Μαθηματικά Ι

Διαλέξεις 08 & 09

Το ολοκλήρωμα

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2 & 7 Δεκεμβρίου 2021

Έστω f να είναι μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Μια **διαμέριση** του $[a,b]$ είναι ένα σύνολο σημείων του $[a,b]$ $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_N\}$ με $a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$. Αν $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,N$ διαμορφώνουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k, \tag{1}$$

όπου $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,N$. Θέτουμε $\|P\|=\max_{k=1,2,\ldots,N}\Delta x_k$. Εάν καθώς ο αριθμός των σημείων N στη διαμέριση αυξάνει απεριόριστα, ώστε $\|P\|\to 0$, το αντίστοιχο όριο

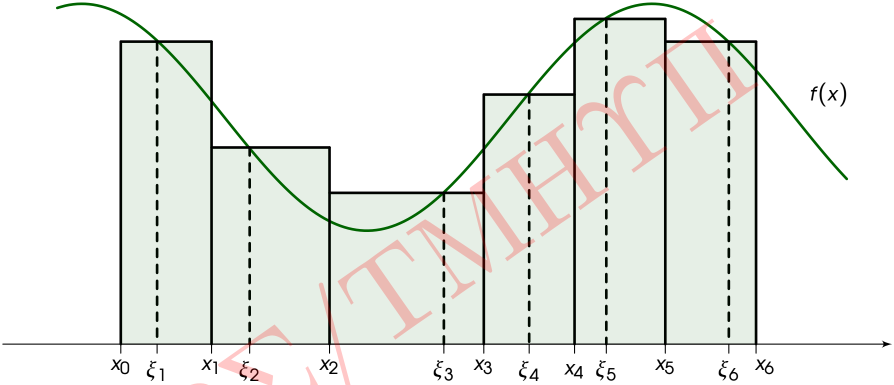
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$$

υπάρχει το συμβολίζουμε με

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx.$$



Σχήμα: Το άθροισμα Riemann ($N = 6$, $a = x_0$, $b = x_6$)

Το όριο αυτό το λέμε **ολοκλήρωμα Riemann**, ή απλά **ολοκλήρωμα**, της f στο $[a,b]$. Τα σημεία a και b λέγονται **άκρα της ολοκλήρωσης** με a να είναι το κάτω άκρο και b να είναι το άνω άκρο της ολοκλήρωσης.

Ορισμός

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη σε κάποιο διάστημα $[a,b]$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει θα λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemmann**, ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$. Το άθροισμα στην (1) λέγεται **άθροισμα Riemann** της f για την διαμέριση P στο $[a,b]$.

Παρατήρηση

Μια άμεση συνέπεια του ορισμού του ολοκληρώματος είναι ότι εάν $f(x)=c$ σε κάποιο διάστημα $[a,b]$, όπου c είναι μια σταθερά , τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

αφού για κάθε διαμέριση του $[a,b]$ το αντίστοιχο άθροισμα Riemann είναι ίσο με $c(b-a)$.

Θεώρημα

Αν η f είναι μια συνεχής ή τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Παρατήρηση

Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ στο διάστημα αυτό, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι το εμβαδόν της περιοχής R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ του x-άξονα, του γραφήματος της f και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Το αποτέλεσμα αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε άθροισμα Riemann της f είναι το άθροισμα εμβαδών διαδοχικών ορθογωνίων το ``άθροισμα΄΄ των οποίων, καθώς το μήκος της βάσης Δx τείνει στο μηδέν, προσεγγίζει όλο και περισσότερο την περιοχή R.

Παράδειγμα

Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής παντού άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επιπλέον το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα δίνει το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, κατά συνέπεια θα πρέπει το ζητούμενο ολοκλήρωμα να ισούται με $1/2$.
Αφού το ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι ανεξάρτητο της διαμέρισης στη διαμόρφωση των αθροισμάτων Riemann. Για $N \in \mathbb{N}$ παίρνουμε την διαμέριση

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \cdots < \frac{N-1}{N} < 1$$

και σαν ξ_k το κέντρο κάθε υποδιαστήματος $[(k-1)/N, k/N]$, δηλαδή $\xi_k = (2k-1)/2N$, $k = 1,2,\ldots,N$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έτσι το αντίστοιχο άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k-1}{2N}\frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2}\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = \frac{1}{2N^2}\left(2\sum_{k=1}^{N} k - N\right)$$

$$2\sum_{k=1}^{N} k - N = 2\frac{N(N+1)}{2} - N = N^2$$

τελικά βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2N^2}N^2 = \frac{1}{2},$$

κατά συνέπεια, όπως εξάλου περιμέναμε,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\Big).$$

Θέλουμε να δούμε το ζητούμενο όριο σαν όριο αθροισμάτων Riemann. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\Big)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\end{aligned}$$

με $\xi_k = k/n$ και $\Delta x_k = 1/n$ με $k = 1,2,\ldots,n$ για $f(x) = 1/(1+x)$, έτσι η σχετική διαμέριση αποτελείται από τα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, $\ldots$, $x_n = n/n = 1$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\Big)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx.$$

Άσκηση

Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Παρατήρηση

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$, όπως φαίνεται και από την (1), είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής x. Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Θεώρημα

Έστω ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$.

1. *Για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών λ και μ η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. *Εάν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

3. $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$.

1. *Εάν $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Ειδικά αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

2. *Εάν $a < c < b$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι το κάτω όριο ολοκλήρωσης είναι μικρότερο του άνω ορίου. Στη πράξη είναι βολικό να θεωρούμε και περιπτώσεις όπου το κάτω όριο είναι μεγαλύτερο του άνω ορίου. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ $(a<b)$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επίσης εάν $a \leq c \leq b$, ορίζουμε

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Με αυτή την επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα I και a, b, c είναι σημεία του I, τότε για οποιαδήποτε διάταξη των a, b, c ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$. Η συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Ορισμός

Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ορίζουμε την **μέση τιμή** $\bar{f}$ της f να είναι

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Θεώρημα

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \bar{f}$, δηλαδή

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}.$$

Θεώρημα

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Θεώρημα (ΘΘ1)

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad a\le x\le b.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $c\in[a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και $F'(c)=f(c)$. Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Γράφοντας $F'(a)$ εννοούμε τη δεξιά παράγωγο στο $x=a$, και $F'(b)$ εννοούμε την αριστερή παράγωγο στο $x=b$.

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

σε κάθε σημείο x όπου η f είναι συνεχής.

Θεώρημα (ΘΘ2)

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g, τότε

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \qquad \text{όπου} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

♣ Αν $g' = f$ το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 13 το γράφουμε απλά σαν

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(t)\Big]_a^b \qquad \text{όπου} \quad g(t)\Big]_a^b = g(b) - g(a).$$

Παρατήρηση

Εάν η f είναι συνεχής και οι u, v παραγωγίσιμες τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Πράγατι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ορίσουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, τότε

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Παραγωγίζοντας και παίρνοντας υπόψη ότι $F' = f$ έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα (Τύπος της αντικατάστασης)

Αν οι f και g' είναι συνεχείς, τότε

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Από το ΘΘ2 έχουμε

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^\pi (-\cos x)'\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi = -(-1)-(-1) = 2.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx.$$

Όπως πριν υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{-\cos' x}{\cos x} \, dx &= -\int_0^{\pi/4} \frac{\cos' x}{\cos x} \, dx \\
&= -\int_0^{\pi/4} \left(\log|\cos x|\right)' \, dx \\
&= -\log|\cos x| \Big]_0^{\pi/4} \\
&= -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log 1 \\
&= \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx.$$

Αν δούμε ότι

$$\sin^5 x \cos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\sin^6 x\right)$$

τότε από το ΘΘ2 παίρνουμε

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \frac{1}{6}\sin^6 b - \frac{1}{6}\sin^6 a.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Διαφορετικά γράφοντας

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \int_a^b \sin^5 x \sin' x \, dx$$

και θέτοντας $u = \sin x$ έχουμε ότι $du = \cos x \, dx$, οπότε από τον τύπο της αντικατάστασης παίρνουμε

$$\begin{aligned} &= \int_{u(a)}^{u(b)} u^5 \, du \\ &= \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 \, du \\ &= \int_{\sin a}^{\sin b} \left(\frac{1}{6} u^6\right)' du \\ &= \frac{1}{6} \sin^6 b - \frac{1}{6} \sin^6 a. \end{aligned}$$

Θα λέμε ότι η F είναι μια **παράγουσα** της f αν $F' = f$. Γράφοντας

$$\int f(x)\,dx$$

εννοούμε τη συλλογή όλων των παραγουσών της f. Έτσι αν $F'(x) = f(x)$, τότε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

όπου C είναι μια σταθερά. Έτσι αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνεχής η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι η (μοναδική) παράγουσα της f με $F(a) = 0$.

Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

1. $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \quad r \neq -1.$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
5. $\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C.$
6. $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C.$
7. $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C.$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$
9. $\int e^x = e^x + C.$
10. $\int a^x = \frac{1}{\log a}a^x + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C.$
12. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$

- **Ολοκλήρωση κατά μέρη**
  Ολοκληρώνοντας τη σχέση $(fg)' = f'g + fg'$ προκύπτει ο τύπος

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

  Θέτοντας $u = f(x)$ και $v = g(x)$ έχουμε $du = f'(x)\,dx$ και $dv = g'(x)\,dx$, οπότε ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε διαφορική μορφή γράφεται

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x\cos x\,dx.$$

Υπολογίζουμε

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

- **Ανάλυση σε μερικά κλάσματα**
  Κάθε ρητή συνάρτηση, $p(x)/q(x)$ όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του αριθμητή, μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, τόσων στο πλήθος όσο το πλήθος των παραγόντων του $q(x)$, της μορφής

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \text{ή} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m},$$

όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{(2x+5)^3}$$

$$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+4)^2}$$

- **Αλλαγή μεταβλητής**
  Ο τύπος της αντικατάστασης στη περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος παίρνει την απλή μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad t = g(x), \quad dt = g'(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p}, \qquad x > e^{-1}, \quad p \neq 1.$$

Θέτοντας $u = 1 + \log x$, οπότε $du = (1+\log x)'\,dx = 1/x\,dx$, παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \frac{1}{1-p}u^{1-p} + C = \frac{1}{1-p}(1+\log x)^{1-p} + C.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx.$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$

οπότε εξισώνοντας παίρνουμε

$$6-x = (5A-3B)+(2A+B)x \Leftrightarrow \begin{cases} 5A-3B=6 \\ 2A+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3/11 \\ B = -17/11 \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

έτσι

$$\begin{aligned}\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \int\left[\frac{3/11}{x-3}-\frac{17/11}{2x+5}\right]dx\\ &= \frac{3}{11}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{17}{11}\int\frac{dx}{2x+5}\\ &= \frac{3}{11}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{17}{22}\int\frac{2\,dx}{2x+5}\\ &= \frac{3}{11}\log|x-3|-\frac{17}{22}\log|2x+5|+C.\end{aligned}$$