνει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, κατά συνέπεια για κάθε $a > 0$ το ολοκλήρωμα $\int_0^a f(x)\, dx$ υπάρχει. Έτσι γράφοντας

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{2\pi}^t \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{\cos x}{x}\Big]_{2\pi}^t - \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \frac{1}{2\pi} - \lim_{t \to +\infty} \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{6}$$

Επειδή

$$0 \leq \int_{2\pi}^{t} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_{2\pi}^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_{2\pi}^{t} = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2\pi}$$

έπεται ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως, κατά συνέπεια από το Θεώρημα 16 έπεται ότι το

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{2\pi}^{t} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

υπάρχει, επομένως από την (6) συνεπάγεται το ζητούμενο.

Άσκηση (Η συνάρτηση Γάμμα)

Για $s>0$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

(α΄) *Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s>0$.*
Υπόδειξη: *αν $s \geq 1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p}\, dt, \qquad p = s-1 \geq 0$$

αν $0<s<1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{t^{p}}\, dt, \qquad p = 1-s > 0.$$

(β΄) *Δείξτε ότι $\Gamma(n) = (n+1)!$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Μετασχηματισμός Laplace

Αν η f είναι μια ``καλή'' συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$, και $s \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος η σχέση

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

ορίζει μια συνάρτηση του s, για όλες τις τιμές του s για τις οποίες το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$, λέγεται **μετασχηματισμός Laplace** της f.

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = \sin ax$, $x \geq 0$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\mathscr{L}\{\sin ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax\, dx = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

Για $L > 0$ και $s \neq 0$ υπολογίζουμε

$$\int_0^L e^{-sx} \sin ax\, dx = \int_0^L \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)' \sin ax\, dx = -\frac{e^{-sx} \sin ax}{s}\Bigg]_0^L + \frac{a}{s}\int_0^L e^{-sx} \cos ax\, dx$$

$$= -\frac{e^{-sx} \sin ax}{s}\Bigg]_0^L - a\frac{e^{-sx} \cos ax}{s^2}\Bigg]_0^L - \frac{a^2}{s^2}\int_0^L e^{-sx} \sin ax\, dx$$

οπότε

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Bigg]_0^L - a\frac{e^{-sx}\cos ax}{s^2}\Bigg]_0^L$$
$$= -\frac{e^{-sL}\sin aL}{s} - a\frac{e^{-sL}\cos aL}{s^2} + \frac{a}{s^2},$$

επομένως

$$\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2} - \left[\frac{s\sin aL}{s^2+a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2+a^2}\right]\frac{1}{e^{sL}}.$$

Για $s>0$ παίρνοντας το όριο $L\to+\infty$ προκύπτει, τελικά, ότι

$$\mathscr{L}\{\sin ax\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin ax\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2},$$

αφού

$$\left|\frac{s\sin aL}{s^2+a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2+a^2}\right|\frac{1}{e^{sL}} \le \frac{s+|a|}{s^2+a^2}\,\frac{1}{e^{sL}} \to 0,$$

καθώς $L\to+\infty$. Για $s\le 0$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Άσκηση

Δείξτε ότι

- (α') $\mathscr{L}\{a\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} a \, dx = \frac{a}{s}, \quad s > 0.$
- (β') $\mathscr{L}\{e^{ax}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} \, dx = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$
- (γ') $\mathscr{L}\{x\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x \, dx = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$
- (δ') $\mathscr{L}\{x^n\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n \, dx = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
- (ε') $\mathscr{L}\{\cos ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$

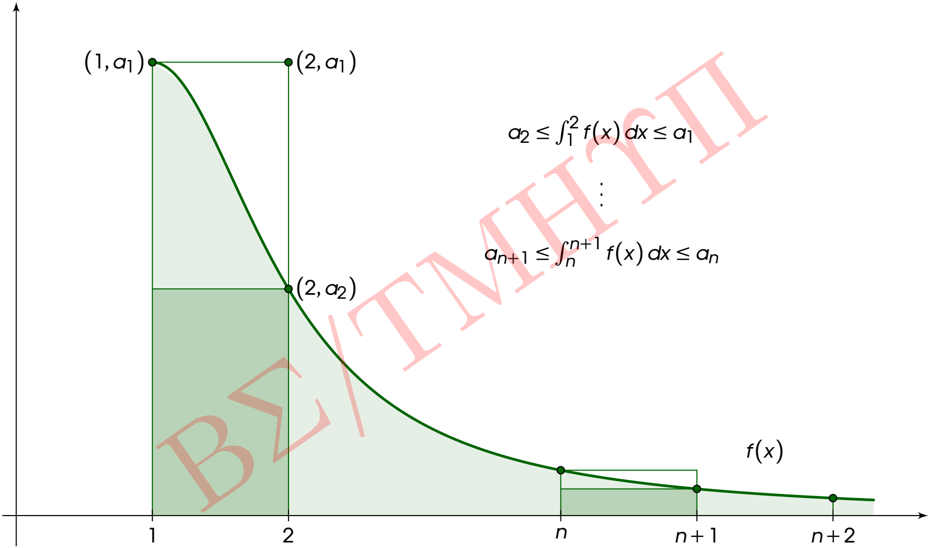
Το παρακάτω αποτέλεσμα δίνει πληροφορία για τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας κατηγορίας σειρών και προκύπτει από τη σύγκριση της σειράς με ένα σχετικό γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Θεώρημα (Κριτήριο ολοκληρώματος)

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής, θετική και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, και έστω $a_n = f(n)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{7}$$

Κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, και αποκλίνει αν το ολοκλήρωμα αποκλίνει.



Σχήμα: Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Παράδειγμα

Για $p > 0$ θεωρούμε την p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

Εξετάστε για ποιές τιμές του p η σειρά συγκλίνει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \qquad x > 0$$

είναι συνεχής, θετική, και φθίνουσα κατά συνέπεια σύμφωνα με το Θεώρημα 18 η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

συγκλίνει. Έτσι από το Παράδειγμα 11 έπεται ότι η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$ στο ίδιο διάστημα, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν της περιοχής ή χωρίου R του επιπέδου μεταξύ του γραφήματος της f και του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Έτσι αν $a \leq x \leq b$ το

$$dA = f(x)\,dx$$

εκφράζει το εμβαδό του ``στοιχειώδους παραλληλογράμμου'' στο x βάσης dx και ύψους $f(x)$.

Στη συνέχεια συζητάμε τις εξής εφαρμογές του ολοκληρώματος

1. Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων.
2. Όγκος στερεού εκ περιστροφής.
3. Η αρχή του Cavalieri.
4. Μήκος καμπύλης.

Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων

Αν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και R είναι το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των f και g και των ευθειών $x = a$ και $x = b$, το R αποτελείται από ``στοιχειώδη παραλληλόγραμμα''. Το εμβαδόν κάθε τέτοιου στο $x \in [a, b]$ είναι

$$dA = [\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\}]\, dx = |f(x) - g(x)|\, dx,$$

έτσι το εμβαδόν $A(R)$ του χωρίου R είναι

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{8}$$

Η αυστηρή απόδειξη του (8) γίνεται με χρήση των αθροισμάτων Riemann.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της $y = \sin x$ του x-άξονα και των ευθειών $x = 0$ και $x = 2\pi$.

Εδώ είναι $g(x) = 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$A(R) = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} + \cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

΄Ογκος στερεού εκ περιστροφής

Αν το χωρίο R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ μεταξύ του γραφήματος της f, του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$ περιστραφεί γύρω από τον x-άξονα ή τον y-άξονα παράγεται ένα στερεό, το **στερεό εκ περιστροφής**. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον όγκο V του στερεού αυτού.

- Περιστροφη γυρω απο τον x-αξονα.
  Αν $x \in [a, b]$ το ``στοιχειώδες'' παραλληλόγραμμο στο $x$ καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον $x$-άξονα παράγει ένα ``στοιχειώδη'' κυκλικό στερεό κύλινδρο με εμβαδό βάσης $\pi[f(x)]^2$ και ύψος dx, έτσι ο όγκος του ``στοιχειώδους'' κυλίνδρου στο x είναι $dV = \pi[f(x)]^2\,dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής, όπως στη περίπτωση του εμβαδού, είναι
  $$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx. \tag{9}$$

Η αυστηρή απόδειξη των όσων αναφέραμε γίνεται με χρήση αθροισμάτων Riemann.

- Περιστροφη γυρω απο τον y-αξονα.
  Αν $x \in [a, b]$ το ``στοιχειώδες'' παραλληλόγραμμο στο $x$ καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον $y$-άξονα παράγει ένα ``στοιχειώδη'' φλοιό κυκλικού κυλίνδρου με μήκος $2\pi x$, ύψος $f(x)$ και πάχος dx, έτσι ο όγκος του ``στοιχειώδους'' φλοιού στο x είναι $dV = 2\pi x f(x)\,dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής είναι

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx. \tag{10}$$

Η αυστηρή απόδειξη των όσων αναφέραμε γίνεται με χρήση αθροισμάτων Riemann.

Η αρχή του Cavalieri

Ας υποθέσουμε ότι ένα στερεό βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $x = a$ και $x = b$, με $a < b$. Αν για $x_0 \in [a, b]$ γνωρίζουμε το εμβαδόν $A(x_0)$ του χωρίου $R(x_0)$ που είναι η τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, τότε η ποσότητα $A(x_0)\,dx$ εκφράζει τον όγκο μιας ``στοιχειώδους φέτας'' του στερεού στο $x = x_0$. Έτσι ο όγκος V του στερεού θα δίνεται από τη σχέση

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{11}$$

Αναφέρουμε και πάλι ότι για μια αυστηρή απόδειξη της (11) ανατρέχουμε στον ορισμό του ολοκληρώματος και τα αθροίσματα Riemann. Το χωρίο $R(x_0)$, δηλαδή την τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, θα το λέμε **διατομή** στο $x = x_0$. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri στερεά ίσου ύψους και ίσων εμβαδών διατομής σε κάθε ύψος, έχουν ίσους όγκους.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας R και είναι τέτοιο ώστε οι διατομές του κατά μήκος ενός άξονα που περιέχει το κέντρο της σφαίρας είναι τετράγωνα εγγεγραμμένα στη σφαίρα.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο της σφαίρας είναι το $(0,0,0)$. Το επίπεδο κάθετο στον x-άξονα στο σημείο $x = x_0$ με $-R \leq x_0 \leq R$, τέμνει τη σφαίρα κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το $(x_0, 0)$ και ακτίνα $r(x_0) = (R^2 - x_0^2)^{1/2}$. Έτσι η διατομή του στερεού στο $x = x_0$ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $d = 2r(x_0)$, κατά συνέπεια το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x_0) = 2r(x_0)r(x_0) = 2(R^2 - x_0^2),$$

οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\int_0^R 2(R^2 - x^2)\,dx = 4\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{8}{3}R^3.$$

Μήκος καμπύλης

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ τη συνάρτηση $\gamma_f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \qquad a \leq x \leq b$$

τη λέμε **καμπύλη**. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ το $(x, f(x))$ είναι σημείο του γραφήματος G_f της f και ότι η γραφική παράσταση της f είναι η γεωμετρική εικόνα της καμπύλης γ στο επίπεδο. Για τον λόγο αυτό, παραβιάζοντας τον ορισμό, λέγοντας καμπύλη εννοούμε το γεωμετρικό αντικείμενο που είναι η γραφική παράσταση της f και αναφερόμαστε στην καμπύλη $y = f(x)$. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια μήκους καμπύλης και τι είναι αυτό. Θυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει το μήκος περιφέρειας και τόξου τα οποία είναι ειδική περίπτωση καμπύλης.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γραμμική. Τότε η γραφική παράσταση της σχετικής καμπύλης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα (στο επίπεδο) με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, κατά συνέπεια το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι λογικό να ορίζεται σαν το μήκος της σχετικής καμπύλης γ_f. Έτσι αν με $L(\gamma_f)$ συμβολίσουμε το μήκος της καμπύλης, τότε

$$L(\gamma_f) = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2},$$

αν $f(x) = mx + c$ και $b > a$.

Αν η γραφική παράσταση της f είναι μια πολυγωνική γραμμή που απαρτίζεται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και $(x_k, f(x_k))$, με $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, τότε γενικεύοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα ορίζουμε το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης με τη σχέση

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Έτσι αν $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και η f στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $f(x) = m_k x + c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\, \Delta x_k.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος είναι συνεχής. Αν $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ τότε η πολυγωνική καμπύλη που συνδέει τα σημεία $(x_k, f(x_k))$ με $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι μια ``προσέγγιση'' της γ_f, οπότε είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι

$$L(\gamma_f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})]^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k$$

όπου $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Η τελευταία έκφραση είναι άθροισμα Riemann για την συνεχή συνάρτηση $\sqrt{1 + (f')^2}$, κατά συνέπεια παίρνοντας το όριο του $n \to \infty$ θα είναι

$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{12}$$