Μαθηματικά Ι

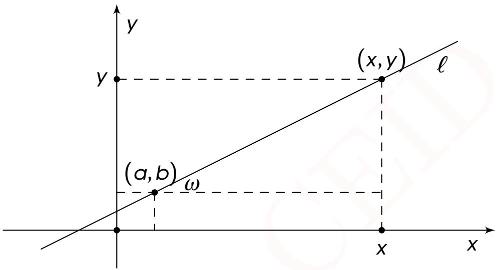
Διάλεξη 5

Πραγματικές συναρτήσεις (συνέχεια)

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Νοεμβρίου 2019



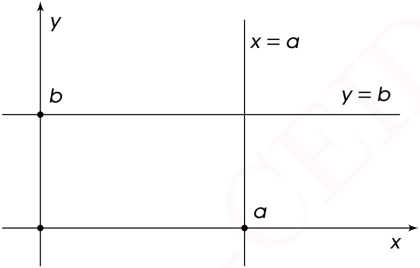
Αν ℓ είναι μια ευθεία στο επίπεδο, η οποία δεν είναι παράλληλη στον y-άξονα, περιέχει το σημείο (a,b) και σχηματίζει γωνία ω με τον x-άξονα και αν (x,y) είναι ένα σημείο της ευθείας, τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\tan\omega = \frac{y-b}{x-a}$$

οπότε αν ορίσουμε τη **κλίση** της ευθείας ℓ να είναι $m = \tan\omega$ τότε η σχέση

$$y - b = m(x-a) \tag{1}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση m και περιέχει το σημείο (a,b).



Αν $m = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $y = b$ που είναι η ευθεία παράλληλη στον x-άξονα που περιέχει το σημείο $(0, b)$. Όμοια η $x = a$ παριστάνει την ευθεία που είναι κάθετη στον x-άξονα στο σημείο $(a, 0)$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή είναι $\omega = \pi/2$. Η εξίσωση της ευθείας που περιέχει τα σημεία (a, b) και (a', b') είναι

$$y - b = \frac{b - b'}{a - a'}(x - a)$$

(γιατί;).

Γράφοντας την εξίσωση (1) σαν

$$y = mx + (b - am) = mx + c,$$

όπου $c = b - am$, βλέπουμε ότι για $x = 0$ είναι $y = c$, κατά συνέπεια η

$$y = mx + c, \tag{2}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας με κλίση m η οποία τέμνει τον y-άξονα στο $(0, c)$.

Γενικά κάθε εξίσωση

$$ax + by + c = 0,$$

με a, b και c πραγματικούς αριθμούς, παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο.

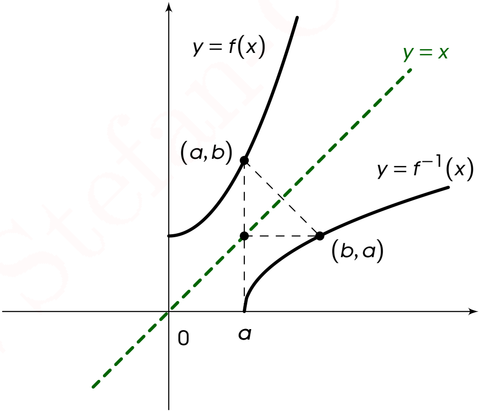
Αν η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f υπάρχει, ορίζεται με τη σχέση

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Έτσι αν $G(f)$ και $G(f^{-1})$ είναι αντίστοιχα τα γραφήματα των f και f^{-1}, τότε

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \qquad \text{και} \qquad G(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D(f)\}$$

όπου $D(f)$ είναι το πεδίο ορισμού της f.



Τα σημεία (a,b) και (b,a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$ (γιατί;), οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$.

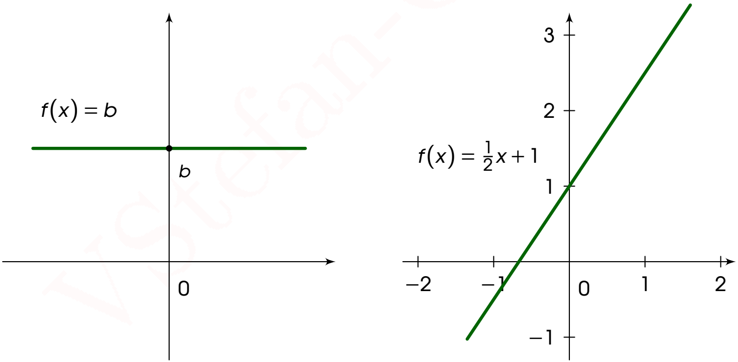
Θεώρημα

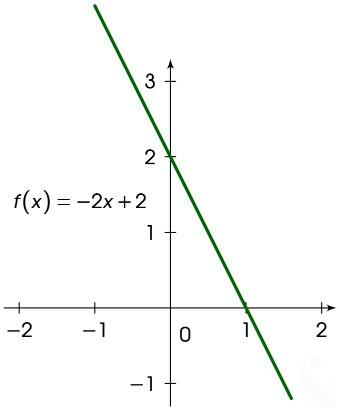
Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ένα προς ένα και έστω f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f, τότε

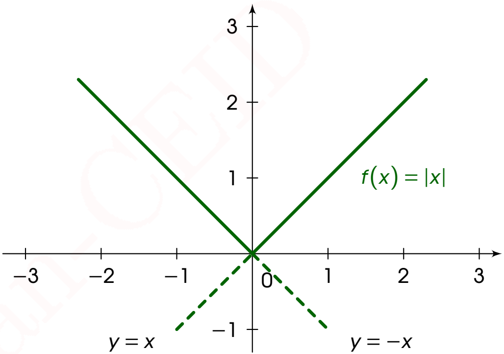
1. *Το γράφημα $G(f^{-1})$ της f^{-1} είναι συμμετρικό του γραφήματος $G(f)$ της f ως προς την ευθεία $y=x$.*
2. *Αν η f είναι αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα, τότε και η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία, είναι δηλαδή, αντίστοιχα, αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα.*
3. *Αν η f είναι περιττή, τότε και η f^{-1} είναι περιττή.*
4. $(f^{-1})^{-1}=f$.

$$f(x) = ax + b, \qquad \text{με } a, b \in \mathbb{R}.$$

Μια τέτοια συνάρτηση ορίζεται σ΄ ολόκληρο και $\mathbb{R}$ και είναι ένα-προς-ένα, αν $a \neq 0$, αύξουσα αν $a > 0$ και φθίνουσα αν $a < 0$. Το γράφημα κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι ευθεία. Έχουμε $f(0) = b$, άρα ένα σημείο της ευθείας είναι το $(0, b)$, ενώ για $x = -b/a$, εφόσον $a \neq 0$, είναι $f(-b/a) = 0$, έτσι ένα άλλο σημείο είναι το $(-b/a, 0)$.





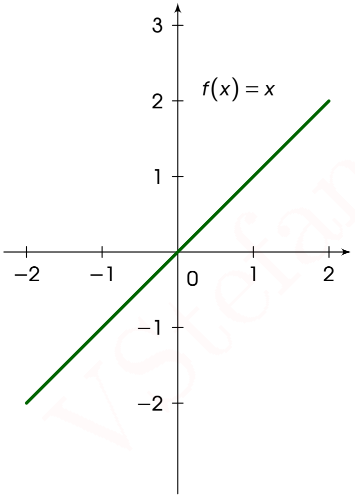


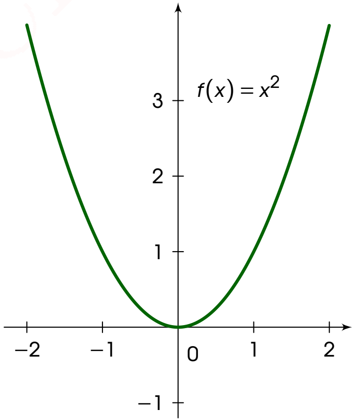
Παράδειγμα

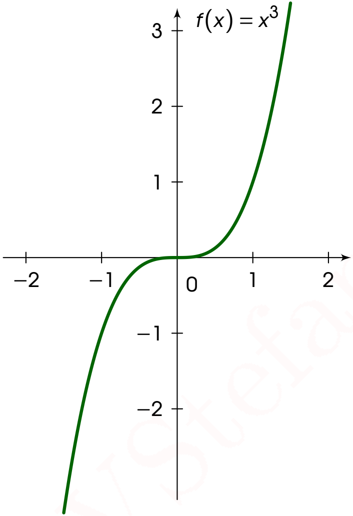
Για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχουμε ότι $f(x) = x$ αν $x \geq 0$, και $f(x) = -x$ αν $x \leq 0$. Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση δεν είναι γραμμική αφού δεν είναι της μορφής $ax + b$. Σημειώνουμε ότι είναι άρτια ($|-x| = |x|$), γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

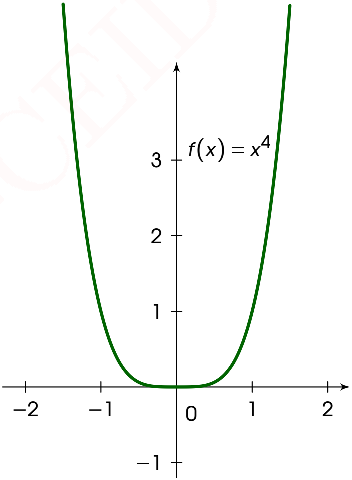
Αυτές είναι οι $f(x) = x^p$, με $p \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α΄) $p = n$, με $\in \mathbb{N}$. $f(x) = x^n$ και $D(f) = \mathbb{R}$.
Η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός. Αν $n = 1$ η συνάρτηση είναι γραμμική.

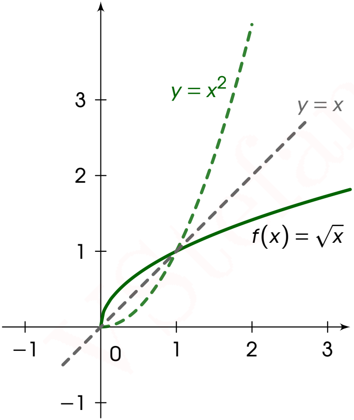


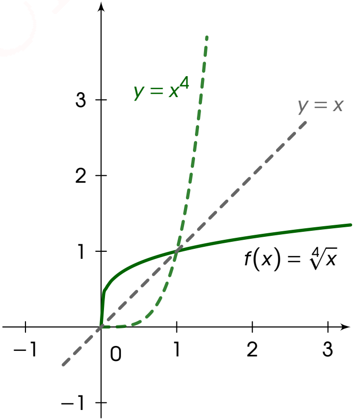


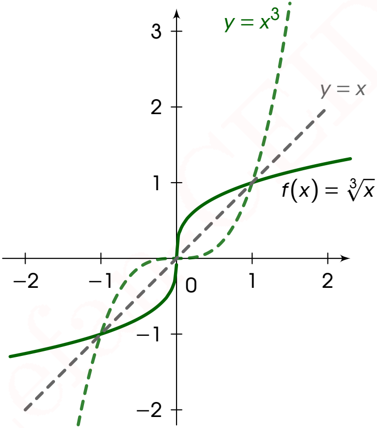

$f(x) = x^3$
3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2


$f(x) = x^4$
3
2
1
−2
−1
0
1
2
−1

(β) $p = 1/n$, με $n \in \mathbb{N}$.
Αν $y = g(x) = x^n$, τότε η $f(x) = x^{1/n}$ είναι η αντίστροφη της $g(x)$ εκεί που η g είναι ένα-προς-ένα και η $f(x) = x^{1/n}$ ορίζεται. Έτσι η συμπεριφορά της $x^{1/n}$ καθορίζεται από αυτή της x^n. Στο Σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, και $f(x) = \sqrt[4]{x}$, με $x \geq 0$, σαν αντίστροφες, αντίστοιχα, των $y = x^2$, με $x \geq 0$, και $y = x^4$, με $x \geq 0$.

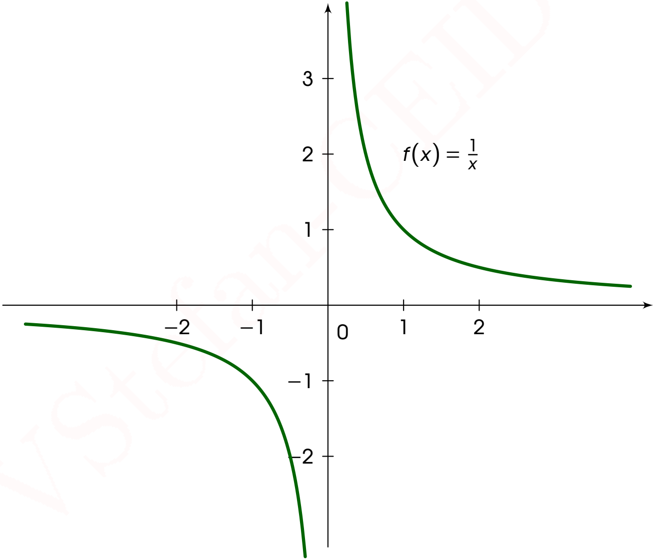


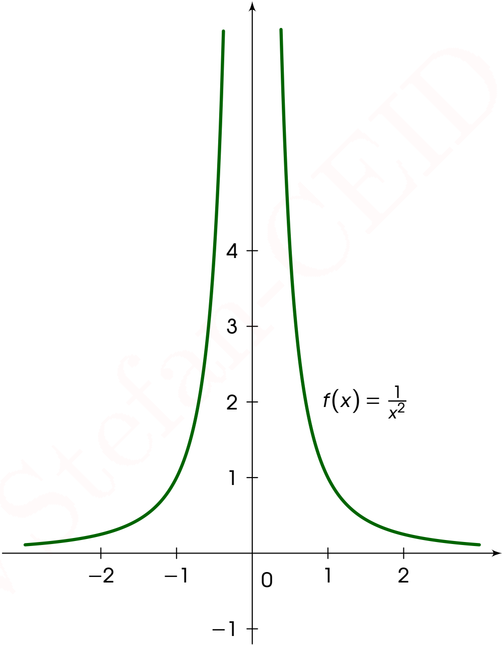




Στο Σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x}$ σαν αντίστροφη της $y = x^3$ με $x \in \mathbb{R}$.

- $p = -n$, με $n \in \mathbb{N}$. $f(x) = 1/x^n$ και $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός.




4
3
2
1
−1
−2
−1
0
1
2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

- (δ) $p = m/n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$.
  Αν $f(x) = x^{m/n}$ με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, οπότε $f = g \circ h$, όπου $h(x) = x^{1/n}$ και $g(x) = x^m$. Έτσι

$$
\begin{aligned}
D(f) &= (-\infty, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ περιττός} \\
D(f) &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ περιττός} \\
D(f) &= [0, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ άρτιος} \\
D(f) &= (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ άρτιος.}
\end{aligned}
$$

- (ε) $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  Εδώ χρειάζεται να ορίσουμε τις μη ρητές δυνάμεις. Για παράδειγμα τι σημαίνει $3^{\sqrt{2}}$ και για ποιά x έχει έννοια η έκφραση $x^{\sqrt{2}}$;

- Σε σχέση με το πρώτο ερώτημα

Ο $\sqrt{2}$ είναι όριο ακολουθίας ρητών αριθμών, έστω (r_n) και ο 3^{r_n} ορίζεται για κάθε n, άρα φαίνεται λογικό να ορίσουμε

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}$$

αρκεί το όριο στο δεξί μέλος να υπάρχει, αφενός, και αφετέρου να είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας (r_n) αφού υπάρχουν περισσότερες της μιας ακολουθίες ρητών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$. Θα δείξουμε ότι αυτό όντως ισχύει.

- Σε σχέση με το δεύτερο ερώτημα

Για να έχει έννοια το $x^{\sqrt{2}}$, θα πρέπει το x^r να ορίζεται για κάθε ρητό αριθμό r, κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $x \geq 0$, βλέπε (δ).

Θεώρημα

Έστω $a > 0$ *και έστω* $p \in \mathbb{R}$. *Αν* (p_n) *είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών και*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p,$$

τότε η ακολουθία (a^{p_n}) *συγκλίνει και το όριό της είναι ανεξάρτητο της* (p_n).

Ορισμός

Αν $a > 0$ και $p \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

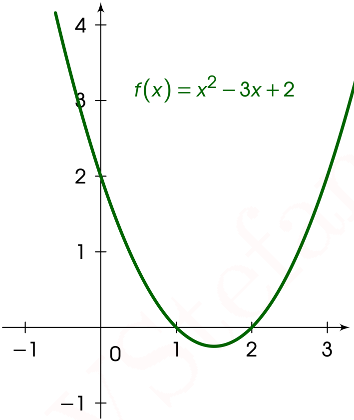
$$a^p = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}$$

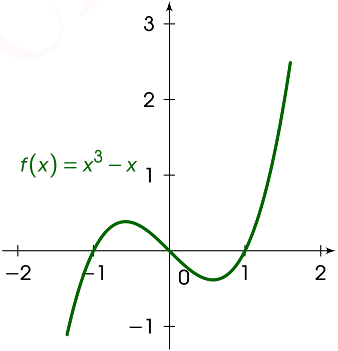
όπου (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών με $p_n \to p$.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = x^p$ με $p \notin \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

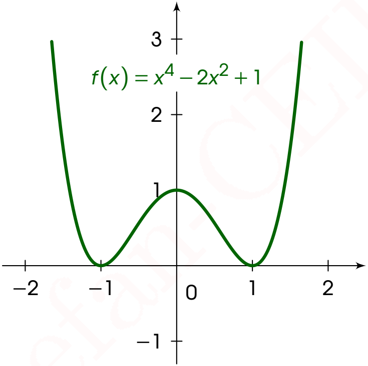
$$\begin{aligned} D(f) &= [0, +\infty), && \text{αν } p > 0 \\ D(f) &= (0, +\infty), && \text{αν } p < 0. \end{aligned}$$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. $D(f) = \mathbb{R}$.
Για $n = 1$ η πολυωνυμική συνάρτηση είναι γραμμική. Οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x-άξονα.





Σχήμα: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ και $f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$



Σχήμα: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$

Μετατόπιση

Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ είναι το τυπικό δείγμα του σχήματος που λέγεται **παραβολή**. Για $a \neq 0$ η $y = ax^2$ είναι επίσης παραβολή, η οποία εκτείνεται στο άνω ημιεπίπεδο αν $a > 0$ και στο κάτω ημιεπίπεδο αν $a > 0$.

- Η $y = ax^2 + b$ είναι παραβολή με γραφική παράσταση ίδια με αυτήν της $y = ax^2$ αλλά κατακόρυφα μετατοπισμένη κατά b. $(0,0) \to (0,b)$.
- Η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $y = ax^2$ μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά b και οριζόντια κατά c. $(0,0) \to (c,b)$. Ισοδύναμα η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $Y = aX^2$ στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X = c$ και $Y = b$.

Έτσι η $f(x) = x^2 - 4x + 3$, αφού

$$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

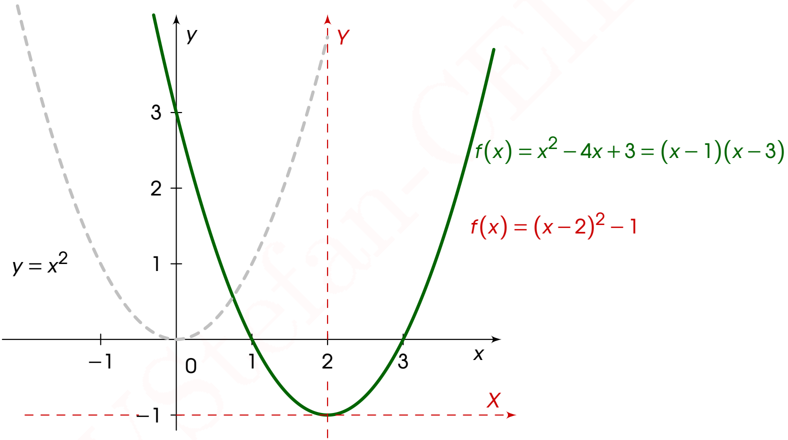
γράφεται

$$y + 1 = (x-2)^2$$

είναι δηλαδή η τυπική παραβολή $Y = X^2$, με $Y = y + 1$ και $X = x - 2$. Έτσι το $(0,0)$ στους X, Y-άξονες είναι το $(2,-1)$ στους x, y-άξονες.

Μετατόπιση (συνέχεια) ($Y = X^2$, με $Y = y + 1$ και $X = x - 2$)

$(0,0)$ στους X, Y-άξονες $\leftrightarrow$ $(2,-1)$ στους x, y-άξονες



Σχήμα: Η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$

Γενικεύοντας:

Παρατήρηση (γενική)

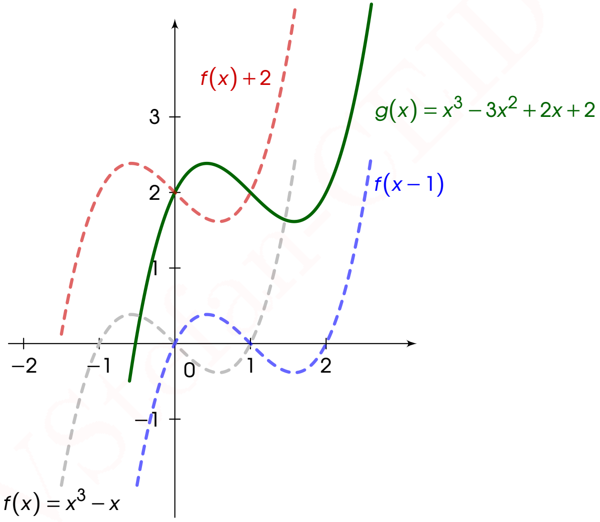
Αν $y = f(x)$, η πράξη $y = f(x-c)$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράσταση της $f(x)$ κατά c προς τα δεξιά αν $c > 0$ ή προς τα αριστερά αν $c < 0$. Η πράξη $y = f(x) + b$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράσταση της $f(x)$ κατά b προς τα πάνω αν $b > 0$ ή προς τα κάτω αν $b < 0$. Η δε $y = f(x-c) + b$ είναι συνδυασμός μεταφοράς κατά μήκος του x-άξονα και του y-άξονα.

Παράδειγμα

Η γραφική παράσταση της $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ προκύπτει εύκολα από αυτήν της $f(x) = x^3 - x$, αφού

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ &= (x-1)^3 - (x-1) + 2 \\ &= f(x-1) + 2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια) $g(x) = f(x-1)+2$



Σχήμα: $g(x) = f(x-1)+2$

$f(x) = p(x)/q(x)$ όπου οι p και q είναι πολυώνυμα. $D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{x : q(x) = 0\}$.
Εν γένει οι ρητές συναρτήσεις έχουν ασύμπτωτες ευθείες.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{\pm 1\}$. Για $x \approx \pm 1$, οι αντίστοιχες τιμές $|f(x)|$ αυξάνονται απεριόριστα.

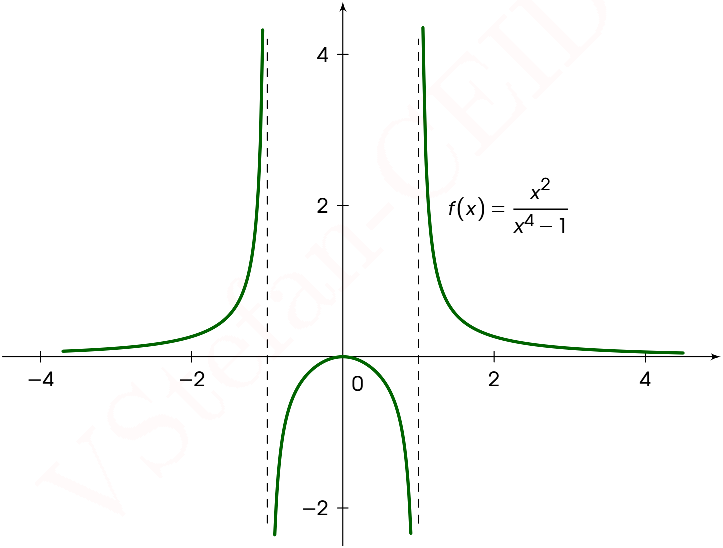
$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 - 1}$$

έτσι η $f(x)$ προσεγγίζει το μηδέν καθώς το $|x|$ αυξάνει. Η f μηδενίζεται μόνο στο $x = 0$ και αφού

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

είναι $f(x) > 0$ αν $|x| > 1$ και $f(x) < 0$ αν $|x| < 1$.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Αυτές είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

όπου $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ είναι πολυώνυμα. Οι ρητές συναρτήσεις είναι αλγεβρικές αφού είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής $q(x)y - p(x) = 0$ όπου p και q είναι πολυώνυμα. Έτσι οι

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x}} \qquad f(x) = x + 3\sqrt{x^2+2x+2}$$

είναι αλγεβρικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα η τελευταία είναι λύση της εξίσωσης $y^2 - 2xy - 8x^2 - 18x - 18 = 0$. Οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad f(x) = 3^x \qquad f(x) = x^x$$

δεν είναι αλγεβρικές συναρτήσεις (γιατί;).

Αυτές είναι οι συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές. Υπερβατικές (transcendental) συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι εκθετικές $f(x) = a^x$, όπου a είναι θετικός πραγματικός αριθμός, οι λογάριθμοι $f(x) = \log_a x$, όπου a είναι πάλι θετικός πραγματικός αριθμός, οι υπερβολικές και πολλές άλλες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = x^p$, με p άρρητο, $f(x) = x^x$, $f(x) = x^{1/x}$, ή οι ειδικές συναρτήσεις.

Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και αν ξεκινώντας από το σημείο $(1,0)$ του τριγωνομετρικού κύκλου διαγράψουμε τόξο μήκους $|x|$ κατά την θετική κατεύθυνση αν $x > 0$ και κατά την αρνητική αν $x < 0$ και εάν P είναι το πέρας αυτού του τόξου, τότε $\cos x =$ ``προβολή του $P$ στον οριζόντιο άξονα'' και $\sin x =$ ``προβολή του P στον κατακόρυφο άξονα''. Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad \cos(x+2k\pi) = \cos x, \qquad k \in \mathbb{Z} \\
&-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin x, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Ορισμός

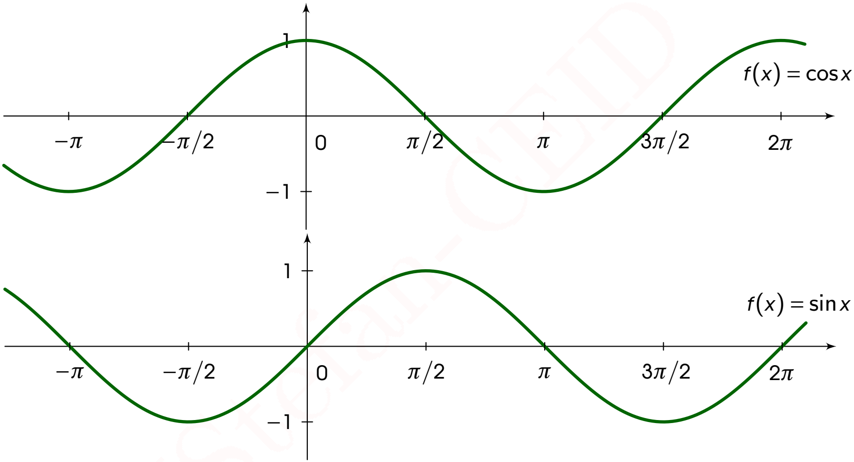
Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L έτσι ώστε

$$f(x+L) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός L για τον οποίο ισχύει η (3) λέγεται **περίοδος** της f.

Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι **περιοδικές** συναρτήσεις με περίοδο 2π (το μήκος του μοναδιαίου κύκλου).

sin και **cos**.



Κάθε διάστημα μήκους 2π περιέχει το πλήρες προφίλ κάθε μιας από τις συναρτήσεις, μια ``θετική και μια αρνητική καμπούρα''. Η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση και η $\sin x$ είναι περιττή.

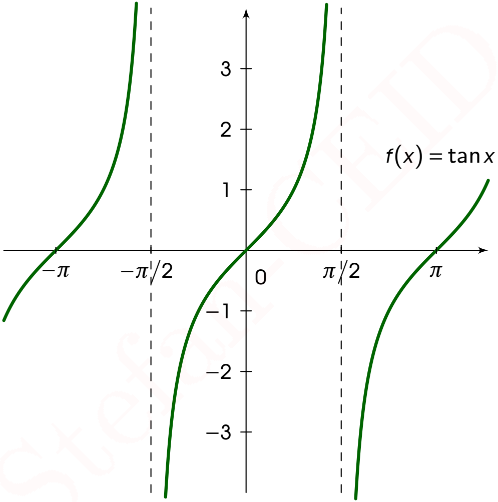
tan και **cot**. Για $x \neq k\pi + \pi/2$ έχουμε ότι $\tan(x+2\pi) = \tan x$, κατά συνέπεια η συνάρτηση tan είναι περιοδική. Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες υπολογίζουμε

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x,$$

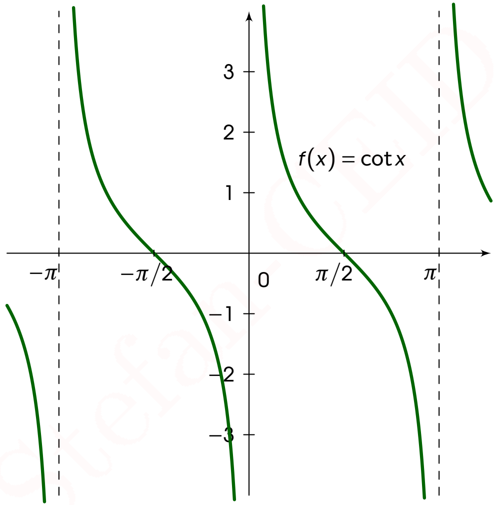
κατά συνέπεια η περίοδος δεν είναι 2π, αλλά πιθανόν π. Από την γεωμετρική υλοποίηση του αριθμού $\tan x$ παρατηρούμε ότι η $\tan x$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Έτσι σε διάστημα μήκους π, η $\tan x$ είναι ένα-προς-ένα, επομένως η περίοδος της συνάρτησης είναι π. Επίσης

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

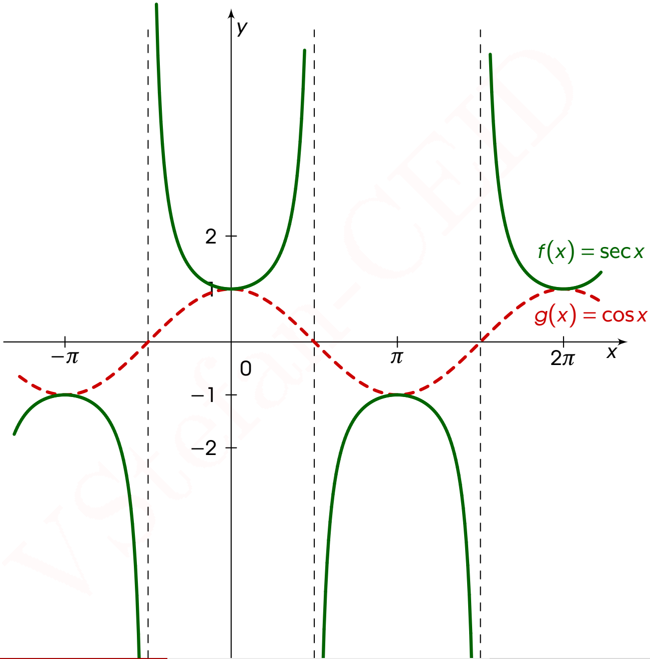
δηλαδή η tan είναι περιττή συνάρτηση. Όμοια η *cotx* είναι περιοδική με περίοδο π και είναι επίσης περιττή.

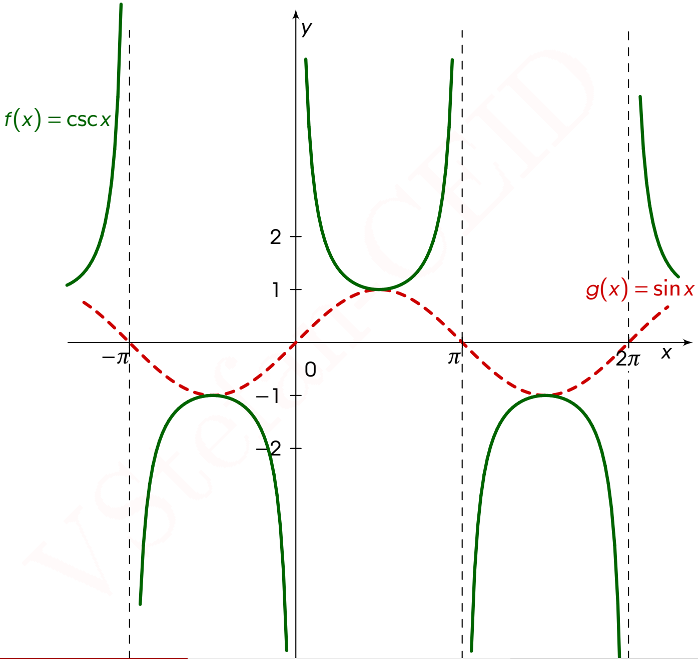


Σχήμα: $f(x) = \tan x$



Σχήμα: $f(x) = \cot x$


y
2
1
0
−1
−2
−π
π
2π
x
f(x) = sec x
g(x) = cos x



y
x
$f(x) = \csc x$
$g(x) = \sin x$
2
1
0
−1
−2
−π
π
2π

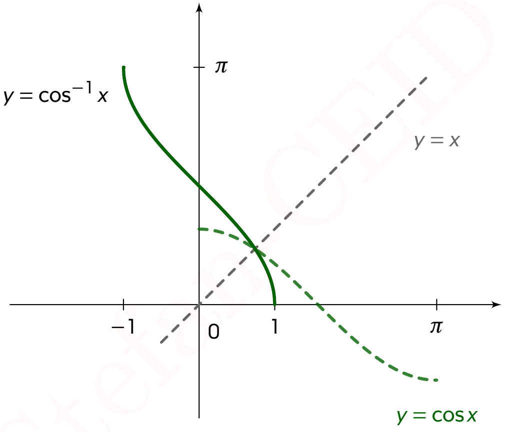
$\cos^{-1}$. Στο διάστημα $[0,\pi]$ η $y=\cos x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφή της $\cos^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και πεδίο τιμών το $[0,\pi]$ με τη σχέση

$$\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x, \qquad 0 \le y \le \pi. \tag{4}$$

Την $\cos^{-1}$ συμβολίζουμε και με arccos και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(\cos x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [0,\pi] \\ \cos(\cos^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1,1] \end{aligned}$$

Από τη συμμετρία των γραφημάτων των cos και $\cos^{-1}$ ως προς την ευθεία $y=x$, βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της $\cos^{-1}$.



Σχήμα: Η συνάρτηση $\cos^{-1}$

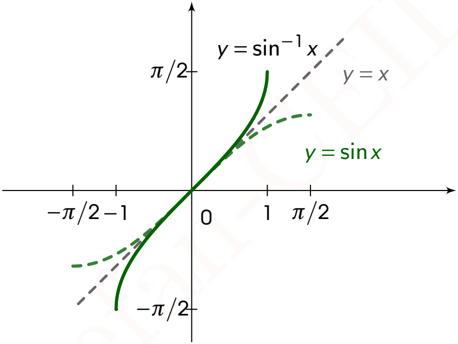
$\sin^{-1}$. Στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ η $y = \sin x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\sin^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[-\pi/2, \pi/2]$ με τη σχέση

$$\sin^{-1} x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Την $\sin^{-1}$ συμβολίζουμε και με arcsin και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(\sin x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(\sin^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\sin^{-1}$ προκύπτει σαν συμμετρική του γραφήματος της sin ως προς την ευθεία $y = x$



Σχήμα: Η συνάρτηση $\sin^{-1}$

$\tan^{-1}$. Στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ η $y = \tan x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\tan^{-1}$, ή arctan με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\pi/2, \pi/2)$ με τη σχέση

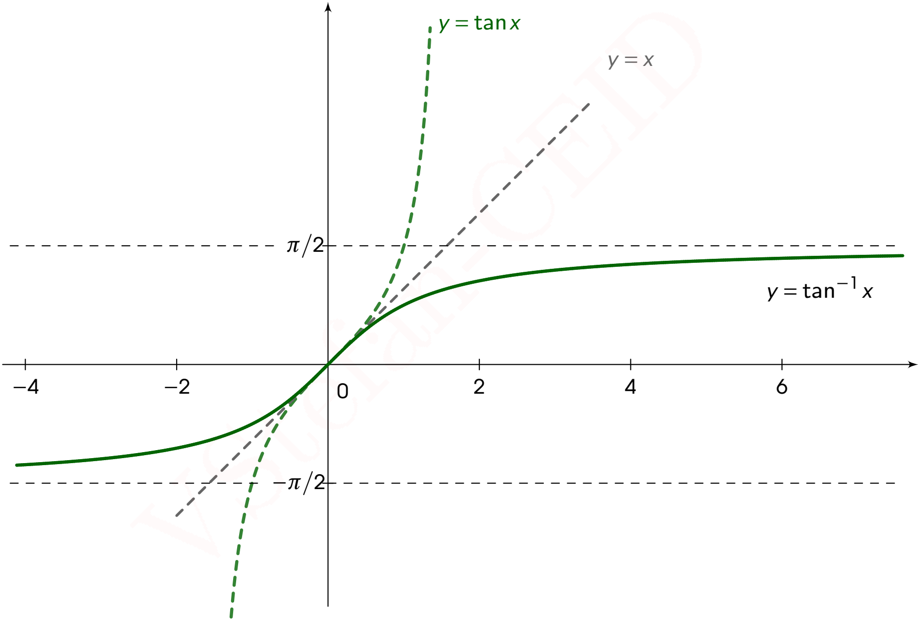
$$\tan^{-1} x = y \Leftrightarrow \tan y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(\tan x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan(\tan^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\tan^{-1}$ προκύπτει σαν συμμετρική του γραφήματος της tan ως προς την ευθεία $y = x$, βλέπε Σχήμα. Επειδή η συνάρτηση tan είναι περιττή, έπεται ότι και η $\tan^{-1}$ είναι περιττή (γιατί;), έτσι

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$



$y = \tan x$
$y = x$
$\pi/2$
$y = \tan^{-1} x$
-4
-2
0
2
4
6
$-\pi/2$

Οι **εκθετικές** (exponential) συναρτήσεις είναι της μορφής

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0 \text{ και } a \neq 1.$$

$D(f) = \mathbb{R}$ και $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

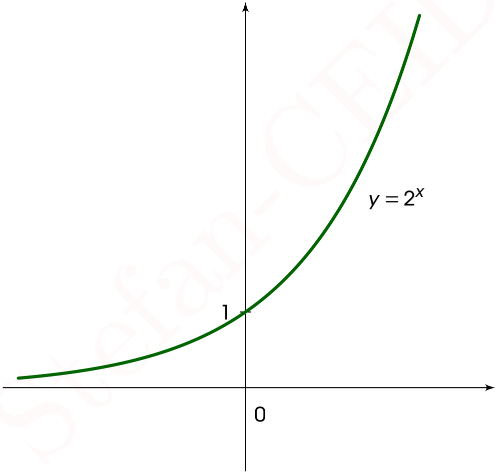
Αν $a > 0$ και $b > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 1$, τότε $a^b > 1$ αν $a > 1$, και $a^b < 1$ αν $0 < a < 1$.

Έστω $x_1 < x_2$

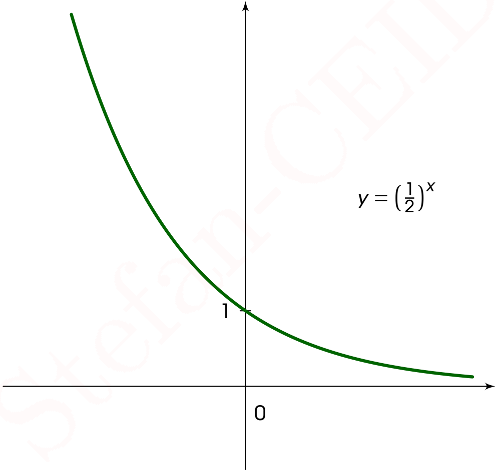
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

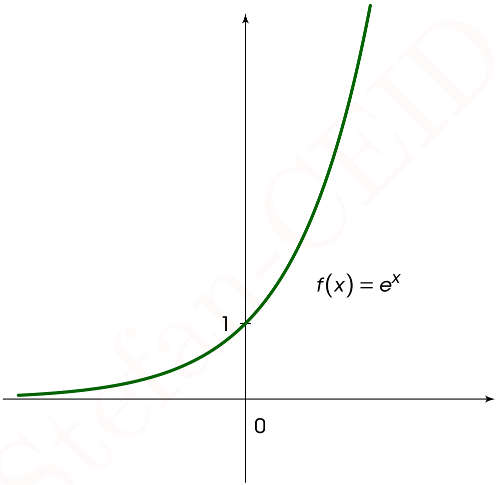
αν $a > 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} > 1$, οπότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα,
αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} < 1$, οπότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο Σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της a^x για $a = 2$.

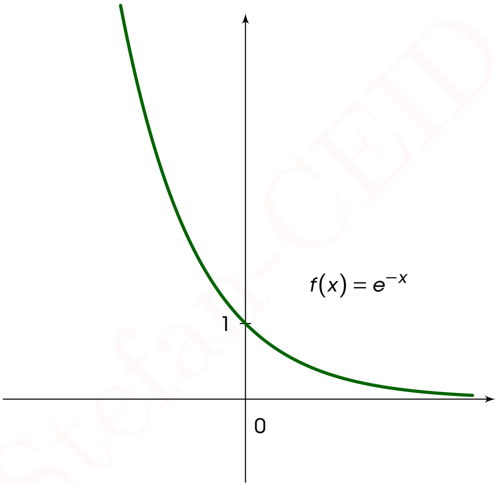


Στο Σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της a^x για $a = 1/2$.





Σχήμα: Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \exp x = e^x$



Σχήμα: Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \exp(-x) = e^{-x}$

Η εκθετική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f(x)=e^x$ είναι αυστηρά αύξουσα, άρα ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

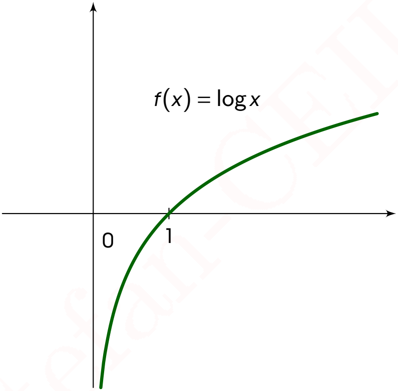
Ορισμός

Για $x>0$ ορίζουμε τη συνάρτηση **λογάριθμο** log με τη σχέση

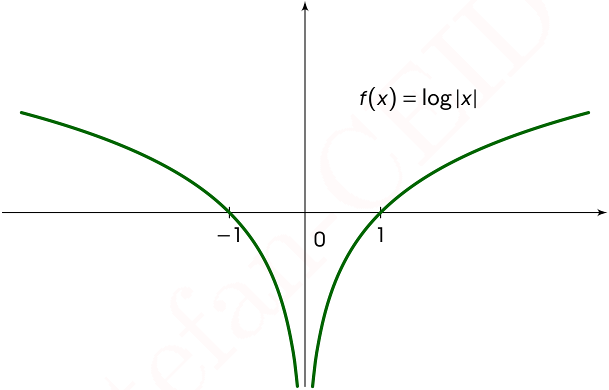
$$y=\log x \Leftrightarrow e^y = x, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Τη συνάρτηση log τη λέμε και φυσικό λογάριθμο και τη συμβολίζουμε και με $\ln x$.

Έτσι $\log = \exp^{-1}$. Η $f(x)=\log x$ είναι αυστηρά αύξουσα.



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log|x|$

Γενικότερα για $a>0$, $a\neq 1$ συμβολίζουμε την αντίστροφη της $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, με $\log_a x$, έτσι ώστε

$$y=\log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \qquad -\infty<y<+\infty,$$

και τη λέμε συνάρτηση **λογάριθμο με βάση** a. Έτσι έχουμε

$$\log_a a^x = x, \quad x\in\mathbb{R}, \qquad \text{και} \qquad a^{\log_a x}=x, \quad x>0.$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
3. $\log_a x^r = r\log_a x$, $r\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a(xy^{-1})=\log_a x+\log_a(y^{-1})=\log_a x-\log_a y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\log x = \log a^{\log_a x} = (\log_a x)(\log a),$$

κατά συνέπεια

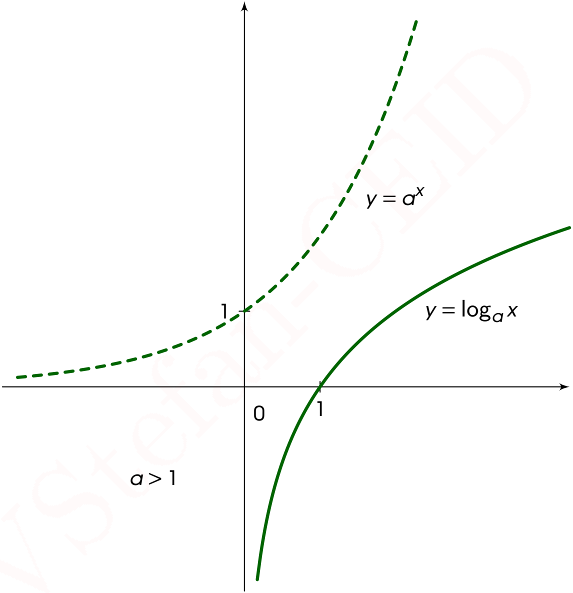
$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x \tag{8}$$

δηλαδή κάθε λογαριθμική συνάρτηση εκφράζεται σαν πολλαπλάσιο του φυσικού λογαρίθμου. Όμοια

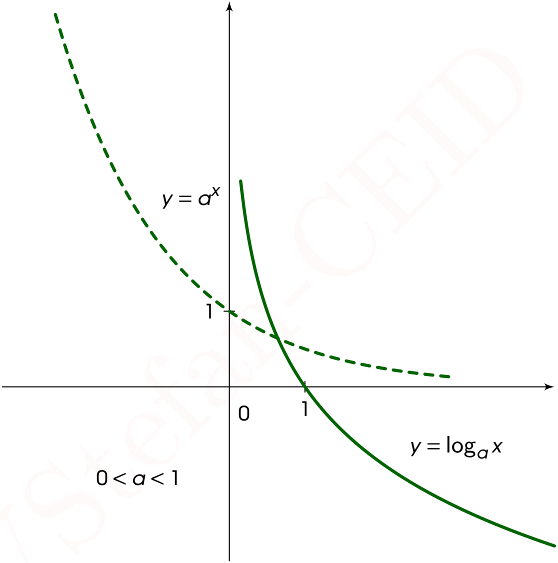
$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a} = \left(e^x\right)^{\log a} \tag{9}$$

δηλαδή κάθε εκθετική συνάρτηση εκφράζεται σαν δύναμη της συνάρτησης exp, ή σαν σύνθεση της εκθετικής συνάρτησης exp με μια γραμμική συνάρτηση

$$a^x = \exp(l_a(x)), \qquad \text{όπου } l_a(x) = x \log a. \tag{10}$$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 1$



Σχήμα: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $0 < a < 1$