Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 4

Σειρές

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

24 Οκτωβρίου 2019

Είδαμε ότι ο $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$s_1 = 1.4, \qquad s_2 = 1.41, \qquad s_3 = 1.414, \qquad \ldots, \qquad s_9 = 1.414213562, \qquad \ldots,$$

$$s_1 = 1 + \frac{4}{10}, \qquad s_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}, \qquad s_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}, \qquad \ldots$$

$$s_9 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{6}{10^8} + \frac{2}{10^9} = \sum_{k=0}^{9} \frac{d_k}{10^k}$$

με $d_0 = 1$, $d_1 = 4$, $d_2 = 1, \ldots, d_9 = 2$. Έτσι ο n-οστός όρος της ακολουθίας είναι

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}, \qquad d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

και επειδή $s_n \to \sqrt{2}$, καθώς $n \to \infty$, είναι λογικό να γράψουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} = \sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

Δηλαδή το σύμβολο $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$ είναι το όριο της ακολουθίας $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Ορισμός

Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad \ldots, \qquad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \ldots$$

Την έκφραση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

λέμε **σειρά** και την σκεφτόμαστε σαν το άθροισμα των άπειρων το πλήθος όρων της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Το a_n λέμε ***n*-οστό όρο της σειράς**. Την $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ την λέμε **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς** με S_n να είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

Ορισμός

Θα λέμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή και αν $S_n \to s$ θα λέμε το s **όριο της σειράς** και θα γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Εάν η σειρά δεν συγκλίνει θα λέμε ότι **αποκλίνει**.

Πρέπει να τονίσουμε τη διπή σημασία του συμβόλου $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Με αυτό εννοούμε και δηλώνουμε, αφενός, το ``άθροισμα'' όλων των όρων της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, και αφετέρου το όριο της ακολουθίας $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ των μερικών αθροισμάτων εφόσον αυτό υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός. Επίσης έχουμε την ισοδυναμία

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = a \tag{1}$$

Παράδειγμα

Για την ακολουθία των φυσικών αριθμών $(n)_{n=1}^{\infty}$, έχουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Επειδή η ακολουθία $(S_n)_{n=1}\infty$ είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

αποκλίνει, αφού

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \to \infty$$

καθώς $n \to \infty$.

Η γεωμετρική σειρά

Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$, όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός, λέγεται **γεωμετρική σειρά**. Θυμίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 1$ και για κάθε φυσικό αριθμό n είναι

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Έτσι ορίζοντας

$$S_0 = a^0 = 1, \quad \text{και } S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Η γεωμετρική σειρά (συνέχεια)

• Εάν $|a| < 1$, τότε $|a|^n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, οπότε $a^n \to 0$, καθώς $n \to \infty$ $(-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n)$, έτσι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}. \tag{2}$$

• Εάν $|a| > 1$, τότε η $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη κατά συνέπεια δεν συγκλίνει, οπότε το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει.

• Εάν $a = 1$, τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = n + 1,$$

ενώ αν $a = -1$, τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{εάν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0 & \text{εάν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Επομένως για $|a| = 1$ το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει.

Η γεωμετρική σειρά (συνέχεια)

Κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|a| < 1$, και στη περίπτωση αυτή, μέσω της (2), είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1. \tag{3}$$

Το a στη σειρά (3) λέγεται **λόγος** της σειράς.

Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

συγκλίνει αφού $|1/2| < 1$ και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Τηλεσκοπική σειρά

Εξετάζουμε ως προς την σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε n είναι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

έτσι για το μερικό άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Τηλεσκοπική σειρά (συνέχεια)

Η σειρά (4) είναι τυπικό παράδειγμα **τηλεσκοπικής σειράς**.

Ορισμός

Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

όπου ο n-οστός όρος της μπορεί να γραφεί στη μορφή $a_n = b_n - b_{n+1}$ λέγεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι τηλεσκοπική και $a_n = b_n - b_{n+1}$, τότε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1})$$
$$= b_1 - b_{n+1}$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

Η αρμονική σειρά

Ας θεωρήσουμε την **αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&\geq S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&\geq S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Η αρμονική σειρά (συνέχεια)

Γενικά

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &\geq S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα και μή φραγμένη αφού για οποιοδήποτε $M > 0$ υπάρχει N ώστε $S_{2^N} = 1 + N/2 > M$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Παρατήρηση

Θα δείξουμε αργότερα ότι η **p-σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

συγκλίνει όταν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

Η εκθετική σειρά

Δείχνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e \tag{5}$$

δεχόμενοι ότι $0! = 1$. Θυμίζουμε ότι e είναι το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Με χρήση του δυωνυμικού θεωρήματος δείξαμε ότι

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \tag{6}$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{7}$$

Για k τυχαίο αλλά σταθερό και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_{n+k} = 1 + \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\left(1 - \frac{2}{n+k}\right)\cdots\left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right)$$

Η εκθετική σειρά (συνέχεια)

$$a_{n+k} \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\left(1 - \frac{2}{n+k}\right)\cdots\left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right),$$

απ' όπου, επειδή $e = \sup a_n$, έπεται ότι

$$e \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\left(1 - \frac{2}{n+k}\right)\cdots\left(1 - \frac{j-1}{n+k}\right),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας το όριο στην ακολουθία στο δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας, το οποίο υπάρχει, έχουμε από την (7)

$$e \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} \geq a_k.$$

Έτσι αν S_k είναι το μερικό άθροισμα της σειράς έχουμε $a_k \leq S_k \leq e$, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έπεται ότι $S_n \to e$, καθώς $n \to \infty$, γεγονός που αποδεικνύει την (5). Τη σειρά στην (5) τη λέμε **εκθετική σειρά**.

Θεώρημα

Εάν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

είναι δυο συγκλίνουσες σειρές και λ, μ είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b.$$

Ορισμός

Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι δύο σειρές, ορίζουμε το άθροισμα και τη διαφορά των σειρών, και τον πολλαπλασιασμό της σειράς με σταθερά με τις σχέσεις

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

οποτεδήποτε οι εκφράσεις στο δεξιό μέλος κάθε σχέσης έχουν έννοια.

Θεώρημα

Αν μια σειρά συγκλίνει ο n-οστός όρος της τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Παρατήρηση

Ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη: *Εάν ο ο n-οστός όρος μιας σειράς δεν τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο, τότε η σειρά αποκλίνει.* Έτσι συμπεραίνουμε ότι κάθε μία από τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

αποκλίνει αφού το όριο του n-οστού όρου καθώς το n τείνει στο άπειρο είτε είναι διάφορο του μηδενός είτε δεν υπάρχει. Σημειώνουμε επίσης ότι **το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει**, όπως είδαμε με την αρμονική σειρά, δηλαδή το γεγονός ότι ο n-οστός όρος τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο δεν εξασφαλίζει ότι η σειρά συγκλίνει.

Θεώρημα

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ μια συγκλίνουσα σειρά. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right| < \epsilon.$$

Παρατήρηση

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε για κάθε αυθαίρετα μικρό $\epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n| < \epsilon, \qquad \forall n \geq N,$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Θεώρημα

Έστω $a_n \geq 0$ για όλα τα n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι φραγμένη.

Ορισμός

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει απολύτως** εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Θεώρημα (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Εάν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Θεώρημα

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αναδιάταξη της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, δηλαδή $b_n = a_{\sigma(n)}$, όπου $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Θεώρημα (Βασικό κριτήριο σύγκρισης)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με $0 \leq a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται σαν $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$ με $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ή

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \tag{8}$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \qquad a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}.$$

Επειδή $0 \leq a_n \leq 9$ έχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) = 1,$$

από το άθροισμα γεωμετρικής σειράς. Κατά συνέπεια η σειρά (8) όντως συγκλίνει και παριστάνει τον πραγματικό αριθμό x.

Θεώρημα (Κριτήριο συμπύκνωσης)

Έστω $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

συγκλίνει.

Παράδειγμα (p-σειρά)

Η p-σειρά με $p > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$. Η περίπτωση $p = 1$ είναι η αρμονική σειρά η οποία δείξαμε ότι αποκλίνει.

Παράδειγμα p-σειρά (συνέχεια)

Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

η οποία είναι γεωμετρική με λόγο $1/2^{p-1}$. Κατά συνέπεια συγκλίνει αν $p-1>0$, ισοδύναμα αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p-1\leq 0$, ισοδύναμα αν $p\leq 1$. Έτσι από το κριτήριο συμπύκνωσης έπεται ότι η p-σειρά συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\leq 1$.

Σημειώνουμε ότι για $p\leq 0$ η παραπάνω σειρά αποκλίνει αφού για $p=0$ ο n-οστός όρος της σειράς είναι ίσος με 1, ενώ για $p<0$ ο n-οστός όρος της σειράς $n^{-p}=n^{|p|}$ τείνει στο άπειρο καθώς $n\to\infty$.

Θεώρημα (Κριτήριο του λόγου)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n \neq 0$, *και έστω*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

1. *Αν* $L < 1$ *η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
2. *Αν* $L > 1$ *η σειρά αποκλίνει.*
3. *Αν* $L = 1$ *το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.*

Πόρισμα

Αν για την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

τότε $a_n \to 0$.

Θεώρημα (Κριτήριο της ρίζας)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Τότε

1. *Αν $L < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
2. *Αν $L > 1$ η σειρά αποκλίνει.*
3. *Αν $L = 1$ το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.*

Πόρισμα

Αν για την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

τότε $a_n \to 0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε σειρές οι όροι των οποίων είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί αριθμοί. Για παράδειγμα

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{2^n}+\cdots==-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$$

Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά των απολύτων τιμών είναι η αρμονική σειρά, αλλά δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει. Η δεύτερη σειρά συγκλίνει σαν γεωμετρική σειρά με λόγο $r=-1/2$, και συγκλίνει και απολύτως.

Ορισμός

Μια σειρά που γράφεται στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad \text{με } a_n\geq 0$$

λέγεται **εναλλασσόμενη** σειρά.

Θεώρημα (Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς)

Έστω ότι

1. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *συγκλίνει.*

Παράδειγμα

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

συγκλίνει. Πράγματι για τη σειρά αυτή έχουμε $a_n = 1/n$, επομένως

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \cdots \geq \frac{1}{n} \geq \cdots \to 0.$$

Έτσι από το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

το μερικό άθροισμα S_n της σειράς είναι μια προσέγγιση του s, αφού $S_n \to s$. Η διαφορά

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

εκφράζει το **σφάλμα** της προσέγγισης του s με το S_n. Το σφάλμα $s - S_n$ λέγεται και **σφάλμα αποκοπής**.

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς)

Έστω ότι για την εναλλασσσόμενη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ισχύει ότι

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0 \qquad \textit{και} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

και έστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Αν S_n είναι το μερικό άθροισμα της σειράς, τότε

$$|s - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

συγκλίνει (γιατί;).

- (α΄) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα όταν το άθροισμα της σειράς προσεγγίζεται από το άθροισμα των 8 όρων της σειράς.
- (β΄) Πόσοι όροι απαιτούνται να αθροιστούν ώστε το σφάλμα να μην υπερβαίνει το 0.001;

(α΄) Αν s είναι το όριο της σειράς τότε μια εκτίμηση του σφάλματος είναι

$$|s - S_8| \leq \frac{1}{2 \cdot 9 - 1} = \frac{1}{17}$$

κατά συνέπεια το σφάλμα δεν υπερβαίνει το $1/17$.

(β΄) Αν ορίσουμε το σφάλμα $E_n := s - S_n$, θέλουμε $|E_n| \leq a_{n+1}$, ισοδύναμα

$$|E_n| \leq \frac{1}{2(n+1)-1} \leq 0.001 \Leftrightarrow 1000 + 1 \leq 2\big(n+1\big) \Leftrightarrow 499.5 \leq n$$

(συνέχεια) κατά συνέπεια απαιτούνται τουλάχιστον 500 όροι ώστε το σφάλμα να μην υπερβαίνει το 0.001.

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά είναι τυπικό παράδειγμα σειράς η οποία συγκλίνει μεν αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Ορισμός

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Παράδειγμα

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

συγκλίνει υπό συνθήκη, αφού

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \cdots \to 0,$$

ενώ η σειρά των απολύτων τιμών είναι p-σειρά με $p = 1/2$, άρα αποκλίνει.

- Είδαμε ότι αν $-1 < x < 1$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά ορίζει, εκεί που συγκλίνει, δηλαδή στο διάστημα $(-1,1)$ την συνάρτηση $f(x) = 1/(1-x)$.

- Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε τη σειρά

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

και ας εξετάσουμε, όπως στην περίπτωση της γεωμετρικής σειράς, για ποιές τιμές του x η σειρά συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι αν $x = 0$ η σειρά συγκλίνει στο 1, ενώ για $x = 1$ συγκλίνει στο e. Για $x \neq 0$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου παίρνουμε

$$\frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή το όριο του σχετικού λόγου είναι μικρότερο του 1 η σειρά συγκλίνει ανεξάρτητα από το ποιό είναι το x, δηλαδή η σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, αφού για $x \in \mathbb{R}$ το όριο ή άθροισμα της σειράς προφανώς εξαρτάται από το x, έχουμε ότι η σειρά ορίζει μια συνάρτηση. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $\exp x$ με τη σχέση

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{9}$$

Παρατηρούμε ότι $\exp 0 = 1$, και $\exp 1 = e$. Θα αποδείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι $\exp x = e^x$.

Η γεωμετική σειρά όπως και η σειρά (9) είναι τυπικά παραδείγματα σειρών των οποίων οι όροι περιέχουν δυνάμεις του x. Οι σειρές αυτές λέγονται **δυναμοσειρές** και θα τις μελετήσουμε στο σχετικό κεφάλαιο.