Complex Numbers

Μαθηματικά I

Μιγαδικοί Αριθμοί κ' Επανάληψη Συναρτήσεων

Βήμα 1: Ορισμός της φανταστικής μονάδας:

$$i = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1} \quad (1)$$

δηλ: $i^2 = -1$.

Βάση (1): ορίζουμε τα εξής:

Φανταστικός Αριθμός: είναι κάθε αριθμός της μορφής $z = \beta i$ όπου $\beta \in \mathbb{R}$ και $i \rightarrow$ φανταστική μονάδα.

Μιγαδικοί Αριθμοί: είναι κάθε αριθμός (complex number) της μορφής $z = \alpha + i\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $i \rightarrow$ φαντ. μονάδα.

πχ.1 Οι αριθμοί $3i$, $-4i$, $i\sqrt{2}$ είναι φανταστικοί αριθμοί.

πχ.2 Ενώ $4 + i\sqrt{3}$, $2 - 5i$ ... είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Βήμα 2: Αν $z = \alpha + \beta i$ είναι μιγαδικός τότε ορίζουμε πραγματικό μέρος του z ως το πραγματικό αριθμό:

$$Re\{z\} = \alpha$$

Και ως φανταστικό μέρος ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό:

$$Im\{z\} = \beta.$$

πχ Αν $z = 3 - i$

$Re\{z\} = 3$, $Im\{z\} = -1$

Βήμα 3: ΙΣΟΤΗΤΑ $\mathbb{C}$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + i\beta$ κ' $z_2 = \gamma + i\delta$.

Τότε $z_1 = z_2$ ανν $\alpha = \gamma$ **κ'** $\beta = \delta$

πχ: Αν $x - 2y\,i = 3 + 4i$

Τότε $x = 3$ κ' $-2y = 4$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x = 3}$ κ' $\underline{y = -2}$

Βήμα 4 ΠΡΟΣΘΕΣΗ $\mathbb{C}$

Έστω οι $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζεται ως άθροισμα ο μιγαδικός αριθμός:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i$$

πχ: Αν $z_1 = 1 - i3$, $z_2 = 4 + i5$

τότε: $z_1 + z_2 = (1+4) + (-3+5)i \Leftrightarrow$

$z_1 + z_2 = 5 + 2i$

Βήμα 5: Ιδιότητες $\mathbb{C}$

i. Αντιμεταθετική: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

ii. Προσεταιριστική: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

iii. Νόμος Διαγραφής: Αν $z_1 + z = z_2 + z$ τότε $z_1 = z_2$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

υπάρχη

iv. $\exists$ ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 0 + 0i$

έτσι ώστε: $z + z^* = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Άρα ο μιγαδικός $0 + i0$ ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

v. $\forall$ μιγαδικό αριθμό z $\exists$ ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z' = (-\alpha) + (-\beta)i \Rightarrow$

να ισχύει $z + z' = 0$

Άρα ο μιγαδικός z' ονομάζεται αντίθετο στοιχείο (ή συμμετρικό) του z για την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$

vi. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση $z_1 + z = z_2$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_2 + (-z_1)$.

Η μοναδική λύση της παραπάνω λέγεται διαφορά ενώ η πράξη αφαίρεση.

Δηλ: Έστω $z_1 = \alpha + i\beta$, $z_2 = \gamma + i\delta$

Λύση: $z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$

Βήμα 6: ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί
$z_1 = \alpha + i\beta$, $z_2 = \gamma + i\delta$. Τότε:
Ορίζεται ως γινόμενο:

$$z_1 z_2 = (\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) = \underline{(\alpha\gamma-\beta\delta)} + \underline{(\alpha\delta+\beta\gamma)}i$$

Ιδιότητες Πολ/σμού

i. Αντιμεταθετική: $z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_{1,2} \in \mathbb{C}$

ii. Προσεταιριστική: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ -\\-

iii. Επιμεριστική: $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ -\\-

iv. Αν $z_1 z = z_2 z \Rightarrow z_1 = z_2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
με $z \neq 0$ κ' $z_{1,2} \in \mathbb{C}$
(Νόμος διαγραφής πολ/σμού).

v. Ουδέτερο Στοιχείο: $\exists$ μοναδικά ορισμένος μιγ. αριθμός $z^* = 1 + 0i$
έτσι ώστε: $z z^* = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
(η μονάδα).

vi. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0 \Rightarrow$
Η εξίσωση $z_2 \cdot z = z_1$ έχει μοναδική ... $^{-1}$ z_1

λύση στο $\mathbb{C}$ την $Z = z_1 z_2 = \frac{\;}{z_2}$

Η μοναδική λύση λέγεται πηλίκο του z_1 διά του z_2 και συμβολίζεται με z_1/z_2 ενώ η πράξη $\Rightarrow$ Διαίρεση

ΔΥΝΑΜΕΙΣ: $\{\Lambda\} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{\Lambda\} \in \mathbb{C}$

$z^1 = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ και

διαδοχικά (επαγωγή)

$z^\nu = z^{\nu-1} z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \ \nu = 2, 3 \ldots$

και επίσης: $z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

με $z \neq 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ενώ

ειδικά ισχύει $z^0 = 1$, $z \neq 0$.

* $0^0 \rightarrow \mathbb{C}$ δεν έχει νόημα.

Βάση των παραπάνω δυνάμεων:

$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$

$i^4 = 1 \quad \rightarrow \quad \ldots\ldots$

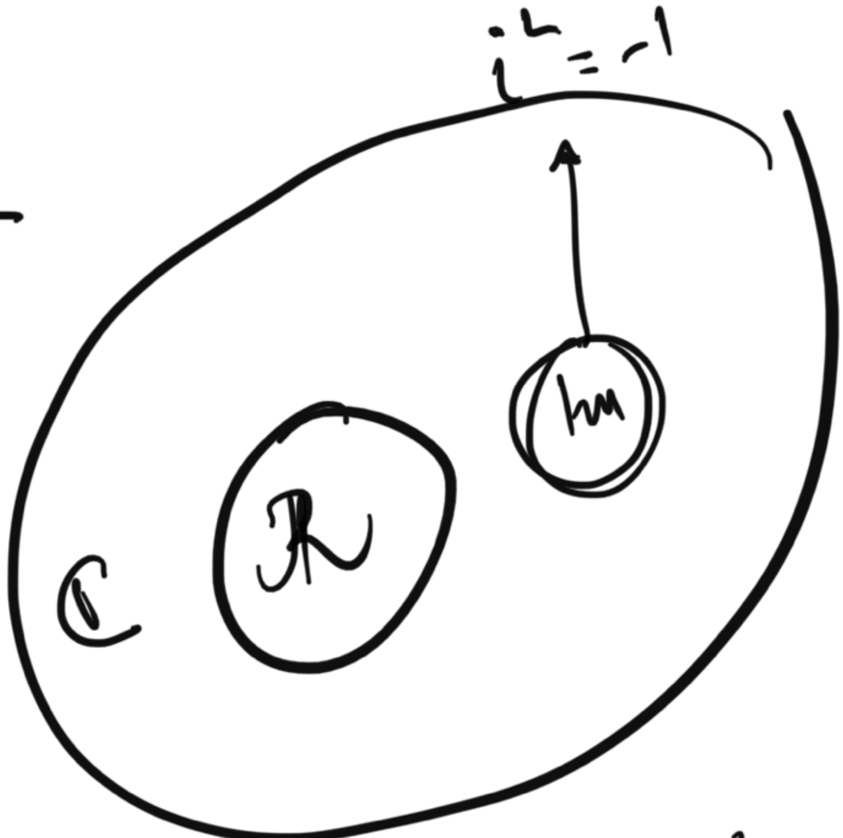
→ Έστω το πηλίκο m και το υπόλοιπο r.

Άρα $n = 4m + r$ όπου $\forall\ 4m \to 1$

δηλ. έστω: $i^5 = \underbrace{i^{4\cdot 1}}_{1=}{}^{+1}$

όπου $m = 1$, $r = 1$.

Άρα $1 \cdot i = i$



Παράδειγμα

z_1^3 αν $z_1 = 2 + i3$

$$z_1^3 = (2 + i3)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 3i + 3\cdot 2\cdot (i3)^2 + (i3)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i =$$

$$= -46 + 9i$$

$$(\alpha \pm b)^3 = \alpha^3 \pm 3a^2 b + 3\alpha b^2 \pm b^3.$$

ΣΥΖΥΓΕΙΣ

μιγαδικοί αριθμοί.

Έστω $z = \alpha + bi$. Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha - bi$ λέγεται συζυγής και συμβολίζεται $\bar{z}$

<u>δηλ</u>: $\bar{z} = \alpha - ib$.

Είναι προφανή: ⓐ $z\bar{z} = (\alpha+bi)(\alpha-bi) = \underline{\alpha^2+\beta^2}$

ⓑ $z + \bar{z} = 2\alpha$

<u>Παράδειγμα</u>: Να γραφούν οι $z_1 = \frac{1}{3-i}$ και $z_2 = \frac{1+2i}{3-i}$ με μορφή $\alpha + ib$.

- $z_1 = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{\underbrace{3-i}_{ⓐ}}\;\frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10}$

$\rightarrow z_1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

- $z_2 = \frac{1+2i}{3-i} \overset{*}{=} \frac{1}{3-i}\cdot(1+2i) = \left(\frac{3+i}{10}\right)(1+2i)$

$$= \frac{1}{10}(3+6i+i-2) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

* Αν δεν είχα το παραπάνω θα πολ/ζα κ' θα διαιρούσε με $\bar{z}_2$ (παρονομαστή)

Ιδιότητες

i. $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

ii. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

iii. $\overline{z^v} = (\bar{z})^v$ με $v = 1, 2, \ldots$

iv. $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$ με $z \neq 0$.

v. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ με $z_2 \neq 0$.

vi. $\overline{(\alpha z)} = \alpha \bar{z}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

vii. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

viii. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Μιγαδική Συντεταγμένη (Συζυγών)

Αν $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

όπου οι συντεταγμένες $(z, \bar{z})$ που συμπίπτουν με τις (x, y) ονομάζονται συζυγείς μιγαδική συντεταγμένη (ή συζυγείς συντεταγμένες).

Βήμα 7: ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Ορισμός: Έστω μιγαδικός αριθμός $z = a + i\beta$. Τότε ορίζεται ως μέτρο (modulus) ή απόλυτη τιμή του z και συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός* αριθμός,

*πραγματικός

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Επομένως: $|z|^2 = z\bar{z}$

Παράδειγμα: i) $|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2.$

ii) $\dfrac{1+i}{2+3i} = \dfrac{1+i}{2+3i}\,\dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{2-3i+2i-3\cancel{i^2}^{+3}}{2^2+3^2}$

$= \dfrac{5-i}{13} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$

$\left|\dfrac{1+i}{2+3i}\right| = \left|\dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{-1}{13}\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{5^2}{13^2} + \dfrac{1^2}{13^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{13}\right)^2(5^2+1^2} =$

$= \sqrt{1/13^2}\sqrt{5^2+1^2} = \dfrac{1}{13}\sqrt{26}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο $z \in \mathbb{C}$

όταν $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

Έστω $z = x+yi$

$|z-1| = |z-2| \Longrightarrow |x+yi-1| = |x+yi-2|$

$$\Leftrightarrow |(x-1)+yi| = |(x-2)+yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\overset{^2}{\Rightarrow} (x-1)^2 \cancel{+y^2} = (x-2)^2 \cancel{+y^2} \Rightarrow$$

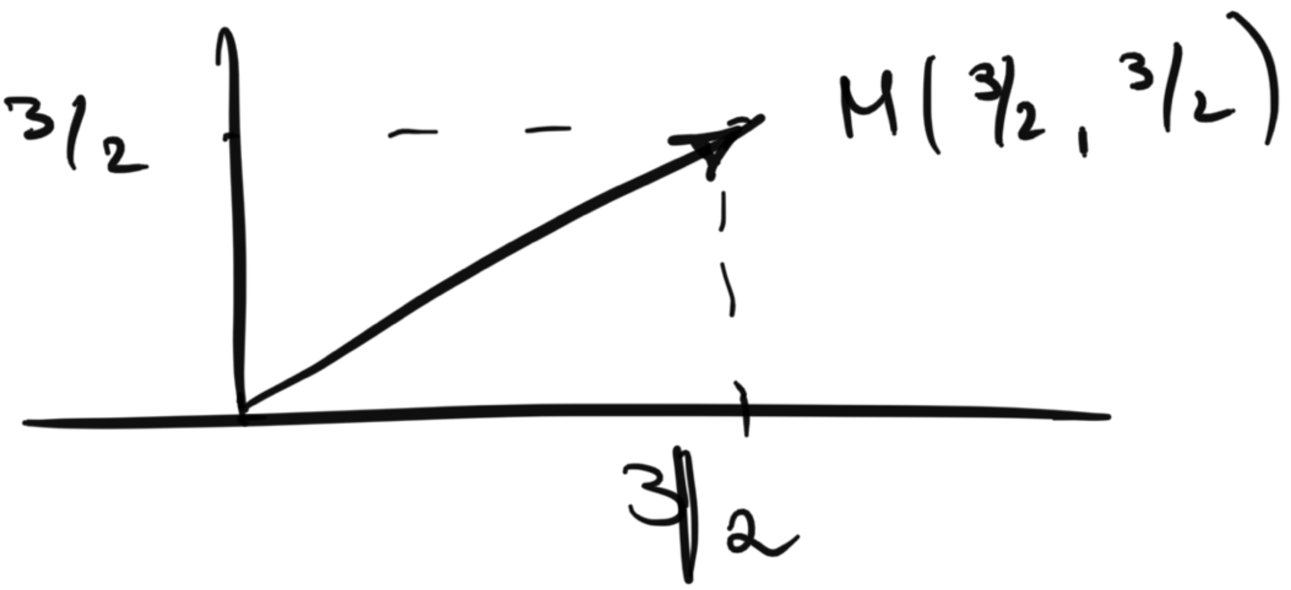
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow +2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2 .$$

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x \cancel{+1} \cancel{+y^2} = \cancel{x^2} \cancel{+y^2} - 2y \cancel{+1}$$

$$\Leftrightarrow -\cancel{2}x = -\cancel{2}y \Leftrightarrow y = x = 3/2$$



Ιδιότητα Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω.

i. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. (Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ).

ii. $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

iii. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

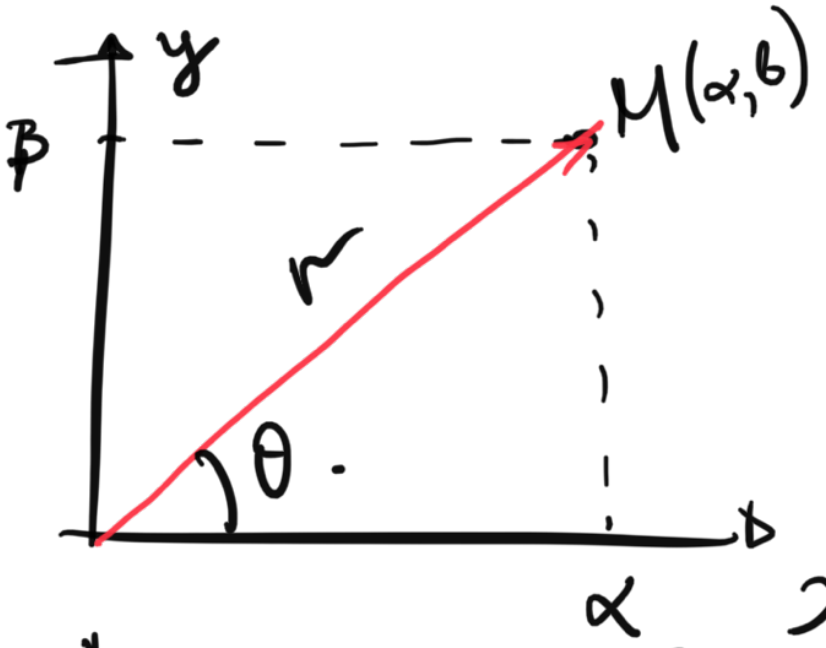
iv. $|z^{\nu}| = |z|^{\nu} \quad \forall\ \nu = 1, 2, \dots$

v. $|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad z \neq 0$

vi. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

Μορφές Μιγαδικού Αριθμού.

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ.



Αποδεικνύεται ότι $\exists$ μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του $z = \alpha + \beta i$ και του ζεύγους (α, β) στο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Αυτό το επίπεδο ονομάζεται μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο Gauss.

Έστω τώρα ένα πολικό σύστημα συντεταγ

(polar coordinate system) (ρ, θ) με πόλο το O και πολικό άξονα Ox.

Τότε αν $z = \alpha + bi = (\alpha, b)$ με $z \neq 0$

έχουμε: r ή $\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

και $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\alpha}{|z|}}$ (i) ενώ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}}$ (ii)

με $\theta \in [0, 2\pi)$.

Συνεπώς ρ ισούται με το μέτρο του z ενώ η γωνία θ υπολογίζεται βάσει i, ii και στο εξής θα λέγεται πρωτεύον όρισμα (Argument) και θα συμβολίζεται

$$\mathrm{Arg}(z).$$

και επίσης προκύπτει: $z = \alpha + \beta i$ γράφεται:

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

όταν $\theta \in [0, 2\pi)$ και $|z| = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$

Τριγωνομετρική Μορφή (polar form).

Βάσει τρ. ιδιότητας ο μιγαδικός αριθμός z προσδιορίζεται εκτός από το ζεύγος (ρ, θ) και από το ζεύγος $(\rho, \theta + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

Τότε οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ ορίζουν όρισμα του μιγαδικού. $\arg z$.

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$