Θ5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \delta x - \ln(2+x) - 1, \qquad x > -2,$$

όπου δ είναι μια πραγματική παράμετρος.

(α΄) Για ποιες τιμές της παραμέτρου δ (πιθανόν να είναι όλα τα σημεία διαστήματος) η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο;

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$ και τα ακρότατα είναι μεταξύ των σημείων μηδενισμού της παραγώγου, έτσι

$$f'(x) = \delta - \frac{1}{2+x} = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{2+x}.$$

Επειδή $x > -2$ έπεται ότι $x + 2 > 0$, οπότε από την παραπάνω σχέση έπεται ότι η f έχει ακρότατο αν και μόνο αν $\delta > 0$. Για παράδειγμα, αν $\delta \leq 0$ η f είναι φθίνουσα.

(β΄) Προσδιορίστε τη θέση και το είδος του τοπικού ακρότατου (μέγιστο/ελάχιστο).

Για $\delta > 0$ υπάρχει ακρότατο εκεί όπου

$$\delta = \frac{1}{2+x} \Leftrightarrow x_0 = -2 + \frac{1}{\delta}.$$

Αν $x < -2 + \frac{1}{\delta}$, ισοδύναμα $\delta < \frac{1}{2+x}$, ειναι $f'(x) < 0$, ενώ αν $x > -2 + \frac{1}{\delta}$, ισοδύναμα $\delta > \frac{1}{2+x}$, ειναι $f'(x) > 0$, κατά συνέπεια η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο x_0.

(γ΄) Σχεδιάστε ένα πρόχειρο γράφημα της f.

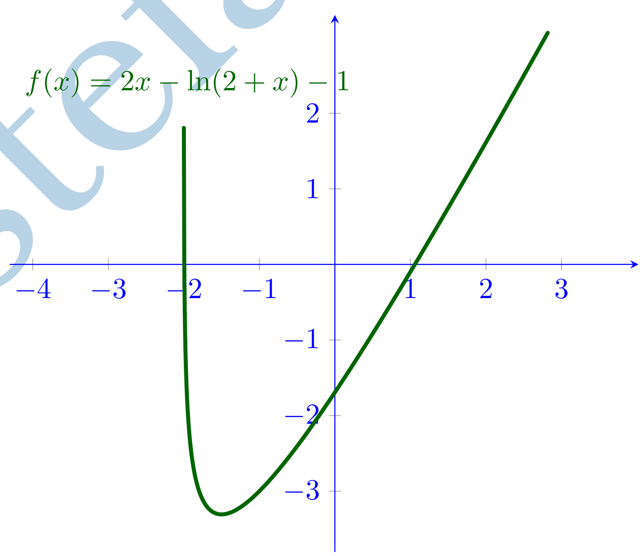
Για $\delta > 0$ υπάρχει ακρότατο εκεί όπου

$$\delta = \frac{1}{2+x} \Leftrightarrow x_0 = -2 + \frac{1}{\delta}.$$

Από το (β$'$) έχουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-2, -2 + \frac{1}{2})$ και αύξουσα στο $(-2 + \frac{1}{2}, +\infty)$, ενώ στο $x = -2$ έχει ασύμπτωτη. Επίσης

$$f''(x) = \frac{1}{(2+x)^2} > 0$$

συνεπώς η f είναι κυρτή. Ακολουθεί το γράφημα της f για $\delta = 2$.



Τα ανάλογα ισχύουν και τις υπόλοιπες περιπτώσεις:

$$f(x) = \delta x + \ln(1 + x/2) + 1, \qquad x > -2, \qquad f(x) = \delta x + \ln(1+x) + 1, \qquad x > -1,$$

$$f(x) = \delta x - \sqrt{1-x} + 1, \qquad x \leq 1,$$

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \delta x, \qquad x \geq -\frac{1}{2}, \qquad f(x) = \sqrt{1+x} - \delta x - \frac{1}{2}, \qquad x \geq -1,$$