Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 7

Παράγωγοι Συναρτήσεων (1η συνέχεια)

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

28 Νοεμβρίου 2019

Θεώρημα (Θεώρημα του Rolle)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$.

Θεώρημα (Θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ))

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0). \tag{1}$$

Πόρισμα

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν το διάστημα αντικατασταθεί με ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων, για παράδειγμα αν

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$$

τότε $f'(x) = 0$ για όλα τα $x \in (0,1) \cup (1,2)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή!

Πόρισμα

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια παράγωγο στο (a,b), τότε για κάποια σταθερά c είναι $f(x) = g(x) + c$.

Πόρισμα

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a,b).

1. *Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x, τότε η f είναι αύξουσα στο (a,b).*
2. *Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x, τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,b).*

Παράδειγμα

Εάν $0 < a < b$ δείχνουμε ότι

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Η $f(x) = \arctan x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε

$$\arctan b - \arctan a = (b-a)\arctan' \xi = \frac{b-a}{1+\xi^2} \qquad \text{(από το ΘΜΤ)}$$

για κάποιο $\xi \in (a,b)$. Επειδή για $0 < a < \xi < b$ είναι $0 < a^2 < \xi^2 < b^2$ έπεται ότι

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+\xi^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$$

συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Άσκηση

Εάν $0 < a < b$ *δείξτε ότι*

$$1 - \frac{a}{b} < \log \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1.$$

Άσκηση

Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\arctan x = 1 - x$$

έχει μοναδική λύση και βρήτε ένα λογικό διάστημα το οποίο την περιέχει.

Θεώρημα (Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Εάν $g(a) \neq g(b)$ και οι f', g' δεν είναι ταυτόχρονα ίσες με μηδέν, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Θεώρημα (Θεώρημα μέσης τιμής του Taylor)

Έστω ότι η συνάρτηση $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^n. \tag{2}$$

Αν x και x_0 είναι σημεία του (a,b) το ΘΜΤ γράφεται

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } x_0. \tag{3}$$

Ή για $x \in (a,b)$ και $|h|$ μικρό

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\delta h)h \qquad \text{για κάποιο } \delta \in (0,1). \tag{4}$$

Παρόμοια η (2) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

όπου το ξ είναι μεταξύ x και x_0. Το πολυώνυμο

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

λέγεται **πολυώνυμο Taylor** βαθμού n της f στο x_0.

Έτσι η (5) μπορεί να γραφεί

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{7}$$

όπου το **υπόλοιπο** $R_n(x)$ στο x_0 δίνεται από τη σχέση

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{8}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Η έκφραση αυτή του υπολοίπου είναι η **μορφή του Lagrange**. Μια άλλη έκφραση για το R_n είναι η **μορφή του Cauchy**

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0), \tag{9}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Εν γένει τα ξ στις (8) και (9) είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Βασικό Παράδειγμα

Οι e^x, $\sin x$ και $\cos x$ έχουν παραγώγους όλων των τάξεων και $(e^x)^{(n)} = e^x$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \begin{cases} (-1)^k \sin x & n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \begin{cases} (-1)^k \cos x & n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin x & n = 2k+1, \end{cases}$$

με $k = 0, 1, 2, \ldots$. Έτσι για $x_0 = 0$ και για κάθε x υπάρχει ξ μεταξύ x και μηδέν ώστε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{10}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \frac{\sin\xi\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \tag{11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \frac{\sin\xi\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{12}$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots$ Από τις σχέσεις αυτές εξάγονται διάφορα συμπεράσματα. Ας δούμε μερικά.

(1) Από την (10) για $x=1$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και ένα ώστε

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\qquad 0<\xi<1.$$

Έτσι έχουμε

$$0\leq e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{e}{(n+1)!}\to 0$$

καθώς $n\to\infty$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

συγκλίνει στο e.

(2) Για $n=0$ και $x\neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\sin x=x-\frac{x^2}{2}\sin\xi\Rightarrow\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x}{2}\sin\xi$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|=\frac{|x|}{2}|\sin\xi|\leq\frac{|x|}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(3) Όμοια για $n=0$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - x \sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin 0 = 0,$$

αφού $0 < |\xi| < |x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$.

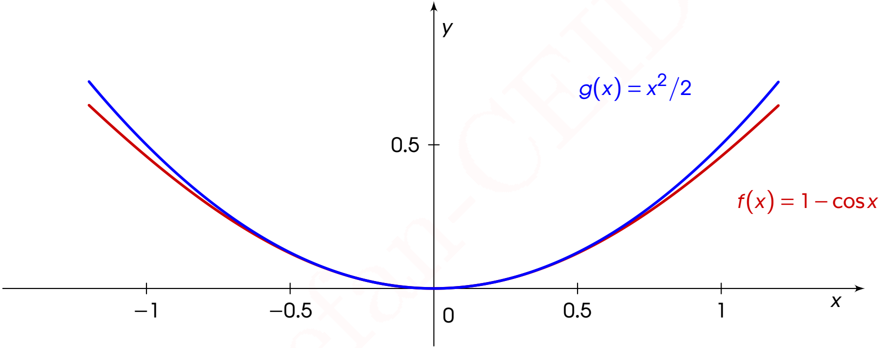
(4) Όμοια για $n=1$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\sin\xi$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

αφού $0 < |\xi| < |x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$.



Σχήμα: Για μικρές τιμές του $|x|$ είναι $1 - \cos x \approx x^2/2$

(5) Από την (10) βλέπουμε ότι αν P_n είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για την e^x, τότε

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

και $e^x - P_n(x) = R_n(x)$ όπου

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

αφού το ξ είναι μεταξύ 0 και x. Επειδή $x^n/n! \to 0$ καθώς $n \to \infty$[1] έπεται ότι $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$,

---

[1] Δείχνουμε ότι για $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Έστω N ένας σταθερός φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $N > 2a$, τότε για $n > N$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n} \leq a^N\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N} < a^N\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{(2a)^N}{2^n}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο αφού το δεξί άκρο της ανισότητας τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$.

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}|e^x - P_n(x)| = \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0 \Rightarrow e^x = \lim_{n\to\infty}P_n(x)$$

και από τη μορφή των P_n είναι λογικό να γράψουμε

$$e^x = \lim_{n\to\infty}P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{13}$$

Το όριο των πολυωνύμων P_n καθώς $n \to \infty$, το άθροισμα δηλαδή όλων των όρων (άπειροι το πλήθος) $x^n/n!$ είναι μια σειρά την οποία θα λέμε **δυναμοσειρά** (από τη μορφή των όρων) της e^x γύρω από το $x = 0$. Έτσι κάθε πολυώνυμο P_n είναι το μερικό άθροισμα S_n της δυναμοσειράς. Τη δυναμοσειρά τη λέμε **ανάπτυγμα Taylor** της e^x γύρω από το $x = 0$. Το ανάπτυγμα αυτό υπάρχει για κάθε πραγματικό αριθμό και συγκλίνει, όπως δείξαμε στο e^x. Έτσι θα λέμε ότι η δυναμοσειρά (13) **συγκλίνει** στην e^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, από τον ορισμό της συνάρτησης exp, έχουμε ότι $e^x = \exp x$.

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τις (11) και (12) και εργαζόμενοι όπως στο αποτέλεσμα του βασικού Παραδείγματος για την εκθετική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{14}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

´Ασκηση

Η $f(x) = \arctan x$, *έχει παραγώγους όλων των τάξεων.*

(α΄) *Δείξτε ότι*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

για κατάλληλο R_n.

(β΄) *Δείξτε ότι* $R_n(x) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$ *για κάθε* $-1 \le x \le 1$ *και συμπεράνατε ότι*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad -1 \le x \le 1.$$

Παράδειγμα

Προσεγγίζοντας τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ με ένα πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο $x_0 = 8$, πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση όταν $7 \leq x \leq 9$;

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2.$$

Υπολογίζουμε

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

$$f(8) = 2 \qquad f'(8) = \frac{1}{12} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144}$$

επομένως

$$\sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμάται από το υπόλοιπο $R_2(x)$ αφού

$$f(x) - P_2(x) = R_2(x),$$

όπου το ξ στην έκφραση του $R_n(x)$ είναι μεταξύ 8 και x. Εδώ είναι

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{-8/3}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}.$$

Επειδή $x \in [7,9]$ είναι $-1 \le x-8 \le 1$, ισοδύναμα $|x-8| \le 1$ και $\xi > 7$, οπότε

$$|R_2(x)| = \left|\frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}\right| < \frac{5\cdot 1}{81\cdot 7^{8/3}} < 0.0004.$$

Έτσι για κάθε $x \in [7,9]$ έχουμε

$$\left|\sqrt[3]{x} - \left(2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2\right)\right| < 0.0004.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$, τότε το πολυώνυμο Taylor πρώτου βαθμού στο x_0

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν το x είναι κοντά στο x_0 από την (3) βλέπουμε ότι

$$f(x) \approx P_1(x),$$

κατά συνέπεια σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 η f προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση. Το υπόλοιπο $R_1(x)$ εκφράζει το σφάλμα της προσέγγισης.

Ορισμός

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 η συνάρτηση

$$L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

λέγεται **γραμμικοποίηση** της f στο x_0.

Αν το x_0 μεταβάλεται κατά $\Delta x = dx$ τότε η $y = f(x)$ μεταβάλεται κατά

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη η έκφραση $f'(x_0)\,dx$ είναι μια προσέγγιση της Δf αφού για Δx μικρό είναι

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)\,dx + \epsilon\,dx$$

και $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Την έκφραση

$$dy = df = f'(x)\,dx$$

λέμε **διαφορικό** της f. Παρατηρούμε ότι το διαφορικό της f στο x_0 είναι η μεταβολή της γραμμικοποίησης L κατά dx αφού

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(x_0 + dx) - L(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)((x_0 + dx) - x_0) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)\,dx. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Η γραμμική προσέγγιση της $f(x) = (1+x)^r$, $x > -1$ και $r \in \mathbb{R}$, στο $x = 0$ είναι

$$(1+x)^r \approx 1 + rx, \qquad x \text{ κοντά στο } 0.$$

Πράγματι $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$, οπότε στο $x = 0$ είναι

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + rx.$$

Έτσι για x κοντά στο μηδέν έχουμε

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 + (-1)x = 1 - x$$

$$\sqrt[3]{1+3x^4} \approx 1 + \frac{1}{3}3x^4 = 1 + x^4 \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Η μέθοδος του Newton για την εύρεση ριζών

Έστω ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα (a,b) και έστω, επιπλέον, ότι $f'(x) \neq 0$ στο (a,b). Αν $a < x_1 < b$ η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Επειδή $f'(x) \neq 0$ η ευθεία αυτή τέμνει τον x-άξονα. Αν x_2 είναι το σημείο τομής, τότε

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Όμοια η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_2, f(x_2))$ τέμνει τον xάξονα στο x_3 και

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε μια αναδρομική ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Υποθέτοντας ότι η αναδρομική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο σημείο x^* από την συνέχεια των f και f' παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης έχουμε

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow f(x^*) = 0,$$

δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Κατά συνέπεια παίρνοντας το σημείο x_1 κοντά σε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ το αναδρομικό αυτό σχήμα συγκλίνει στη ρίζα.

΄Ασκηση

Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

(α΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

(β΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$