Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διδάσκων: Ε. Στεφανόπουλος 22 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης			
ΕΠΩΝΥΜΟ:		ΟΝΟΜΑ:	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:		ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ:	
ΑΙΘΟΥΣΑ:		ΣΤΗΛΗ:	

Βαθμολογία						
Σελ1.	Σελ2.	Σελ3.	Σελ4.	Σελ5.	Άθροισμα	Τελικός Βαθμός

Στο διαγώνισμα υπάρχουν δύο ειδών ερωτήματα. Σε αυτά με την ένδειξη Α Ψ, (αληθής ή ψευδής) καλείσθε απλά να επιλέξετε και να κυκλώσετε την τιμή Α ή Ψ. Στα υπόλοιπα ερωτήματα καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά ¨οικονομική απόδειξη-λύση¨ για το ζητούμενο.

Παραδίδετε το γραπτό ΜΑΖΙ με το τυπολόγιο. Η ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΕΙΝΑΙ 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θ1. Επιλέξτε και κυκλώστε ανάλογα. Αν οι f και g είναι αύξουσες συναρτήσεις

(α΄) Η $f+g$ είναι αύξουσα. Α Ψ

(β΄) Η fg είναι αύξουσα. Α Ψ

Οι $f(x)=e^x$, $g(x)=x$ είναι αύξουσες συναρτήσεις, $-2<-1$, αλλά

$$f(-2)g(-2) > f(-1)g(-1) \Leftrightarrow -2e^{-2} > -e^{-1} \Leftrightarrow e > 2.$$

Θ2. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του M για την οποία ισχύει $|x^3-y^3| \le M|x-y|$ για όλα τα x, y στο διάστημα $[-2,1]$.

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής για $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$ έχουμε

$$x^3-y^3 = 3\xi^2(x-y)$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και y, επομένως

$$\begin{aligned} |x^3-y^3| &= 3\xi^2|x-y| \\ &\le 3\Big(\max_{-2\le\xi\le 1}\xi^2\Big)|x-y| \\ &= 3(-2)^2|x-y|. \end{aligned}$$

Άρα το ελάχιστο M για το οποίο ισχύει η ανισότητα είναι ίσο με 12.

Σημειώστε ότι για $M=13$ η ανισότητα ισχύει, ενώ για $M=11$ δεν ισχύει για όλα τα x και y στο $[-2,1]$ (γιατί;).

Θ3. Επιλέξτε και κυκλώστε ανάλογα

(α΄) Εάν η f έχει απόλυτο (ολικό) ελάχιστο στο c, τότε $f'(c) = 0$. Α Ψ

$f(x) = |x|$ και $f(0) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο.

(β΄) Εάν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c, τότε $f'(c) = 0$. Α Ψ

$f(x) = |x|$ και $f(0) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο.

(γ΄) Εάν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, και $f(-1) = f(1)$, τότε υπάρχει c με $|c| < 1$ ώστε $f'(c) = 0$. Α Ψ

Είναι το Θεώρημα της μέσης τιμής: $f(-1) - f(1) = f'(c)(-1-1)$, με $-1 < c < 1$.

Θ4. Η ταχύτητα v ενός κύματος μήκους L είναι

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

όπου K και C είναι θετικές σταθερές. Ποιό είναι το μήκος κύματος που ελαχιστοποιεί την ταχύτητα;

Η ταχύτητα v ελαχιστοποιείται όταν η υπόριζη ποσότητα ελαχιστοποιείται (καλό ε;), έτσι για

$$f(L) = \frac{L}{C} + \frac{C}{L}, \qquad L > 0$$

βρίσκουμε

$$f'(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C} - \frac{C}{L^2} = 0 \Leftrightarrow L^2 = C^2 \Rightarrow L = C \qquad (L > 0).$$

Παρατηρείστε ότι $f(L) \to +\infty$ καθώς $L \to 0+$ ή $L \to +\infty$, και επειδή το $L = C$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο έπεται ότι στο $L = C$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της (πράγματι

$$f''(L) = \frac{2C}{L^3} > 0$$

δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$) άρα $\min v = v(C) = K\sqrt{2}$.

Θ5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, επιλέξτε και κυκλώστε ανάλογα

(α΄) Αν $0 < a < b$, τότε $\int_0^a f^2(x)\,dx \leq \int_0^b f^2(x)\,dx$. Α Ψ

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \int_0^a f^2(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad \text{και} \qquad \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0.$$

(β΄) Αν $f(x) \to 0$, καθώς $x \to +\infty$, τότε $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$. Α Ψ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0 \qquad \text{αλλά} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \log(1+a) = +\infty.$$

(γ΄) Αν $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = 2018$, τότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $\int_M^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \frac{1}{2018}$. Α Ψ

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = 2018 \Rightarrow \lim_{a\to+\infty} \int_0^a |f(x)|\,dx = 2018, \quad \text{άρα} \quad \lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = 0.$$

Θ6. (α') Το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x}$$

υπάρχει. Για $\xi = x-1$ έχουμε $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x} = -\lim_{\xi\to 0} \frac{\sin\xi}{\xi} = -1.$ Ⓐ Ψ

(β') Εάν οι f και g είναι συνεχείς στο $[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Για $f = g = 1$ θα είχαμε $b-a = (b-a)^2$ A Ⓟ

(γ') Εάν η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2.$$

$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \int_a^b ([f(x)]^2)'\,dx = [f(x)]^2|_a^b.$ Ⓐ Ψ

(δ') Ισχύει η ισότητα

$$\int_0^1 e^{1-x}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx.$$

Αλλαγή μεταβλητής $y = 1-x$. Ⓐ Ψ

(ε') Κυκλώστε το σωστό. Το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

συγκλίνει ή αποκλίνει. Για $L > 1$ είναι

$$\Big|\int_1^L \frac{\sin x}{x^2}\,dx\Big| \le \int_1^L \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx \le \int_1^L \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{L} \Rightarrow \Big|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx\Big| \le 1.$$

Θ7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

(α') Εάν $\alpha > 0$ και $\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)\,dx < +\infty$, τότε το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Ⓐ Ψ
Για $x \ge 1$ είναι $0 < f(x) \le x^\alpha f(x) \Rightarrow 0 < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)\,dx.$

(β') Εάν η f είναι φραγμένη, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

συγκλίνει για κάθε $s > 0$. Ⓐ Ψ
Αν $|f(x)| \le M$ και $L > 1$, τότε

$$\Big|\int_1^L e^{-sx} f(x)\,dx\Big| \le M\int_1^L e^{-sx}\,dx = \frac{M}{s}(1 - e^{-sL}).$$

(γ') Εάν $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ και $\beta > 0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\beta}\,dx$ συγκλίνει. Ⓐ Ψ
Για $x \ge 1$ είναι $0 < \frac{f(x)}{x^\beta} \le f(x) \Rightarrow 0 < \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\beta}\,dx \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$

Θ8. Επιλέξτε και κυκλώστε ανάλογα. Δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(α') Εάν $a_n \to 0$, τότε η σειρά συγκλίνει. A Ψ
$\frac{1}{n} \to 0$, αλλά η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

(β') Εάν η σειρά συγκλίνει, τότε $a_n \to 0$. A Ψ
Αν $\sum a_n = s$ και $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, τότε $a_n = S_n - S_{n-1} \to s - s$.

(γ') Εάν $\sum |a_n|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει. A Ψ
$|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

(δ') Εάν $a_n \nrightarrow 0$, τότε η σειρά αποκλίνει. A Ψ
(β') $\Leftrightarrow$ (δ').

(ε') Εάν η σειρά $\sum a_n 4^n$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n (-2)^n$ συγκλίνει. A Ψ
Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum a_n x^n$, τότε $R \geq 4$ και $|-2| < 4 \leq R$.

(ϛ') Εάν η σειρά $\sum a_n 6^n$ αποκλίνει, τότε η $\sum a_n 8^n$ αποκλίνει. A Ψ
Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum a_n x^n$, τότε $R \leq 6$ και $8 > 6 \geq R$.

Θ9. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_1 = 1, \qquad \text{και} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε (με μαθηματική επαγωγή;) ότι

(α') Η ακολουθία είναι άνω φραγμένη
Σημειώνουμε ότι από τον ορισμό της ακολουθίας έπεται ότι $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, γενικά $a_n > 0$ για κάθε n.

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}, \qquad a_3 = \sqrt{2a_2} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2, \qquad a_4 = \sqrt{2a_3} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

Δείχνουμε ότι $a_n \leq 2$.
Είναι $a_1 = 1 < 2$. Αν $a_k \leq 2$, τότε $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \leq \sqrt{4} = 2$, άρα $a_n \leq 2$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(β') Η ακολουθία είναι αύξουσα
Αφού $0 < a_n \leq 2$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n.$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να δειχτεί και με επαγωγή.
Είναι $a_1 < a_2$ βλέπε (α'). Αν $a_n \leq a_{n+1}$, τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

(γ') Συμπεράνετε ότι συγκλίνει, και υπολογίστε το όριο.
Η ακολουθία σαν αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει. Αν α είναι το όριο της ακολουθίας παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ στην αναδρομική σχέση, από την συνέχεια της συνάρτησης τετραγωνική ρίζα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2a_n} \Rightarrow \alpha = \sqrt{2\alpha} \Rightarrow \alpha = 2.$$

Θ10. Πόσο είναι το μέγιστο δυνατό σφάλμα στην προσέγγιση

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

όταν $-0.3 \leq x \leq 0.3$.

Το άθροισμα που προσεγγίζει το $\sin x$ είναι το πολυώνυμο Taylor, βλέπε τυπολόγιο. Επειδή το ανάπτυγμα είναι εναλλασσόμενη σειρά για $x \neq 0$, έχουμε ότι

$$\text{σφάλμα} = \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \left| \frac{x^7}{7!} \right| \leq \frac{0.3^7}{7!}$$

βλέπε Thomas σελ. 631, ή Σημειώσεις σελ. 71.

Θ11. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin, της $f(x) = \log(1-2x)$, δηλαδή η δυναμοσειρά γύρω από το $x = 0$, καθώς και το διάστημα σύγκλισης της σειράς.

Επειδή

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad -1 < x \leq 1$$

τότε για $-1 < -2x \leq 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \log(1-2x) &= -2x - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n} + \cdots \\ &= -2x - \frac{2^2}{2}x^2 - \frac{2^3}{3}x^3 - \cdots - \frac{2^n}{n}x^n - \cdots \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n, \qquad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Θ12. Γνωρίζουμε ότι

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Εάν $f(x) = e^{x^2}$ υπολογίστε τις παραγώγους όλων των τάξεων της f στο $x = 0$, δηλαδή $f^{(n)}(0)$ για $n = 1, 2, \ldots$

Γνωρίζουμε ότι

$$\text{αν} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad \text{τότε} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

κατά συνέπεια

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Επειδή

$$f(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

έχουμε

$$a_{2k+1} = 0 \qquad \text{και} \qquad a_{2k} = \frac{1}{k!}.$$

Συνεπώς

(α') $f^{(2k+1)}(0) = 0$

(β') $f^{(2k)}(0) = \dfrac{(2k)!}{k!}$.