Μαθηματικά Ι

Διαλέξεις 6 & 7

Συναρτήσεις
Συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών
Πραγματικές συναρτήσεις

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 & 23 Νοεμβρίου 2021

Ορισμός

Εάν A και B είναι δύο σύνολα μία **συνάρτηση** f από το A στο B είναι μία αντιστοιχία ή νόμος ώστε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του B. Εάν f είναι μία συνάρτηση από το A στο B γράφουμε $f : A \to B$. Εάν $x \in A$ με $f(x)$ συμβολίζουμε το στοιχείο του B που αντιστοιχεί μέσω της f στο x. Λέμε ότι το $f(x)$ είναι η **εικόνα** του x μέσω της f.

Ορισμός

Έστω f να είναι είναι μία συνάρτηση από το A στο B, δηλαδή $f : A \to B$. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** (domain) της f και, συνήθως, συμβολίζεται με $D(f)$ ή D_f. Το σύνολο των $y \in B$ για τα οποία υπάρχουν $x \in A$ τέτοια ώστε $y = f(x)$ λέγεται **πεδίο τιμών** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f. Εν γένει $R(f) \subseteq B$. Το υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

λέγεται **γράφημα** (graph) της f. Εναλλακτικά συμβολίζεται με G_f.

Παράδειγμα

Έστω $A = \{x, y, z\}$ και $B = \{a, b\}$ και ορίζουμε $f : A \to B$ με

$$f(x) = a, \qquad f(y) = b, \qquad f(z) = b.$$

Παράδειγμα

Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα και έστω $b_0 \in B$. Η συνάρτηση $f : A \to B$ με τύπο $f(x) = b_0$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **σταθερή** συνάρτηση (constant function).

Παράδειγμα

Έστω $A \neq \varnothing$. Η συνάρτηση $f : A \to A$ με τύπο $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **ταυτοτική** συνάρτηση (identity function) και συμβολίζεται με τ_A.

Παράδειγμα

Έστω $A \neq \varnothing$ και έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ η συνάρτηση $f|_{A_0} : A_0 \to B$ που ορίζεται από τη σχέση $f|_{A_0}(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A_0$, λέγεται **ο περιορισμός** της f στο A_0 (restriction of f on A_0).

- Έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ με $f(A_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του A_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **εικόνα** (image) του A_0 μέσω της f. Έτσι

$$f(A_0) = \{y \in B : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f(A_0) \subseteq B$. Εάν $B_0 \subseteq B$ με $f^{-1}(B_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων του A των οποίων οι εικόνες μέσω της f ανήκουν στο B_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **αντίστροφη εικόνα** (preimage) του B_0 μέσω της f. Έτσι

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(B_0) \subseteq A$. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$A_0 \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0 \qquad (1)$$

$$B_0 \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0 \qquad (2)$$

Ορισμός

Έστω $f : A \to B$.

1. Η f λέγεται **ένα-προς-ένα** (injective ή one--to--one) εάν για κάθε ζευγάρι διακριτών στοιχείων του $D(f)$ οι εικόνες τους διαφέρουν μεταξύ τους, δηλαδή
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
Ισοδύναμα
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
2. Η f λέγεται **επί** (surjective ή onto) του B εάν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή
$$y \in B \Rightarrow y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A.$$
Ισοδύναμα $R(f) = B$.
3. Εάν η f είναι ένα-προς-ένα και επί θα λέγεται **ένα-προς-ένα αντιστοιχία** μεταξύ των A και B.

• Εάν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με τη σχέση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Η $g \circ f$ λέγεται **σύνθεση** (composite) των f και g. Η $g \circ f$ ορίζεται όταν το πεδίο τιμών της f περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g, σχηματικά $R(f) \subseteq D(g)$.

• Εάν $f : A \to B$ είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία του A με το B, τότε σε κάθε στοιχείο $y \in B$ αντιστοιχεί ένα και μόνο στοιχείο $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Έτσι μπορεί να ορισθεί η **αντίστροφη** συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ της f από τη σχέση $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Παράδειγμα

Για $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b, c\}$ και $C = \{p, q\}$ ορίζουμε

$$f(x) = a, \quad f(y) = f(z) = b, \qquad g(a) = g(b) = p, \quad g(c) = q$$

τότε $R(f) = \{a, b\} \subsetneq B$ και $R(g) = C$, και

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = p, \quad g \circ f(y) = g(f(y)) = g(b) = p, \quad g \circ f(z) = p$$

• Το εμβαδόν A που περικλείει κύκλος ακτίνας r είναι ίσο με πr^2, άρα

$$A(r) = \pi r^2, \qquad A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

• Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h είναι ίσος με $\pi r^2 h$, έτσι ο όγκος V είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών r και h, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

• Αν ένα σώμα κινείται στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ώστε κάθε χρονική στιγμή t η θέση του είναι γνωστή, τότε η κίνηση περιγράφεται από μια συνάρτηση $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, ώστε

$$w(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

όπου οι x, y, z είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

• Αν P είναι σημείο στην ατμόσφαιρα της γης, $p(P), q(P), h(P)$ είναι αντίστοιχα η ατμοσφαιρική πίεση, η θερμοκρασία, και η υγρασία στο P, υποθέτοντας ότι το κέντρο της γης βρίσκεται στην αρχή ενός τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων, τότε $P = P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, οπότε η πληροφορία που μας ενδιαφέρει κωδικοποιείται με μια συνάρτηση $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$M(x,y,z) = (p(x,y,z), q(x,y,z), h(x,y,z)).$$

Ορισμός

Εάν $A \neq \varnothing$, κάθε συνάρτηση ορισμένη στο A με τιμές στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται **πραγματική** συνάρτηση. Συνήθως το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν είναι το $\mathbb{R}$ ή κάποιο υποσύνολο αυτού.

Οι πραγματικές συναρτήσεις συνήθως δίνονται με κάποιο τύπο, για παράδειγμα

$$f(x) = \sqrt{3x+1}.$$

Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει να είναι

$$3x+1 \geq 0 \Rightarrow D(f) = [-1/3, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι $f(-1/3) = 0$, και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > -1/3$ ώστε $\sqrt{3x+1} = y$. Πράγματι ``επιλύοντας'' την τελευταία εξίσωση, ισοδύναμα, παίρνουμε

$$3x+1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2/3 - 1/3 > -1/3, \qquad \text{άρα} \qquad R(f) = [0, +\infty).$$

Ορισμός (Μονοτονία)

Μια πραγματική συνάρτηση f η οποία διατηρεί ή αντιστρέφει τη διάταξη των πραγματικών αριθμών λέγεται **μονότονη**. Ειδικότερα η f λέγεται

1. **Αύξουσα** (increasing) αν $f(s) \leq f(t)$, οποτεδήποτε $s < t$, και αυστηρά ή γνησίως αύξουσα (strictly increasing) αν $f(s) < f(t)$.
2. **Φθίνουσα** (decreasing) αν $f(s) \geq f(t)$, οποτεδήποτε $s < t$ και αυστηρά ή γνησίως φθίνουσα (strictly dencreasing)αν $f(s) > f(t)$.

Ορισμός

Μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ λέγεται

1. **΄Αρτια** (even) αν $f(-x) = f(x)$.
2. **Περιττή** (odd) αν $f(-x) = -f(x)$.

Ορισμός (Πράξεις συναρτήσεων)

Εάν f και g είναι πραγματικές συναρτήσεις, για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$, ορίζουμε το **άθροισμα** $f+g$, τη **διαφορά** $f-g$, το **γινόμενο** $f \cdot g$, και το **πηλίκο** f/g, των f και g, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, για $g(x) \neq 0$.

Οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων όπως και η σύνθεση επιτρέπουν τη δημιουργία νέων συναρτήσεων από τις σχετικά απλές υπάρχουσες συναρτήσεις. Επιπλέον οι αντίστροφες συναρτήσεις, γνωστών συναρτήσεων, εφόσον αυτές υπάρχουν, εμπλουτίζουν τη συλλογή των πραγματικών συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν και εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές.

Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ως γράφημα της f ορίσαμε το σύνολο $G(f) = \{(x,y) : y = f(x)\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Η αποτύπωση του γραφήματος μιας συνάρτησης στο επίπεδο, δηλαδή η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης παρέχει συνήθως ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό της πληροφορίας που θα θέλαμε να έχουμε για τη συνάρτηση. Άρα η όσο το δυνατό πιστή αποτύπωση του γραφήματος της συνάρτησης είναι ένας από τους στόχους μας. Προκειμένου να πετύχουμε αυτό το στόχο πρέπει να αναπτύξουμε την κατάλληλη ``τεχνολογία''. Η τεχνολογία αυτή αναπτύσσεται σταδιακά. Επιπλέον ο αυστηρός ορισμός κάποιων συναρτήσεων όπως είναι οι τριγωνομετρικές, η εκθετική, ο λογάριθμος και άλλες μπορεί να δοθεί αφότου έχουμε αναπτύξει την ανάλογη θεωρία. Εκμεταλευόμενοι όμως τη σχετική γνώση που έχουμε από το Λύκειο, θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τη συμπεριφορά, τις ιδιότητες και τη γραφική παράσταση πολλών από τις συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (x,y) του επιπέδου με $y = f(x)$. Έτσι αποτυπώνοντας πολλά (πόσα;) σημεία $(x, f(x))$ στο καρτεσιανό επίπεδο μπορούμε να καταλάβουμμε-εικάσουμε τη μορφή της γραφικής παράστασης.

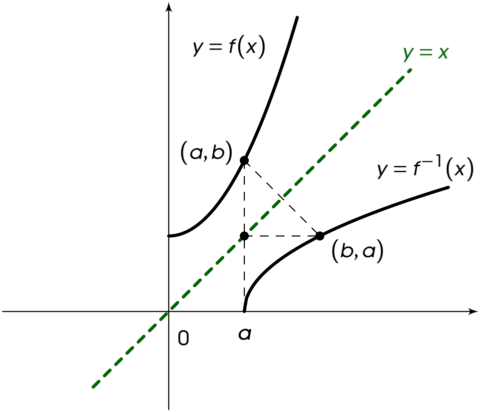
Αν η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f υπάρχει, ορίζεται με τη σχέση

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Έτσι αν $G(f)$ και $G(f^{-1})$ είναι αντίστοιχα τα γραφήματα των f και f^{-1}, τότε

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \qquad \text{και} \qquad G(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D(f)\}$$

όπου $D(f)$ είναι το πεδίο ορισμού της f.

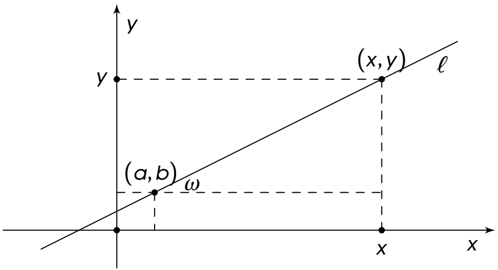


Τα σημεία (a,b) και (b,a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$ (γιατί;), οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$.

Θεώρημα

Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ένα προς ένα και έστω f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f, τότε

1. *Το γράφημα $G(f^{-1})$ της f^{-1} είναι συμμετρικό του γραφήματος $G(f)$ της f ως προς την ευθεία $y=x$.*
2. *Αν η f είναι αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα, τότε και η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία, είναι δηλαδή, αντίστοιχα, αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα.*
3. *Αν η f είναι περιττή, τότε και η f^{-1} είναι περιττή.*
4. $(f^{-1})^{-1}=f$.



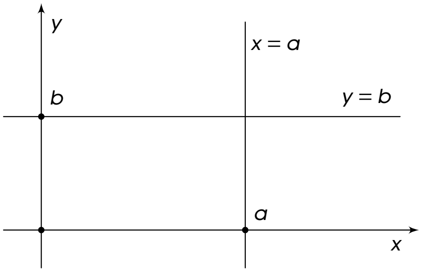
Αν ℓ είναι μια ευθεία στο επίπεδο, η οποία δεν είναι παράλληλη στον y-άξονα, περιέχει το σημείο (a,b) και σχηματίζει γωνία ω με τον x-άξονα και αν (x,y) είναι ένα σημείο της ευθείας, τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\tan\omega = \frac{y-b}{x-a}$$

οπότε αν ορίσουμε τη **κλίση** της ευθείας ℓ να είναι $m = \tan\omega$ τότε η σχέση

$$y - b = m(x-a) \tag{3}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση m και περιέχει το σημείο (a,b).



Αν $m = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $y = b$ που είναι η ευθεία παράλληλη στον x-άξονα που περιέχει το σημείο $(0, b)$. Όμοια η $x = a$ παριστάνει την ευθεία που είναι κάθετη στον x-άξονα στο σημείο $(a, 0)$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή είναι $\omega = \pi/2$. Η εξίσωση της ευθείας που περιέχει τα σημεία (a, b) και (a', b') είναι

$$y - b = \frac{b - b'}{a - a'}(x - a)$$

(γιατί;).

Γράφοντας την εξίσωση (;;) σαν

$$y = mx + (b - am) = mx + c,$$

όπου $c = b - am$, βλέπουμε ότι για $x = 0$ είναι $y = c$, κατά συνέπεια η

$$y = mx + c, \tag{4}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας με κλίση m η οποία τέμνει τον y-άξονα στο $(0, c)$.

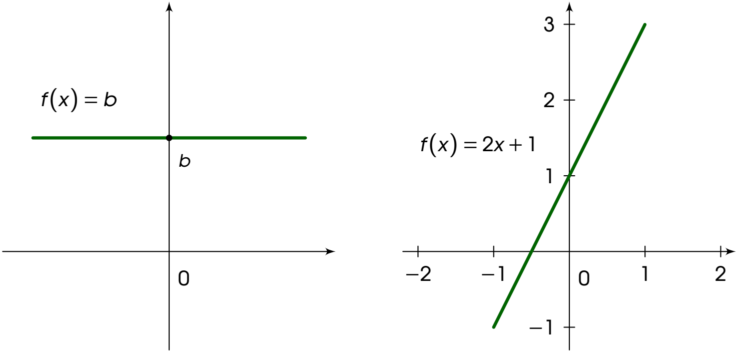
Γενικά κάθε εξίσωση

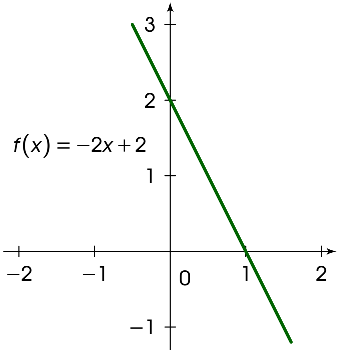
$$ax + by + c = 0,$$

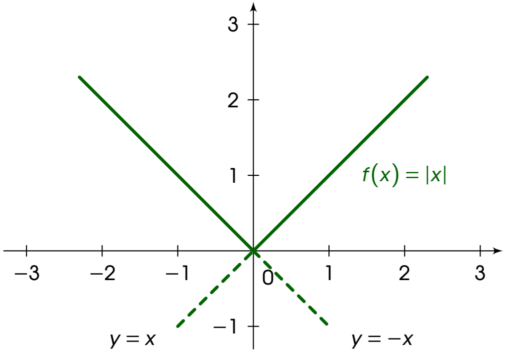
με a, b και c πραγματικούς αριθμούς, παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο.

$$f(x) = ax + b, \qquad \text{με } a, b \in \mathbb{R}.$$

Μια τέτοια συνάρτηση ορίζεται σ΄ ολόκληρο και $\mathbb{R}$ και είναι ένα-προς-ένα, αν $a \neq 0$, αύξουσα αν $a > 0$ και φθίνουσα αν $a < 0$. Το γράφημα κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι ευθεία. ΄Εχουμε $f(0) = b$, άρα ένα σημείο της ευθείας είναι το $(0, b)$, ενώ για $x = -b/a$, εφόσον $a \neq 0$, είναι $f(-b/a) = 0$, έτσι ένα άλλο σημείο είναι το $(-b/a, 0)$.





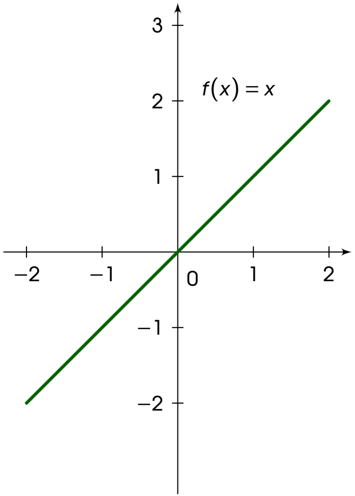


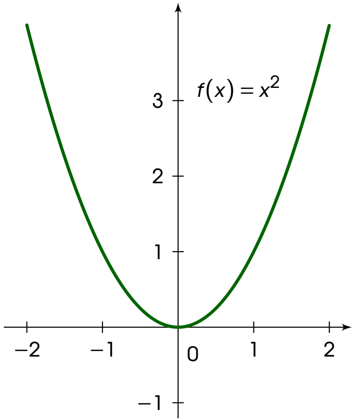
Παράδειγμα

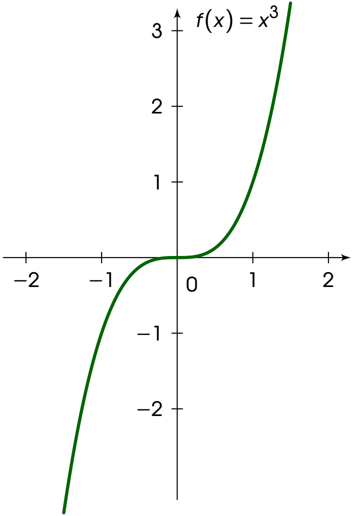
Για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχουμε ότι $f(x) = x$ αν $x \geq 0$, και $f(x) = -x$ αν $x \leq 0$. Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση δεν είναι γραμμική αφού δεν είναι της μορφής $ax+b$. Σημειώνουμε ότι είναι άρτια ($|-x| = |x|$), γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

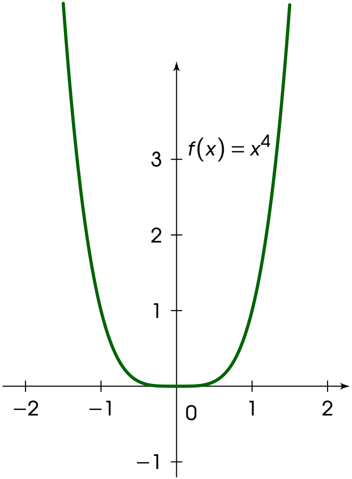
Αυτές είναι οι $f(x) = x^p$, με $p \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α′) $p = n$, με $\in \mathbb{N}$. $f(x) = x^n$ και $D(f) = \mathbb{R}$.
Η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός. Αν $n = 1$ η συνάρτηση είναι γραμμική.

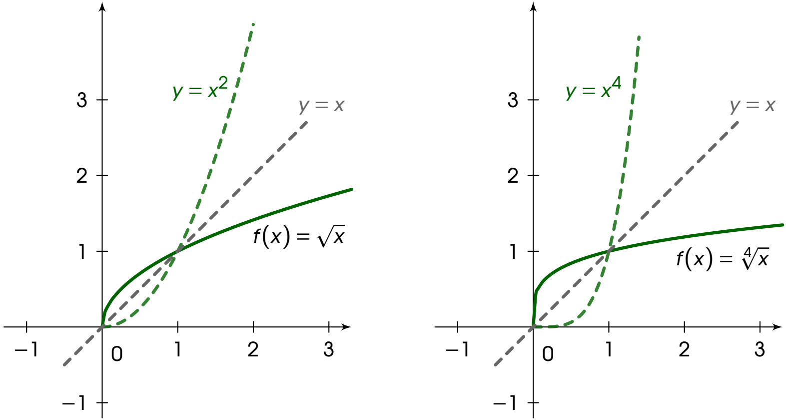


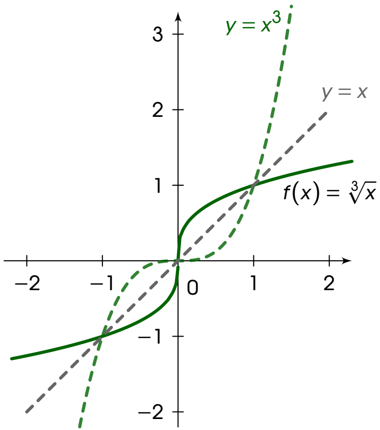



$f(x) = x^3$
3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2


$f(x) = x^4$
3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1

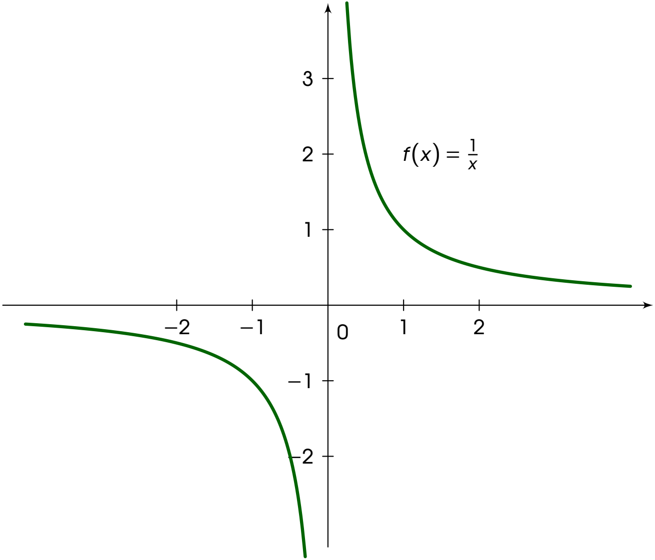
(β) $p = 1/n$, με $n \in \mathbb{N}$.
Αν $y = g(x) = x^n$, τότε η $f(x) = x^{1/n}$ είναι η αντίστροφη της $g(x)$ εκεί που η g είναι ένα-προς-ένα και η $f(x) = x^{1/n}$ ορίζεται. Έτσι η συμπεριφορά της $x^{1/n}$ καθορίζεται από αυτή της x^n. Στο Σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, και $f(x) = \sqrt[4]{x}$, με $x \geq 0$, σαν αντίστροφες, αντίστοιχα, των $y = x^2$, με $x \geq 0$, και $y = x^4$, με $x \geq 0$.

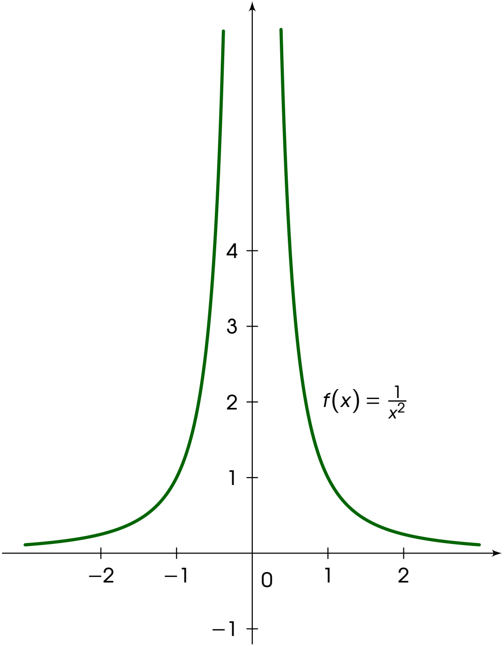




Στο Σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x}$ σαν αντίστροφη της $y = x^3$ με $x \in \mathbb{R}$.

- $p = -n$, με $n \in \mathbb{N}$. $f(x) = 1/x^n$ και $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός.





$f(x) = \frac{1}{x^2}$
4
3
2
1
−1
−2
−1
0
1
2

- (δ) $p = m/n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$.
  Αν $f(x) = x^{m/n}$ με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, οπότε $f = g \circ h$, όπου $h(x) = x^{1/n}$ και $g(x) = x^m$. Έτσι

$$\begin{aligned}
D(f) &= (-\infty, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ περιττός}\\
D(f) &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ περιττός}\\
D(f) &= [0, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ άρτιος}\\
D(f) &= (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ άρτιος.}
\end{aligned}$$

- (ε) $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  Εδώ χρειάζεται να ορίσουμε τις μη ρητές δυνάμεις. Για παράδειγμα τι σημαίνει $3^{\sqrt{2}}$ και για ποιά x έχει έννοια η έκφραση $x^{\sqrt{2}}$;

- Σε σχέση με το πρώτο ερώτημα

Ο $\sqrt{2}$ είναι όριο ακολουθίας ρητών αριθμών, έστω (r_n) και ο 3^{r_n} ορίζεται για κάθε n, άρα φαίνεται λογικό να ορίσουμε

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}$$

αρκεί το όριο στο δεξί μέλος να υπάρχει, αφενός, και αφετέρου να είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας (r_n) αφού υπάρχουν περισσότερες της μιας ακολουθίες ρητών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$. Θα δείξουμε ότι αυτό όντως ισχύει.

- Σε σχέση με το δεύτερο ερώτημα

Για να έχει έννοια το $x^{\sqrt{2}}$, θα πρέπει το x^r να ορίζεται για κάθε ρητό αριθμό r, κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $x \geq 0$, βλέπε (δ).

Θεώρημα

Έστω $a>0$ και έστω $p\in\mathbb{R}$. Αν (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών και

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p,$$

τότε η ακολουθία (a^{p_n}) συγκλίνει και το όριό της είναι ανεξάρτητο της (p_n).

Ορισμός

Αν $a>0$ και $p\in\mathbb{R}$ ορίζουμε

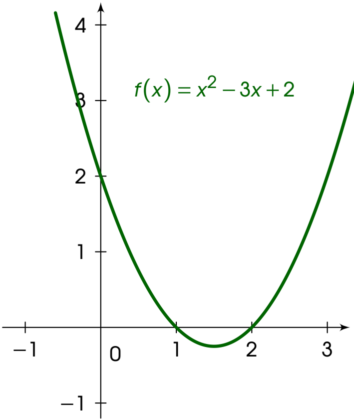
$$a^p = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}$$

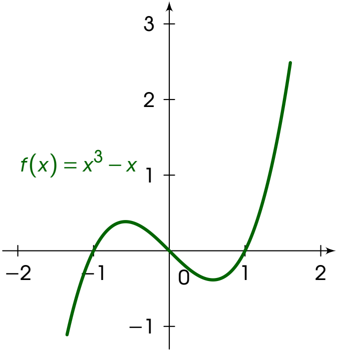
όπου (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών με $p_n \to p$.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x)=x^p$ με $p\notin\mathbb{Q}$ έχουμε ότι

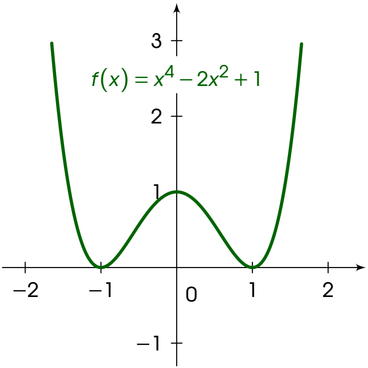
$$\begin{aligned} D(f) &= [0,+\infty), && \text{αν } p>0 \\ D(f) &= (0,+\infty), && \text{αν } p<0. \end{aligned}$$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. $D(f) = \mathbb{R}$.
Για $n = 1$ η πολυωνυμική συνάρτηση είναι γραμμική. Οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x-άξονα.





Σχήμα: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ και $f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$



Σχήμα: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$

Μετατόπιση

Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ είναι το τυπικό δείγμα του σχήματος που λέγεται **παραβολή**. Για $a \neq 0$ η $y = ax^2$ είναι επίσης παραβολή, η οποία εκτείνεται στο άνω ημιεπίπεδο αν $a > 0$ και στο κάτω ημιεπίπεδο αν $a > 0$.

• Η $y = ax^2 + b$ είναι παραβολή με γραφική παράσταση ίδια με αυτήν της $y = ax^2$ αλλά κατακόρυφα μετατοπισμένη κατά b. $(0,0) \to (0,b)$.

• Η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $y = ax^2$ μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά b και οριζόντια κατά c. $(0,0) \to (c,b)$. Ισοδύναμα η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $Y = aX^2$ στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X = c$ και $Y = b$. Έτσι η $f(x) = x^2 - 4x + 3$, αφού

$$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

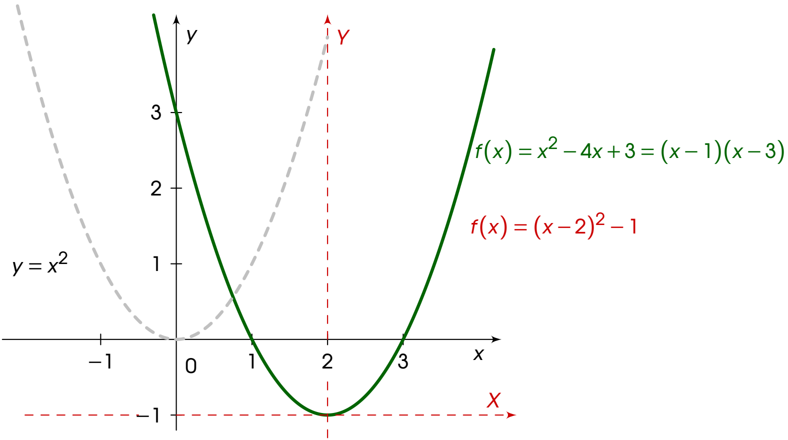
γράφεται

$$y + 1 = (x-2)^2$$

είναι δηλαδή η τυπική παραβολή $Y = X^2$, με $Y = y + 1$ και $X = x - 2$. Έτσι το $(0,0)$ στους X, Y-άξονες είναι το $(2,-1)$ στους x, y-άξονες.

Μετατόπιση (συνέχεια) ($Y = X^2$, με $Y = y + 1$ και $X = x - 2$)

$(0,0)$ στους X, Y-άξονες $\leftrightarrow$ $(2,-1)$ στους x, y-άξονες



Σχήμα: Η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$

Γενικεύοντας:

Παρατήρηση (γενική)

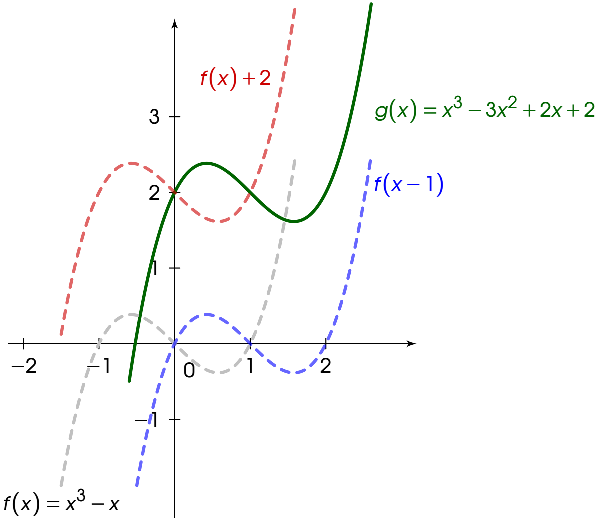
Αν $y = f(x)$, η πράξη $y = f(x-c)$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράσταση της $f(x)$ κατά c προς τα δεξιά αν $c > 0$ ή προς τα αριστερά αν $c < 0$. Η πράξη $y = f(x) + b$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράσταση της $f(x)$ κατά b προς τα πάνω αν $b > 0$ ή προς τα κάτω αν $b < 0$. Η δε $y = f(x-c) + b$ είναι συνδυασμός μεταφοράς κατά μήκος του x-άξονα και του y-άξονα.

Παράδειγμα

Η γραφική παράσταση της $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ προκύπτει εύκολα από αυτήν της $f(x) = x^3 - x$, αφού

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ &= (x-1)^3 - (x-1) + 2 \\ &= f(x-1) + 2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια) $g(x) = f(x-1) + 2$



Σχήμα: $g(x) = f(x-1) + 2$

$f(x) = p(x)/q(x)$ όπου οι p και q είναι πολυώνυμα. $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{x : q(x) = 0\}$.
Εν γένει οι ρητές συναρτήσεις έχουν ασύμπτωτες ευθείες.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{\pm 1\}$. Για $x \approx \pm 1$, οι αντίστοιχες τιμές $|f(x)|$ αυξάνονται απεριόριστα.

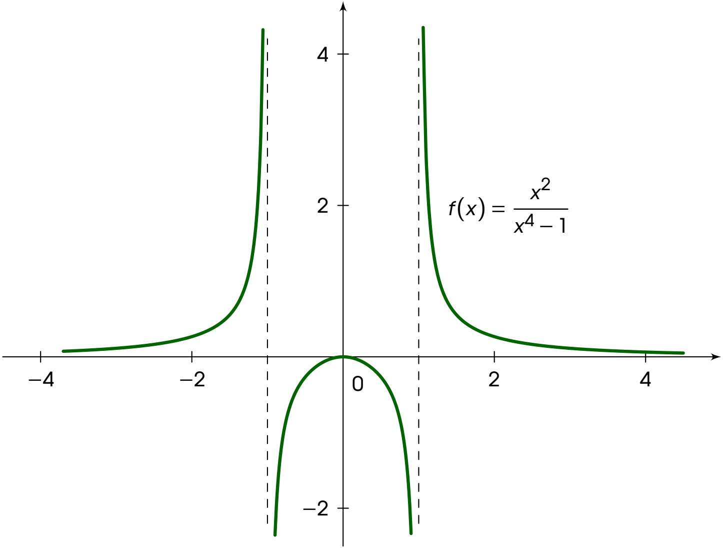
$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 - 1}$$

έτσι η $f(x)$ προσεγγίζει το μηδέν καθώς το $|x|$ αυξάνει. Η f μηδενίζεται μόνο στο $x = 0$ και αφού

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

είναι $f(x) > 0$ αν $|x| > 1$ και $f(x) < 0$ αν $|x| < 1$.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Αυτές είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

όπου $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ είναι πολυώνυμα. Οι ρητές συναρτήσεις είναι αλγεβρικές αφού είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής $q(x)y - p(x) = 0$ όπου p και q είναι πολυώνυμα. Έτσι οι

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x}} \qquad f(x) = x + 3\sqrt{x^2+2x+2}$$

είναι αλγεβρικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα η τελευταία είναι λύση της εξίσωσης $y^2 - 2xy - 8x^2 - 18x - 18 = 0$. Οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad f(x) = 3^x \qquad f(x) = x^x$$

δεν είναι αλγεβρικές συναρτήσεις (γιατί;).

Αυτές είναι οι συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές. Υπερβατικές (transcende συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι εκθετικές $f(x) = a^x$, όπου a είναι θετικός πραγματικός αριθμός, οι λογάριθμοι $f(x) = \log_a x$, όπου a είναι πάλι θετικός πραγματικός αριθμός, οι υπερβολικές και πολλές άλλες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = x^p$, με p άρρητο, $f(x) = x^x$, $f(x) = x^{1/x}$, ή οι ειδικές συναρτήσεις.

Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και αν ξεκινώντας από το σημείο $(1,0)$ του τριγωνομετρικού κύκλου διαγράψουμε τόξο μήκους $|x|$ κατά την θετική κατεύθυνση αν $x > 0$ και κατά την αρνητική αν $x < 0$ και εάν P είναι το πέρας αυτού του τόξου, τότε $\cos x =$ ``προβολή του $P$ στον οριζόντιο άξονα'' και $\sin x =$ ``προβολή του P στον κατακόρυφο άξονα''. Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad \cos(x+2k\pi) = \cos x, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin x, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ορισμός

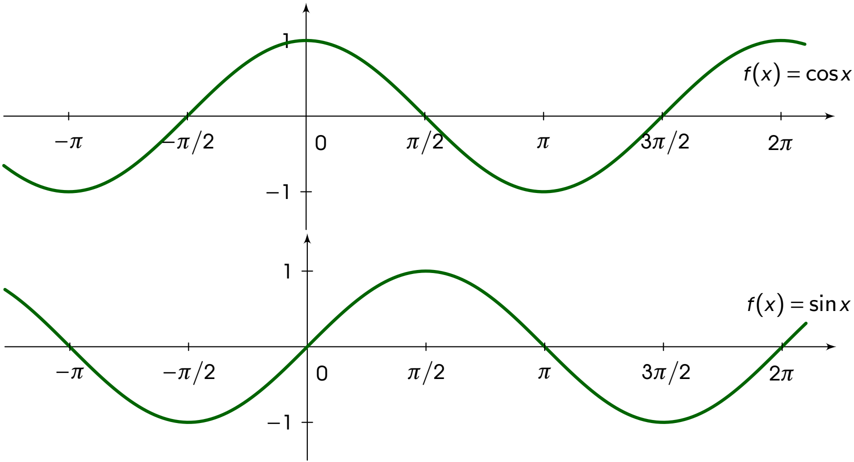
Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L έτσι ώστε

$$f(x+L) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός L για τον οποίο ισχύει η (;;) λέγεται **περίοδος** της f.

Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι **περιοδικές** συναρτήσεις με περίοδο 2π (το μήκος του μοναδιαίου κύκλου).

sin και **cos**.



Κάθε διάστημα μήκους 2π περιέχει το πλήρες προφίλ κάθε μιας από τις συναρτήσεις, μια ``θετική και μια αρνητική καμπούρα''. Η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση και η $\sin x$ είναι περιττή.

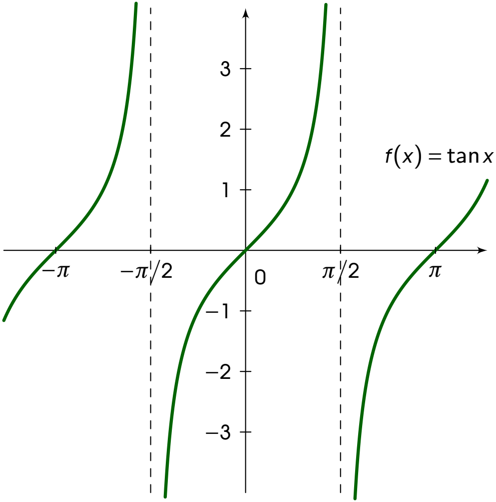
tan και **cot**. Για $x \neq k\pi + \pi/2$ έχουμε ότι $\tan(x+2\pi) = \tan x$, κατά συνέπεια η συνάρτηση tan είναι περιοδική. Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες υπολογίζουμε

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x,$$

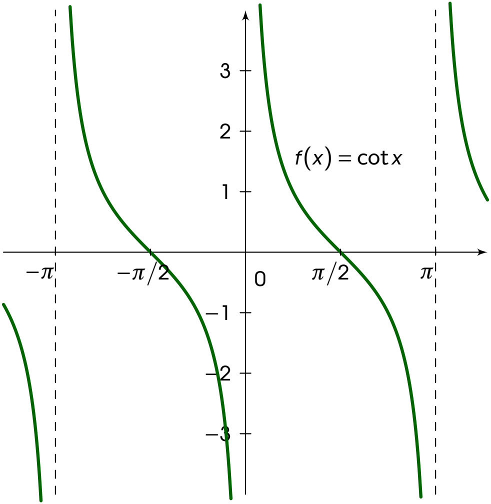
κατά συνέπεια η περίοδος δεν είναι 2π, αλλά πιθανόν π. Από την γεωμετρική υλοποίηση του αριθμού $\tan x$ παρατηρούμε ότι η $\tan x$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Έτσι σε διάστημα μήκους π, η $\tan x$ είναι ένα-προς-ένα, επομένως η περίοδος της συνάρτησης είναι π. Επίσης

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

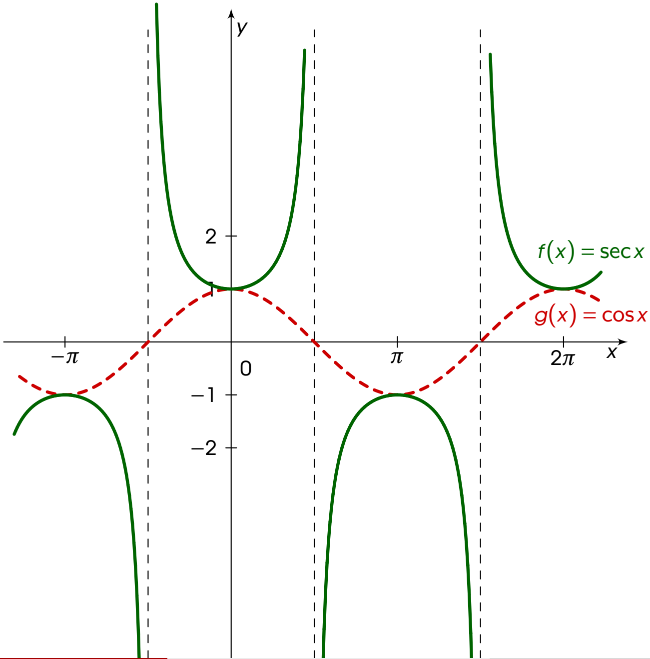
δηλαδή η tan είναι περιττή συνάρτηση. Όμοια η *cotx* είναι περιοδική με περίοδο π και είναι επίσης περιττή.



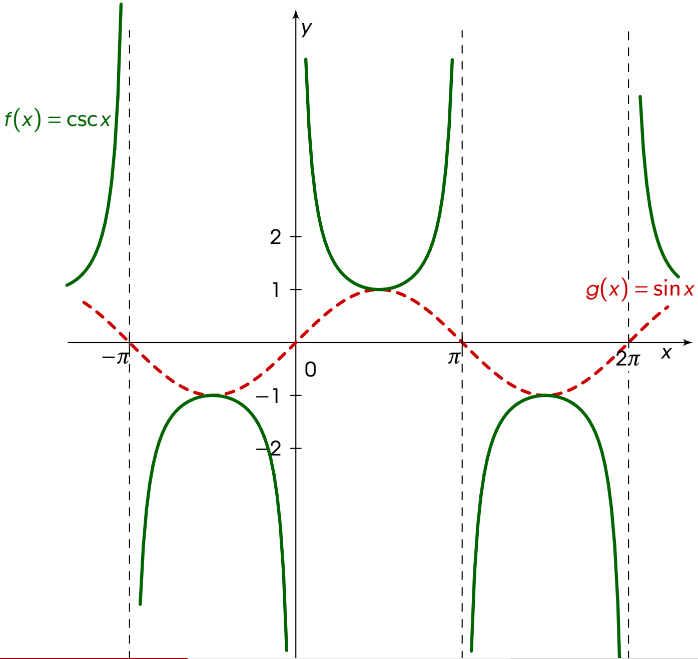
Σχήμα: $f(x) = \tan x$



Σχήμα: $f(x) = \cot x$



y
2
1
−1
−2
0
−π
π
2π
x
$f(x) = \sec x$
$g(x) = \cos x$



y
$f(x) = \csc x$
2
1
$g(x) = \sin x$
$-\pi$
π
2π
x
0
-1
-2

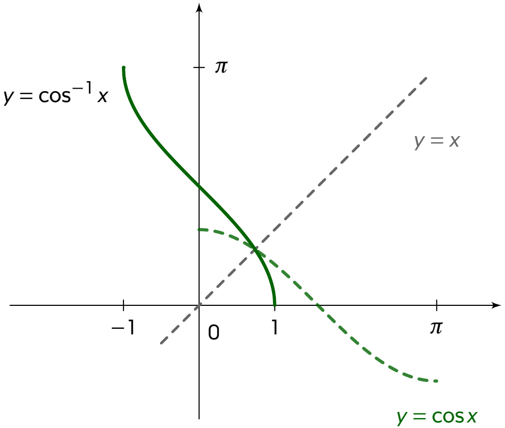
$\cos^{-1}$. Στο διάστημα $[0,\pi]$ η $y=\cos x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της $\cos^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και πεδίο τιμών το $[0,\pi]$ με τη σχέση

$$\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x, \qquad 0 \le y \le \pi. \tag{6}$$

Την $\cos^{-1}$ συμβολίζουμε και με arccos και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(\cos x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [0,\pi] \\ \cos(\cos^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1,1] \end{aligned}$$

Από τη συμμετρία των γραφημάτων των cos και $\cos^{-1}$ ως προς την ευθεία $y=x$, βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της $\cos^{-1}$.



Σχήμα: Η συνάρτηση $\cos^{-1}$

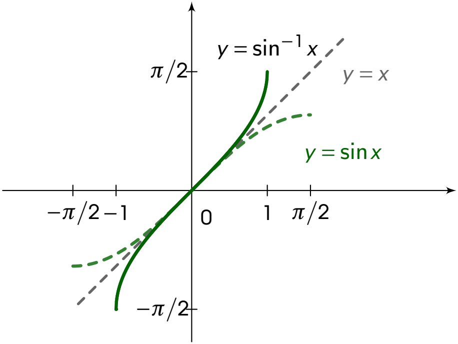
$\sin^{-1}$. Στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ η $y = \sin x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\sin^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[-\pi/2, \pi/2]$ με τη σχέση

$$\sin^{-1} x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Την $\sin^{-1}$ συμβολίζουμε και με arcsin και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(\sin x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(\sin^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\sin^{-1}$ προκύπτει σαν συμμετρική του γραφήματος της sin ως προς την ευθεία $y = x$



Σχήμα: Η συνάρτηση $\sin^{-1}$

$\tan^{-1}$. Στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ η $y = \tan x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\tan^{-1}$, ή arctan με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\pi/2, \pi/2)$ με τη σχέση

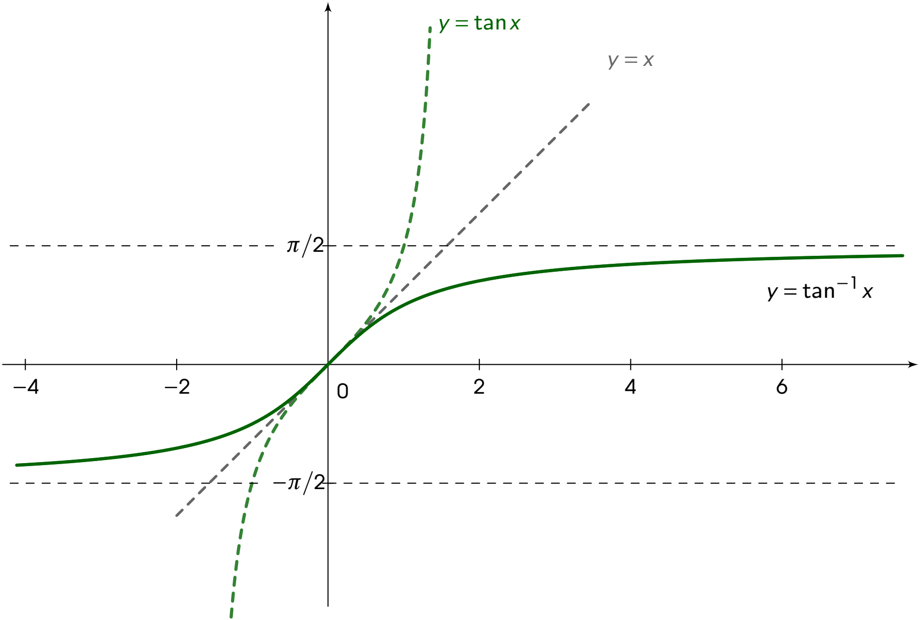
$$\tan^{-1} x = y \Leftrightarrow \tan y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(\tan x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan(\tan^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\tan^{-1}$ προκύπτει σαν συμμετρική του γραφήματος της tan ως προς την ευθεία $y = x$, βλέπε Σχήμα. Επειδή η συνάρτηση tan είναι περιττή, έπεται ότι και η $\tan^{-1}$ είναι περιττή (γιατί;), έτσι

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$


$y = \tan x$
$y = x$
$\pi/2$
$-\pi/2$
$y = \tan^{-1} x$
-4
-2
0
2
4
6

Οι **εκθετικές** (exponential) συναρτήσεις είναι της μορφής

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0 \text{ και } a \neq 1.$$

$D(f) = \mathbb{R}$ και $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

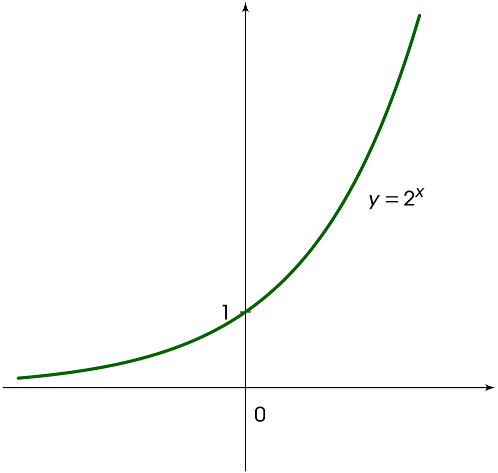
Αν $a > 0$ και $b > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 1$, τότε $a^b > 1$ αν $a > 1$, και $a^b < 1$ αν $0 < a < 1$.

Έστω $x_1 < x_2$

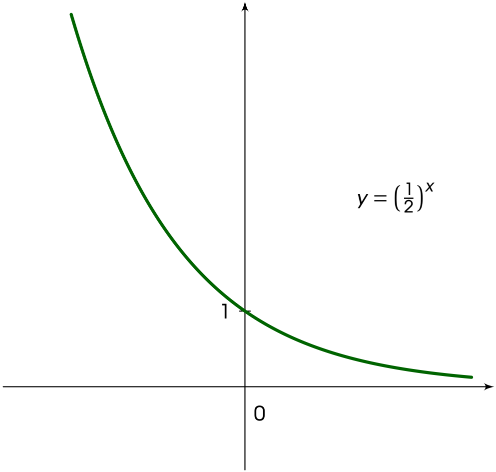
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

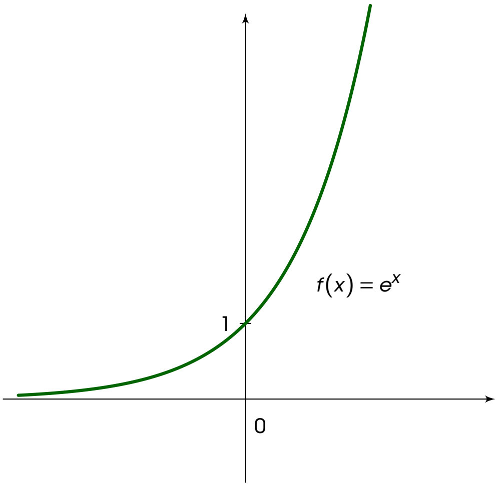
αν $a > 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} > 1$, οπότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα,
αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} < 1$, οπότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο Σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της a^x για $a = 2$.

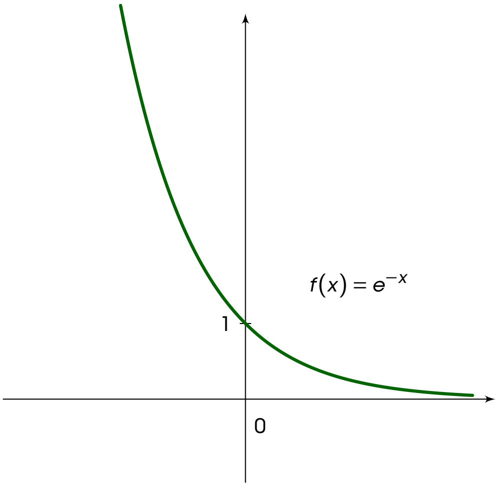


Στο Σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της a^x για $a = 1/2$.





Σχήμα: Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \exp x = e^x$



Σχήμα: Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \exp(-x) = e^{-x}$

Η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = e^x$ είναι αυστηρά αύξουσα, άρα ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

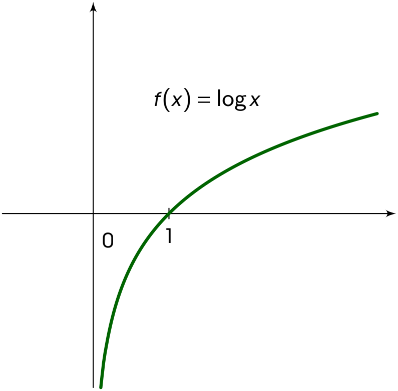
Ορισμός

Για $x > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση **λογάριθμο** $\log$ με τη σχέση

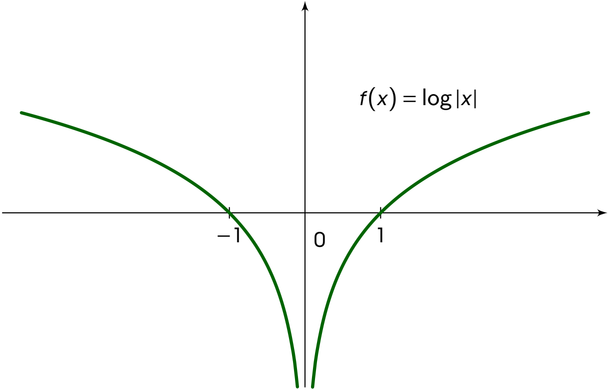
$$y = \log x \Leftrightarrow e^y = x, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Τη συνάρτηση $\log$ τη λέμε και φυσικό λογάριθμο και τη συμβολίζουμε και με $\ln x$.

Έτσι $\log = \exp^{-1}$. Η $f(x) = \log x$ είναι αυστηρά αύξουσα.



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log|x|$

Γενικότερα για $a > 0$, $a \neq 1$ συμβολίζουμε την αντίστροφη της $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $\log_a x$, έτσι ώστε

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

και τη λέμε συνάρτηση **λογάριθμο με βάση** a. Έτσι έχουμε

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{και} \qquad a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a x^r = r \log_a x$, $r \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a (xy^{-1}) = \log_a x + \log_a (y^{-1}) = \log_a x - \log_a y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\log x = \log a^{\log_a x} = (\log_a x)(\log a),$$

κατά συνέπεια

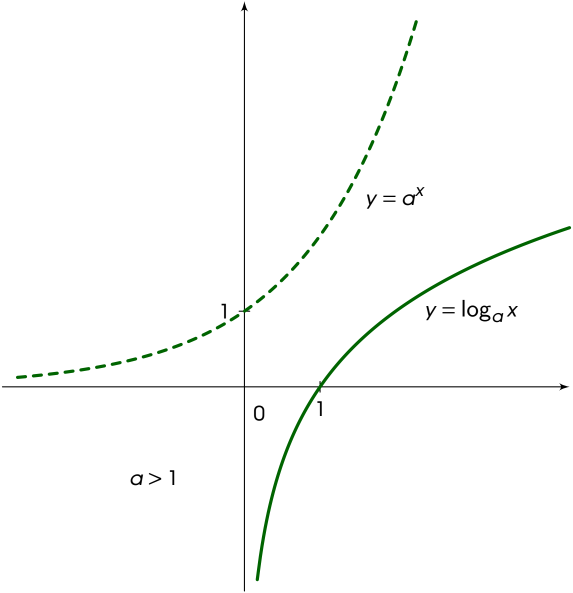
$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x \tag{10}$$

δηλαδή κάθε λογαριθμική συνάρτηση εκφράζεται σαν πολλαπλάσιο του φυσικού λογαρίθμου. ΄Ομοια

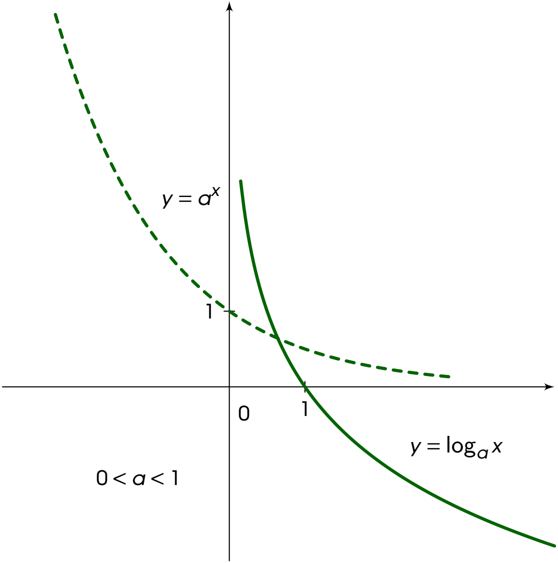
$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a} = \left(e^x\right)^{\log a} \tag{11}$$

δηλαδή κάθε εκθετική συνάρτηση εκφράζεται σαν δύναμη της συνάρτησης exp, ή σαν σύνθεση της εκθετικής συνάρτησης exp με μια γραμμική συνάρτηση

$$a^x = \exp(l_a(x)), \qquad \text{όπου } l_a(x) = x \log a. \tag{12}$$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 1$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $0 < a < 1$