Ανασκόπηση Συναρτήσεων.

Ορισμοί

Συνάρτηση f είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή x ενός συνόλου D μία μοναδική τιμή που συμβολίζεται με $f(x)$.

D : Πεδίο ορισμού

A_D : Σύνολο Τιμών : Σύνολο των τιμών της $f(x)$ που παράγονται όταν τ… x μεταβάλλεται σε όλο Π.Ο τα…

Ανεξάρτητη Μεταβλητή → που σχετίζεται με το D.

Εξαρτημένη μεταβλητή → $\in A_f$.

Γραφική Παράσταση f είναι το σύνολο στο επίπεδ… όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου xy που ικανοποιεί την εξίσωση $y=f($…

Όρισμα → Είναι η έκφραση στην οποία η συνάρτηση είναι λειτουργική

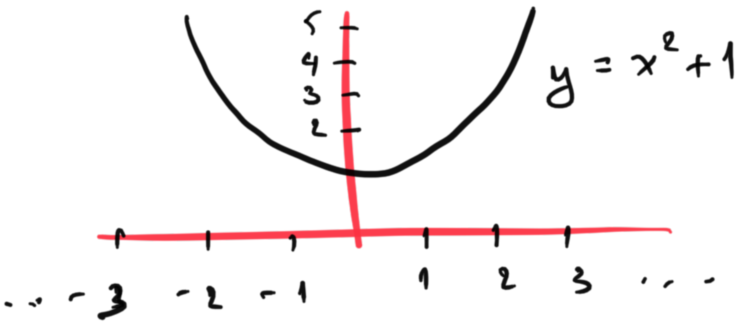
πχ: x → είναι όρισμα $f(x)$

2 → —״— $f(2)$

$x^2+4 \longrightarrow$ — " — $f(x^2+4)$

Παράδειγμα :

α. $y = f(x) = x^2+1$ $[-3,3] \times [-1,5]$



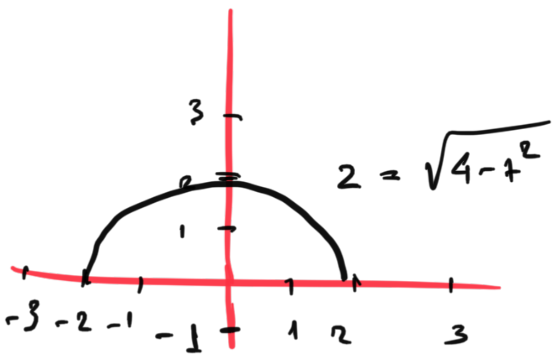
$D = \mathbb{R}$.

$A_D = [1, \infty)$

$x^2 \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow x^2+1 \geq 1$

Άρα $A_D = [1, \infty)$.

β. $z = g(t) = \sqrt{4-t^2}$ $[-3,3] \times [-1,3]$



$D = [-2, 2]$

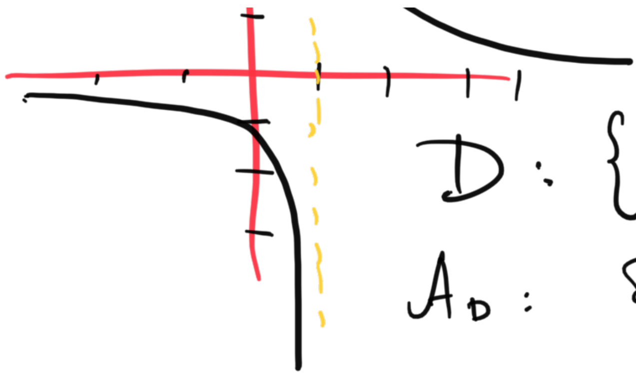
$A_D = [0, 2]$

$4-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$

γ. $w = h(u) = \dfrac{1}{u-1}$ $[-3,5] \times [-3,3]$

$w = \dfrac{1}{u-1}$ η h ορίζεται



για $u \neq 1$.

$D: \{u : u \neq 1\} : \mathbb{R} - \{1\}$

$A_D: \mathbb{R}^*$

Παράδειγμα:

Την $t=0$, μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα από το έδαφος προς τα πάνω με ταχύτητα $30\,m/s$. Ύψος της σε (m): $h = f(t) = 30t - 5t^2$

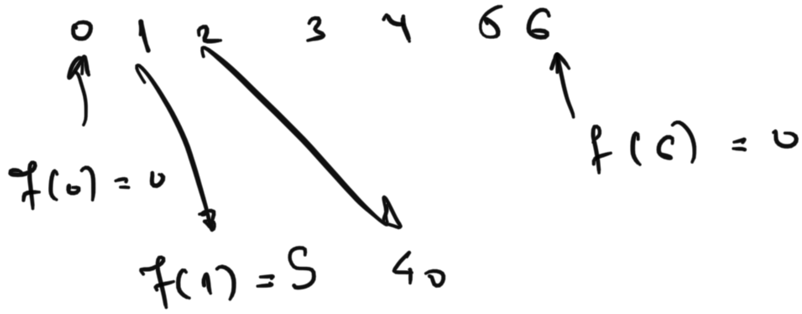
$h = f(t) = 0 \Leftrightarrow 30t - 5t^2 = 0$

$\Leftrightarrow 6t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t(6-t)$

$\Leftrightarrow \underline{t=0}$ ή $\underline{t=6}$.

$D = \{t : 0 \le t \le 6\}$.

Για A_D πρέπει να βρω όλες τις τιμές του $h = f(t) = 30t - 5t^2$ όταν το t κινείται σε $[0, 6]$. $f(t) = 180 - 5 \cdot 36 = 0$.



Σύνθετης Συνάρτησης: $f(g(x))$

Παράδειγμα:

$f(x) = 3x^2 - x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f\circ g = f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{3-x}{x^2}$$

Παράδειγμα:

Πιθανές εσωτερικές κ' εξωτερικές συναρτήσεις:

$h(x) = \sqrt{9x-x^2}$

εσωτερική: $g(x) = 9x-$

εξωτερική: $f(x) = \sqrt{x}$

$$h_1(x) = f\circ g \longrightarrow D_{f\circ g} = 9x - x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x(9-x) \geq 0$$

x		0		9	
	$-$		$+$		$+$

$D = [0, 9]$.

$9-x$	$+$	$+$	0	$-$

$$h_2(x) = \frac{2}{(x^2-1)^3}$$

$\longrightarrow$ εg: $g(x) = x^2 -$

$\searrow$ εf: $f(x) = \frac{2}{x^3}$

$f(g(x)) = h_2$

D_{h_2} $\quad x^2 - 1 \neq 0 \iff \{x \neq \pm 1\}$

Άσκηση

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ κ' $\quad g(x) = x^2 - x - 6$

$$g \circ f = (\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} - 6 = x^{2/3} - x^{1/3} - 6$$

$D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. $\quad D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$.

Άσκηση

α) $f \circ g(0)$, β) $g(f(-1))$, γ) $= f(g(g(\cdot$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	4	2
$g(x)$	-1	0	-2	-3	-4

$g(0) = -2$. $\quad f(-2) = 0$

α) $f \circ g(0) = 0$.

β) $f(-1) = 1$, $g(1) = -3$.

$g(f(-1)) = -3$.

γ) $f(g(\underbrace{g(-1)}_{0})) = f(\underbrace{g(0)}_{-2}) = f(-2) = 0$

- - - - - - -

Σχήμα 1.10

$$m_{sec} = \frac{\text{αλλαγή στο } y}{\text{αλλαγή στο } x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} =$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \left(\begin{array}{c} \text{όριο} \\ \text{οριζμός} \end{array} \right)$$

πηλίκο διαφορών.

$P(a, f(a))$ και $Q(x, f(x))$

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x}$$

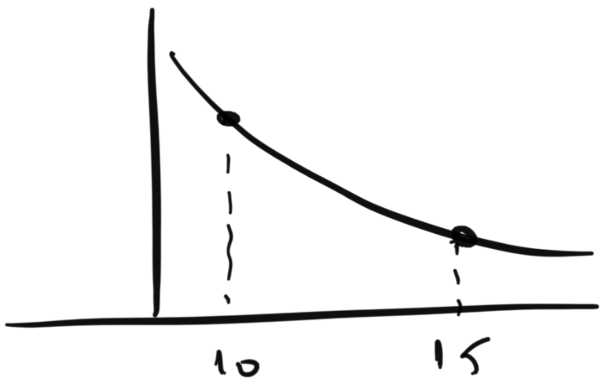
λ - α ,

Ασκηση ηχικων:

Η ένταση ήχου I μετρημένη W/m σε ένα σημείο r (m) από μια πηγή ήχου P με ακουστική ισχύ:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

α) Ένταση $r_1 = 10m$, $r_2 = 15m$ από πηγή $P = 100W$



$$I(10) = \frac{1}{4\pi}$$

$$I(15) = \frac{1}{9\pi}$$

$I(10, I(10)) = (10, 1/4\pi)$.

$I(15, I(15)) = (15, 1/9\pi)$

β) Κλίση $(r_1, I(r_1))$, $(r_2, I(r_2))$

$$m_{sec} = \frac{I(r_2) - I(r_1)}{r_2 - r_1} =$$

$$\frac{\frac{P}{4\pi r^2} - \frac{P}{4\pi r^2}}{r_2 - r_1} = \frac{P}{4}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{\ldots 4\pi r_2 \qquad \ldots \pi r_1}{r_2 - r_1} = \frac{4\pi(r_2^2 \quad r_1^2)}{r_2 - r_1}$$

$$= \frac{P}{4\pi}\,\frac{\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2}}{r_2 - r_1} = \frac{P}{4\pi}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)}$$

$$= \frac{-P}{4\pi}\,\frac{\cancel{(r_1 - r_2)}(r_2 + r_1)}{r_2^2 r_1^2 \cancel{(r_2 - r_1)}} = \frac{-P(r_2 + r_1)}{4\pi r_1^2 r_2^2}$$

→ Ο μέσος ρυθμός με τον οποίο η ένταση του ήχου μεταβάλλεται σε διάστημα $[r_1, r_2]$.

Επειδή $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ → m_{sec} είναι πάντα αρνητική.

$I(r) \downarrow$ όσο $r \uparrow$ για $r > 0$

Συμμετρία

Εξηγήστε

x^{2n} → άρτια.

x^{2n+1} → περιττή.

→ Γιατί η γραφική παράσταση μιας μη

μηδενικής
συνάρτησης δεν είναι ποτέ
συμμετρική ως προς το άξονα x.

Παραδείγματα.

- $f(x) = x^4 - 2x^2 - 20$ → άρτια

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 20 =$

$= x^4 - 2x^2 - 20 = f(x)$.

- $h(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$

$h(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3 + x} = -\dfrac{1}{x^3 - x} = -f(x$

περιττή

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

$f(x) = \tan x \rightarrow f^{-1}(x) = \arctan$

$f(x) = \cos x \rightarrow f^{-1}(x) = \arccos$

$f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$

$$\frac{\quad}{f(x)} = \sec x$$

Παράδειγμα

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sec\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$(\cos\theta)^{-1} = \sec\theta$$

$$\cos^{-1}\theta = \arccos$$

Παράδειγμα:

α) $f(x) = \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$.

Αρχικά: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Για να έχω $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{5\pi}{4}$,

$$-\frac{\pi}{4} = x = \frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{κ} \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

β) $\frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$\cos 2x \neq 0 \implies \tan 2x = 1$

$2x = \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots$

$x = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \ldots$

Σπίτι: Γιατί $\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Εάν $P(x, y)$ είναι ένα σημείο ενός κύκλου με ακτίνα r και μια γωνία θ του κύκλου, τότε

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}.$$