Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ 28 Ιανουαρίου 2020

+1/20/1010

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης	
ΕΠΩΝΥΜΟ:	ΟΝΟΜΑ:
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ:
ΑΙΘΟΥΣΑ:	ΣΤΗΛΗ:
ΜΟΝΑΔΕΣ/ΒΑΘΜΟΣ	

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

1. Στο διαγώνισμα υπάρχουν κυρίως τριών ειδών ερωτήματα.
   - Ερωτήματα με την ένδειξη □ είναι ερωτήματα του τύπου "σωστό - λάθος" και καλείσθε να γράψετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στο τετράγωνο αν η έκφραση που ακολουθεί είναι, αντίστοιχα, αληθής ή ψευδής.
   - Ερωτήματα με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε μόνο την απάντηση.
   - Ερωτήματα στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.
   - Στα ερωτήματα με την ένδειξη □ ή ■ μην αφήνετε την τύχη να επιλέξει για εσάς την απάντηση - λύση. Εάν δεν γνωρίζετε την απάντηση, κάνετε έναν έλεγχο στο πρόχειρο.
2. Στην εξέταση επιτρέπεται να έχετε το βιβλίο που έχετε επιλέξει από το σύστημα Εύδοξος. **Δίνεται επίσης και τυπολόγιο το οποίο παραδίδετε μαζί με το γραπτό σας**.
3. **Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά**.
4. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις
(συνδυασμός διαφορετικών εκδοχών)

Θ1. (αʹ) **(9 μον.)** Δείξτε ότι αν $x > 0$ και $y > 0$, τότε

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|.$$

Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ κατά συνέπεια από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έπεται ότι

$$e^{-x} - e^{-y} = -e^{-\xi}(x - y) \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } y. \tag{1}$$

Επειδή $x > 0$ και $y > 0$ έπεται ότι $\xi > 0$ συνεπώς $e^{-\xi} < 1$. Έτσι από την σχέση (1) υπολογίζουμε

$$|e^{-x} - e^{-y}| = \frac{1}{e^{\xi}}|x - y| \Rightarrow |e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|.$$

(βʹ) **(8 μον.)** Να βρεθεί το $K > 0$ για το οποίο ισχύει

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq \frac{|x - y|}{10}, \qquad \text{για} \quad x > K, \;\; y > K.$$

Από το (αʹ) έχουμε

$$|e^{-x} - e^{-y}| = \frac{1}{e^{\xi}}|x - y|$$

και θέλουμε

$$\frac{1}{e^{\xi}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 \leq e^{\xi} \Leftrightarrow \log 10 \leq \xi.$$

Κατά συνέπεια η ζητούμενη σχέση εξασφαλίζεται, αφού το ξ είναι μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους x, y, αν $x \geq \log 10$ και $y \geq \log 10$. Ισοδύναμα η προς απόδειξη σχέση ισχύει στο διάστημα $[\log 10, +\infty)$.

Θ2. **(15 μον.)** Για $a > 0$ (καλύπτει όλες τις περιπτώσεις) δείξτε ότι

$$ax \leq \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}a^{3/2}, \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Έστω

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - ax + \frac{2}{3}a^{3/2}, \qquad x > 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$f'(x) = x^2 - a.$$

Παρατηρούμε ότι (ι) $f'(x) < 0$ αν $0 < x < \sqrt{a}$ και (ιι) $f'(x) > 0$ αν $x > \sqrt{a}$, κατά συνέπεια η f είναι φθίνουσα στο $0 < x < \sqrt{a}$ και αύξουσα στο $x > \sqrt{a}$, επομένως παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $\sqrt{a}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(\sqrt{a}) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - ax + \frac{2}{3}a^{3/2} &\geq \frac{a^{3/2}}{3} - a^{3/2} + \frac{2}{3}a^{3/2} \\ \frac{x^3}{3} - ax + \frac{2}{3}a^{3/2} &\geq 0 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}a^{3/2} &\geq ax \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Θ3. **(22 μον.)** ($= 2 \times 11$) Στις λύσεις περιέχεται ένα επιπλέον ερώτημα ώστε να καλυφθούν όλες οι περιπτώσεις.

■ Το ανάπτυγμα Maclaurin της e^{x^2} είναι $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

αφού το αποτέλεσμα $e^{\square} = 1 + \square + \dfrac{\square^2}{2!} + \dfrac{\square^3}{3!} + \cdots + \dfrac{\square^n}{n!} + \cdots, \quad \square \in \mathbb{R}$ **είναι δυναμοσειρά**.

☐ Αν $0 < a < b$, τότε $\displaystyle\int_0^a \cos^2 x\, dx \leq \int_0^b \cos^2 x\, dx$. **ΣΩΣΤΟ**

$\displaystyle\int_0^b \cos^2 x\, dx = \int_0^a \cos^2 x\, dx + \int_a^b \cos^2 x\, dx$ και $\displaystyle\int_a^b \cos^2 x\, dx > 0$.

■ $\sup\left\{1 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\} = 1$

αφού η ακολουθία $(1 - 1/n)$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο 1.

☐ Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|a_n|}{1 + 2|a_n|}$ συγκλίνει. **ΣΩΣΤΟ**

$$0 \leq \frac{2|a_n|}{1 + 2|a_n|} \leq 2|a_n| \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|a_n|}{1 + 2|a_n|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

■ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = \lim_{p\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right]^a = e^a \qquad p = n/a \to \infty.$

καλύπτει όλες τις περιπτώσεις $a = 2, 1/2, 3, 1/3$.

☐ $\displaystyle\lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = 1$. **ΣΩΣΤΟ**

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \pi.$$

☐ Για $a > 0$ ισχύει $\displaystyle\int_0^a f(a - x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$. **ΣΩΣΤΟ**

Αν $y = a - x$, τότε $dy = -dx$, επομένως

$$\int_0^a f(a - x)\, dx = -\int_a^0 f(y)\, dy = \int_0^a f(y)\, dy = \int_0^a f(x)\, dx.$$

■ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1 \qquad r = 1/n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

☐ Αν $f(x) \geq 0$ και $\displaystyle\int_0^L f(x)\, dx < +\infty$ για κάθε $L > 0$, τότε $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx < +\infty$. **ΛΑΘΟΣ**

Αν $f(x) = 1$, τότε $\displaystyle\int_0^L f(x)\, dx = L$, αλλά $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{L\to\infty} \int_0^L 1\, dx = \lim_{L\to\infty} L = +\infty$.

☐ Αν $f(x) \geq 0$ και $\displaystyle\int_0^L f(x)\, dx \leq M$ για κάθε $L > 0$, τότε $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx \leq M$. **ΣΩΣΤΟ**

Η $F(L) = \displaystyle\int_0^L f(x)\, dx$ είναι αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση του L, κατά συνέπεια το όριό της καθώς $L \to \infty$ υπάρχει και θα είναι επίσης μικρότερο ή ίσο του M.

☐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ συγκλίνει. **ΣΩΣΤΟ**

$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, p-σειρά με $p > 1$.

■ $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n = \frac{1}{1-1/\pi} = \frac{\pi}{\pi-1}$ (γεωμετρική σειρά με λόγο $1/\pi < 1$).

Θ4. (15 μον.) Υπολογίστε, αν αυτό υπάρχει, το όριο της σειράς $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-1)}$.

Ζητάται το όριο της σειράς, άρα η σειρά είναι κάποιας ειδικής μορφής. Μοιάζει με τηλεσκοπική αλλά οι αριθμοί που εμφανίζονται διαφέρουν κατά δύο. Τί κάνουμε; Ό,τι γνωρίζουμε. Γράφοντας

$$\frac{1}{(n-3)(n-1)} = \frac{a}{n-3} + \frac{b}{n-1} \qquad \text{βρίσκουμε} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad b = -\frac{1}{2}$$

Έτσι για $N > 4$ και μεγάλο, υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{(n-3)(n-1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N-1}\right)\right] \end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι για $n = 6$, όπου έχουμε το άθροισμα των τριών πρώτων παρενθέσεων, αυτό είναι ίσο με $1+1/2-1/4-1/5$, ενώ για $n = 7$ που έχουμε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων παρενθέσεων αυτό είναι ίσο με $1+1/2-1/5-1/7$, έτσι (γεγονός που αποδεικνύεται αυστηρά με επαγωγή) προκύπτει ότι

$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\right),$$

κατά συνέπεια

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\right) = \frac{3}{4}.$$

Θ5. Γνωρίζουμε ότι

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Αποδεικνύεται ότι

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

(α΄) **(7 μον.)** Να βρεθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \qquad \text{στο διάστημα} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}.$$

Προσεγγίζουμε την συνάρτηση με πολυώνυμο βαθμού $5 = 2 \cdot 2 + 1$, κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \left| \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \right| &\le \frac{|x|^{2\cdot 2+3}}{2\cdot 2+3}, \qquad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \qquad (2) \\ &\le \frac{(1/2)^7}{7} \\ &= \frac{1}{896} \end{aligned}$$

(β΄) **(5 μον.)** Να βρεθεί το ελάχιστο n για το οποίο

$$|\arctan x - P_n(x)| \le \frac{1}{10^3}, \qquad \text{στο διάστημα} \quad -1 \le x \le 1.$$

Αναζητάμε το ελάχιστο n για το οποίο

$$|\arctan x - P_n(x)| = |R_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \le \frac{1}{10^3}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Ισοδύναμα

$$\begin{gathered} \frac{1}{2n+3} \le \frac{1}{10^3} < \frac{1}{2(n-1)+3} \\ 2(n-1)+3 < 10^3 \le 2n+3 \\ n-1 < \frac{10^3-3}{2} \le n \\ n-1 < 498.5 \le n \end{gathered}$$

Επομένως $n = 499$.

(γ΄) **(4 μον.)**Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Από τη σχέση (2) στο (α΄) διαιρώντας με $x \ne 0$ βρίσκουμε

$$\left| \frac{\arctan x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} \right) \right| \le \frac{|x|^6}{7}, \qquad -1 \le x \le 1$$

οπότε παίρνοντας το όριο του $x \to 0$ βρίσκουμε

$$\begin{gathered} \lim_{x\to 0} \left| \frac{\arctan x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} \right) \right| \le \lim_{x\to 0} \frac{|x|^6}{7} \\ \left| \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} - 1 \right| \le 0 \end{gathered}$$

ισοδύναμα

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

Θ6. (α′) **(5 μον.)** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^p}, \qquad p > 0.$$

(Βλέπε Διάλεξη 9 σελίδα 16.) Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\infty} x^p = \infty \qquad \text{αφού } p > 0,$$

επομένως από τον κανόνα του L'Hospital για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^p} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x^p)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} \\
&= \frac{1}{p} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(β′) **(10 μον.)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^p}\, dx, \qquad p > 1 \qquad (\text{καλύπτει όλες τις περιπτώσεις } p = 3, 4, 5, 6).$$

Για $L > 1$ γράφουμε

$$\int_1^L \frac{\log x}{x^p}\, dx = \int_1^L \frac{1}{x^{p-1}} \frac{\log x}{x}\, dx$$

οπότε για

$$u = \log x \Leftrightarrow x = e^u, \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^L \frac{\log x}{x^p}\, dx &= \int_0^{\log L} \frac{1}{e^{(p-1)u}} u\, du \\
&= \int_0^{\log L} e^{(1-p)u} u\, du \\
&= \int_0^{\log L} \left(\frac{e^{(1-p)u}}{1-p} \right)' u\, du \\
&= \frac{e^{(1-p)u}}{1-p} u \Bigg]_0^{\log L} - \int_0^{\log L} \frac{e^{(1-p)u}}{1-p}\, du \\
&= \frac{1}{1-p} \left[\frac{u}{(e^u)^{p-1}} \right]_0^{\log L} - \frac{e^{(1-p)u}}{(1-p)^2} \Bigg]_0^{\log L} \\
&= \frac{1}{1-p} \left[\frac{\log L}{L^{p-1}} \right] - \frac{1}{(1-p)^2} \left(\frac{1}{L^{p-1}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Επειδή από την υπόθεση $p - 1 > 0$ από το (α′) έχουμε

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{p-1}} = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{L\to\infty} \frac{\log L}{L^{p-1}}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\log x}{x^p}\, dx &= \lim_{L\to\infty} \int_1^L \frac{\log x}{x^p}\, dx \\
&= \lim_{L\to\infty} \left\{ \frac{1}{1-p} \left[\frac{\log L}{L^{p-1}} \right] - \frac{1}{(1-p)^2} \left(\frac{1}{L^{p-1}} - 1 \right) \right\} \\
&= \frac{1}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{(p-1)^2}.
\end{aligned}$$