# Ίσες Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις $f, g$ ταυτίζονται σε μία γειτονιά του $x_0$ (εκτός ενδεχομένως του σημείου $x_0$) τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

## Απόδειξη

Έστω σύνολο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, b)$ ένα σύνολο όπου $f(x) = g(x)$. Έστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Θδο και $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Έστω λοιπόν, $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ για το οποίο θα ικανοποιείται ο ορισμός της $g(x)$.

Από τον ορισμό του ορίου της $f(x)$ γνωρίζουμε ότι $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. όταν $0 < |x - x_0| < \delta$, να έχουμε $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε $\delta'$ καινούργιο:

$\delta' = \min\{\delta, x_0 - \alpha, b - x_0\}$ εξασφαλίζοντας

$$(x - \delta', x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta') \subseteq (\alpha, x_0) \cup (x_0, b)$$

Έστω $x$ με $0<|x-x_0|<\delta'$

**1ον** : Επειδή $\delta' \le \delta$, έχουμε $|f(x)-L|<\varepsilon$

**2ον** : Επειδή $x \in (\alpha, x_0)\cup(x_0, b)$ θα έχουμε $g(x)=f(x)$.

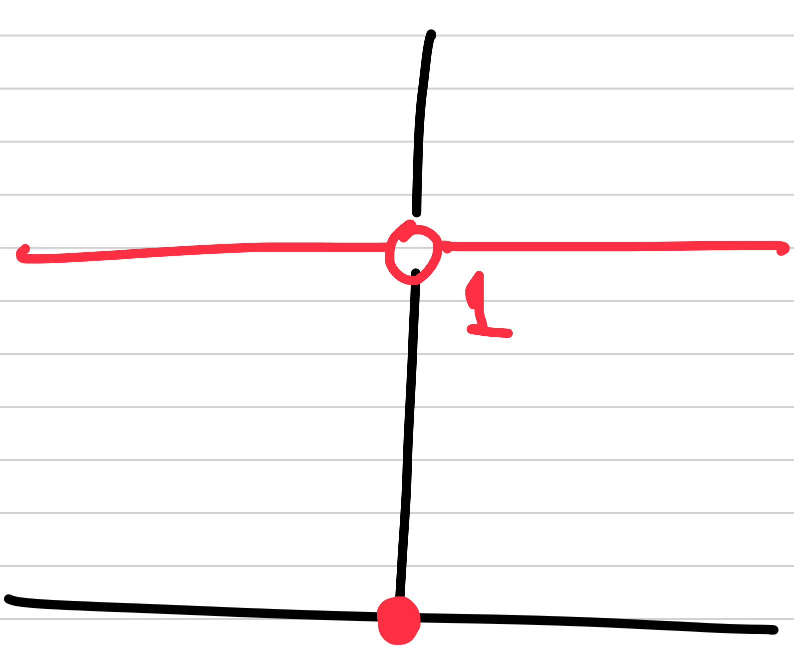
**Λόγω** 1ου κ 2ου προκύπτει $|g(x)-L|<\varepsilon$. ∎

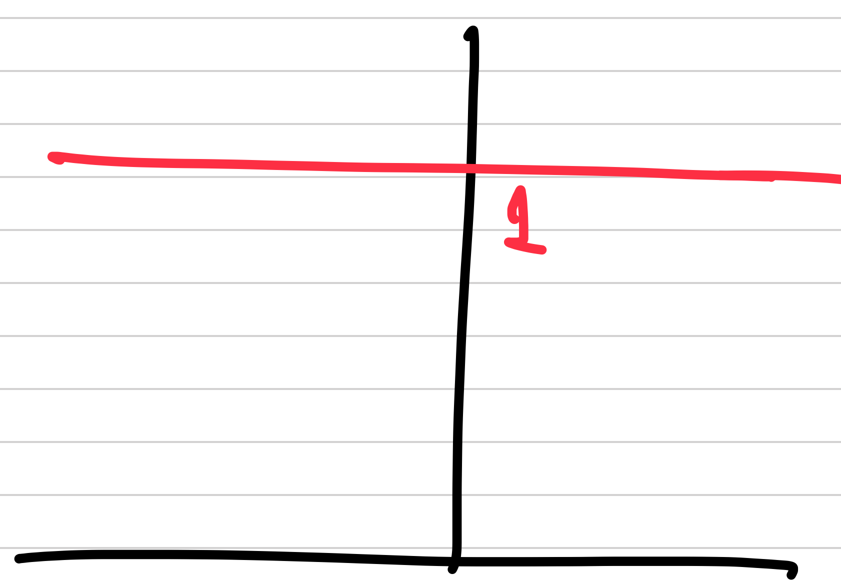
**Παράδειγμα**

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ και την συνάρτηση

$f(x)=1$.

$g(x)=1,\ x\neq 0,\ g(0)=0$ $\qquad$ $f(x)=1$



## Κριτήριο Παρεμβολής:

Έστω $f, g, h$ συναρτήσεις τ.ω

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow f(x)\le g(x)\le h(x)$$

για κάποιο $\delta>0$. Έστω επίσης πως

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$ Τότε και

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

## Παράδειγμα: (Όριο του $\frac{\sin x}{x} \to 0$)

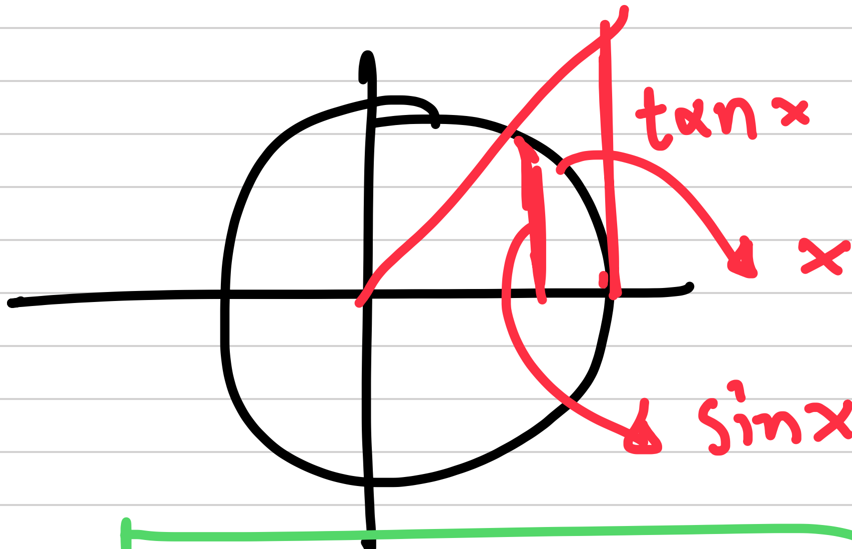
Από (A): $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

Συνεπώς από κρ. παρεμβολής

$$\left.\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right\} \text{για } x>0$$

Ομοίως από B για $x<0$.




## Από Γεωμετρία

$$\sin x < x < \tan x$$

$\boxed{\text{για } \quad \underline{x > 0}}$

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \qquad \xrightarrow{\cdot \sin x}$$

$$\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.} \qquad A$$

$\boxed{\text{για } \quad x < 0}$

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{-\sin x}{-x} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad B$$

# Μη ύπαρξη Ορίου:

Μια $f$ δεν έχει όριο στο $x_0$ το $L$ αν $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall\, \delta > 0$ να $\exists$ $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ για το οποίο: $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

Παράδειγμα: Όριο $\sin\frac{1}{x} \to 0$.

■ Δείξτε ότι η $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω πως έχει όριο το $L$. Δηλ. έστω $L \geq 0$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βλέπουμε ότι αν υπάρχει το όριο τότε θα υπάρχει ένα $\delta$ τ.ω.: $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon = 1/2$ (A)

Έστω $\delta > 0$. Μπορούμε έναν φυσικό αριθμό $k$ αρκετά μεγάλο ώστε $x = \frac{1}{2k\pi - \pi/2} \in (0, \delta)$

Για το επιλεγμένο $x$ το:

$$\sin\frac{1}{x} = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

που έχει απόσταση από το $L$ σίγουρα μεγαλύτερη από $\varepsilon = 1/2$ αφού $L \geq 0$.

Επομένως είναι αδύνατο να ισχύει η (A)

Επομένως από πρόταση μη ύπαρξης ορίου δεν υπάρχει.

Η περίπτωση $L<0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα ■

Παράδειγμα: Όριο στο άπειρο μιας ρητής συνάρτησης:

Να δείξετε: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+4} = 2$.

Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $X$ ώστε αν $x > X$, να έχουμε $f(x) - 2 < \varepsilon$

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μια συνθήκη της μορφής $x > X$.

<u>Δδς</u>: $|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+4} - 2\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}-8}{x+4}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{|x+4|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x+4| > \frac{7}{\varepsilon} \Leftarrow$

$x > \frac{7}{\varepsilon}$.

Θέτοντας $X = \frac{7}{\varepsilon}$ έχουμε:

$x > X \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ ∎.

- - - - - -

$\frac{2x+1}{x+4} \simeq \frac{2x}{x} = 2$.

Παράδειγμα: ΝΔΟ: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Βάση του ορισμού:

$|f(x) - 0| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \iff$

$|x|^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} \Leftarrow$

$\Leftarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon^{1/n}}$

Θέτοντας: $X = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}}$ έχω:

$x > X \implies |f(x) - 0| < \varepsilon$. ∎

**Παράδειγμα** : ΝΔΟ: $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^2} = \infty$

με τη χρήση του ορισμού:

Έστω $M$. Αν $M<0$ τότε δεδομένου ότι η συνάρτηση είναι θετική μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta$ και θα ισχύει η συνεπαγωγή.

Έστω $M$. Αν $M>0$ τότε:

$$f(x) > M \Leftarrow \frac{1}{(x-x_0)^2} > M \Leftarrow$$

$$(x-x_0)^2 < \frac{1}{M} \Leftarrow |x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Leftarrow$$

$$0 < |x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Θέτοντας $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ προκύπτει:

$$0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$\blacksquare$

Παράδειγμα: ΝΔο: $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0.$

$0 \le \cos^2 x \le 1 \Longrightarrow 0 \le \frac{\cos^2 x}{x} \le \frac{1}{x}$

Κάνοντας χρήση Κρ. Παρεμβολής:

Επειδή ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0.}$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x}{x} = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x}{x} = -\infty$

Παραδείγματα για Ακολουθίες:

ΝΔο $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Έστω $\epsilon > 0$.

$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon^2$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$

Θέτοντας $N_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor + 1$ όπου $\lfloor\ \rfloor$ συμβολίζουμε μόνο το ακέραιο μέρος του $x$, δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του $x$.

$$n > N_0 \Rightarrow n > \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow$$

λόγω ~~[illegible]~~

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Άρα ο ορισμός ισχύει ■.

ΝΔΟ: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$.

Πράγματι: $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Με κρ. παρεμβολής ισχύει ■