ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διάλεξη 1.5

Οι φυσικοί αριθμοί, Μαθηματική επαγωγή

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

3 Οκτωβρίου 2019

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ορίζεται μοναδικά από τα αξιώματα του Peano (1858–1932).

- **Αξίωμα 1** Ο 1 είναι φυσικός αριθμός.
- **Αξίωμα 2** Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός επόμενος φυσικός αριθμός n^+.
- **Αξίωμα 3** Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $n^+ = 1$.
- **Αξίωμα 4** Εάν m και n είναι φυσικοί αριθμοί με $m^+ = n^+$, τότε $m = n$.
- **Αξίωμα 5** Εάν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) για κάθε $n \in A$, ο $n^+ \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, $3^+ = 4$, και τα λοιπά, οπότε $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Θεώρημα (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής)

Έστω $p(n)$ να είναι μία πρόταση που διατυπώνεται για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, και είναι τέτοια ώστε:

(1) *Η $p(1)$ είναι αληθής*

(2) *Για κάθε φυσικό αριθμό k όταν η $p(k)$ είναι αληθής, τότε και η $p(k^+)$ είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ακολουθούμε τα βήματα:

(B$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η $p(1)$ είναι αληθής.

(B$_2$) Υποθέτουμε ότι η $p(k)$ είναι αληθής και δείχνουμε ότι η $p(k+1)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών $1, 2, \ldots, n$ ισούται με $n(n+1)/2$, δηλαδή

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

(B$_1$) Για $n = 1$ η (1) γίνεται

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

που ισχύει. Άρα η (1) είναι αληθής για $n = 1$.

(B$_2$) Υποθέτουμε ότι για κάποιο φυσικό k είναι

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{2}$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{3}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \qquad \text{(από την υπόθεση (2))}\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

που είναι η (3).

Συμπέρασμα: Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η (1) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εάν A είναι ένα σύνολο που περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Εάν $|A| = n$ μπορούμε να γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Παρατηρούμε ότι εάν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, συγκεκριμμένα $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Παράδειγμα

Έστω ότι A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $\mathscr{P}(A)$ το δυναμοσύνολο του A. Εάν $|A| = n$, τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

(B$_1$) Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $n = 1$. Έστω A ένα σύνολο με ένα στοιχείο, δηλαδή έστω $A = A_1 = \{a_1\}$. Τότε $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A\}$, οπότε

$$|\mathscr{P}(A)| = 2 = 2^1.$$

(B$_2$) Δεχόμαστε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k$, υποθέτουμε δηλαδή ότι εάν $|A| = k$ τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^k$. Με αυτή την υπόθεση αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k + 1$, δηλαδή εάν A είναι ένα σύνολο με $k + 1$ στοιχεία τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^{k+1}$. Έστω λοιπόν ότι

$$A = A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$$

Τότε όμως

$$A = A_k \cup \{a_{k+1}\}, \qquad \text{όπου} \qquad A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A_k) \cup \{B \cup \{a_{k+1}\} : B \in \mathscr{P}(A_k)\}$$

(γιατί;). Αρα

$$|\mathscr{P}(A)| = |\mathscr{P}(A_k)| + |\mathscr{P}(A_k)| = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.
Έτσι ο ισχυρισμός είναι σωστός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι εάν $A = \varnothing$, τότε $|A| = 0$, και $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$, οπότε $|\mathscr{P}(A)| = 1 = 2^0$, δηλαδή η πρόταση: Εάν $|A| = n$, τότε $\mathscr{P}(A)| = 2^n$ είναι αληθής για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αρκετές φορές γράφουμε

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}. \tag{4}$$

Παράδειγμα (Η ανισότητα του Bernoulli)

Εάν $a \geq -1$, να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$(1+a)^n \geq 1+na. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι για $a=-1$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα αφού $0 \geq 1-n$.

(B$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n=1$. Πραγματικά

$$(1+a)^1 = 1+a,$$

άρα η (5) ιχύει σαν ισότητα.

(B$_2$) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η (5) ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλαδή

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\
&\geq (1+a)(1+ka) \qquad \text{(από την υπόθεση, αφού } 1+a \geq 0\text{)} \\
&= 1+ka+a+ka^2 \\
&= 1+(k+1)a+ka^2 \\
&\geq 1+(k+1)a \qquad (ka^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

που είναι η ανισότητα που θέλουμε.
Άρα η (5) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός

Εάν $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τον αριθμό ***n* παραγοντικό**, $n!$ με τη σχέση

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Έτσι $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Ορίζουμε επίσης $0! = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ορίζουμε τον **δυωνυμικό συντελεστή** n ανά k με τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ιδιότητες των δυωνυμικών συντελεστών

Εάν $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Θεώρημα (Το Δυωνυμικό Θεώρημα)

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \qquad (6)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

Πόρισμα

Εάν n είναι φυσικός αριθμός, τότε

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (7)$$