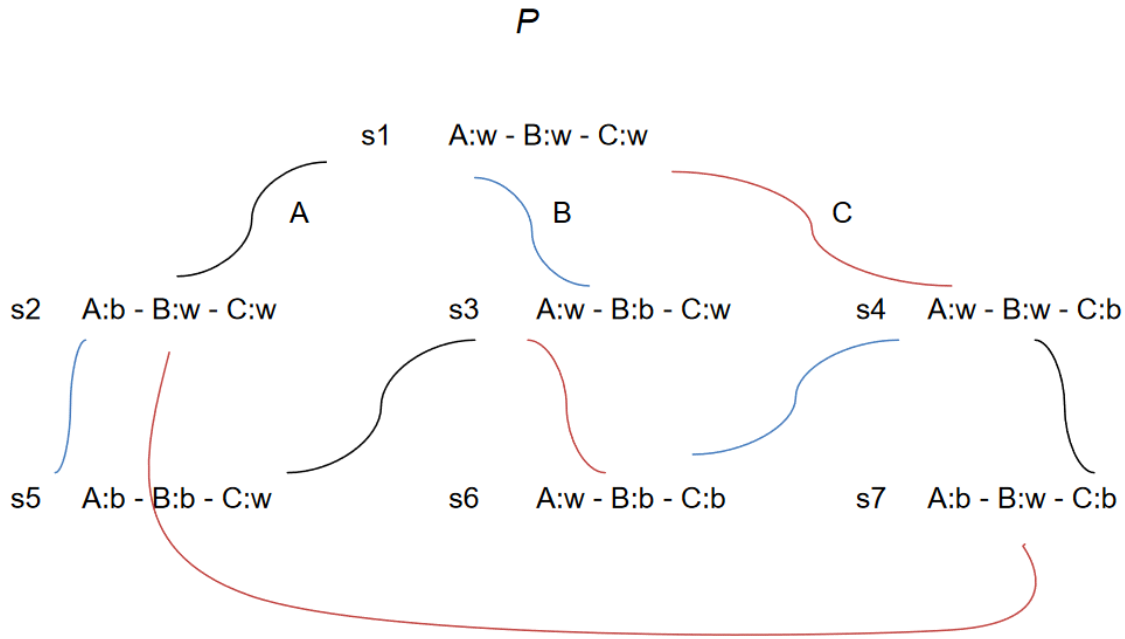


a Η γνώση των παικτών όταν A, B, C white, συμβολικά

Το παρακάτω μοντέλο P θεωρείται **κοινή γνώση**: επίσης όλοι οι παίκτες μπορούν να υπολογίσουν την τιμή αλήθειας οποιουδήποτε τύπου, σε οποιαδήποτε κατάσταση του μοντέλου.



Τύπος **nobody-knows-color**: $\phi = (\neg(K_A AisWh) \wedge \neg(K_B BisWh) \wedge \neg(K_C CisWh))$

$$(P,s) \models \phi \quad \text{για } s \neq s5, s6, s7$$

$$(P,s5) \models (\neg(K_A AisWh) \wedge \neg(K_B BisWh) \wedge (K_C CisWh))$$

$$(P,s6) \models ((K_A AisWh) \wedge \neg(K_B BisWh) \wedge \neg(K_C CisWh))$$

$$(P,s7) \models (\neg(K_A AisWh) \wedge (K_B BisWh) \wedge \neg(K_C CisWh))$$

$$(P,s) \models (K_A \phi) \quad \text{για } s = s1, s2 \text{ μόνο.}$$

$$(P,s) \models (K_B \phi) \quad \text{για } s = s1, s3 \text{ μόνο.}$$

$$(P,s) \models (K_C \phi) \quad \text{για } s = s1, s4 \text{ μόνο.}$$

Τύπος **Όλοι ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**:

$$(E\phi) \equiv_{\text{ορισ}} ((K_A \phi) \wedge (K_B \phi) \wedge (K_C \phi))$$

$$1) \quad (P,s) \models (E\phi) \quad \text{για } s = s1 \text{ μόνο}$$

$$2) \quad (P,s) \models \neg(K_X (K_Y \phi)) \quad \text{για κάθε παίκτες } X \neq Y \text{ και για κάθε κατάσταση } s.$$

Ερώτημα 1 Πώς θα μπορούσαν οι παίκτες να ενημερώσουν το μοντέλο, μετά την πρώτη (δημόσια) απόκρισή τους;

b Η γνώση των παικτών όταν **A, B, C white, εμπειρικά**

- (0) Συλλογισμός του A : αφού βλέπω 2 λευκά, δεν μπορώ να συμπεράνω το χρώμα μου.
Συλλογισμός του B : αντίστοιχα.
Συλλογισμός του C : αντίστοιχα.

Άρα: κανείς δεν ξέρει το χρώμα του.

- (1) Συλλογισμός του A :
Αν είμαι λευκός, οι B , C δεν μπορούν να συμπεράνουν το χρώμα τους.
Αν είμαι μαύρος, οι B , C δεν μπορούν να συμπεράνουν το χρώμα τους.
Άρα: **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του.**
Συλλογισμός του B : αντίστοιχα.
Συλλογισμός του C : αντίστοιχα.

Άρα: **όλοι ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του.**

Παρατήρηση 1 Έστω ότι **A, B, C white**, και οι παίκτες κάνουν συλλογισμούς όπως παραπάνω: τότε **ξέρουν** ότι **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του πριν την πρώτη απόκρισή τους**. Από την άλλη μεριά, μετά την πρώτη (δημόσια) απόκρισή τους: οι παίκτες θα **ξέρουν** πως **όλοι ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Ερώτημα 2 Έστω ότι **A, B, C white**.

Στους συλλογισμούς (1) κάθε παίκτης αναπαράγει από την πλευρά του συλλογισμούς των άλλων παικτών.

Είναι δυνατόν ένας παίκτης να αναπαραγάγει τους συλλογισμούς (1) , ώστε να συμπεράνει από την πλευρά του -- πριν την πρώτη απόκρισή τους -- ότι: **όλοι ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του;**

Ερώτημα 3 Έστω ότι **A black, B, C white**.

Είναι αλήθεια ότι **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του;**

Είναι εφικτό για τους παίκτες να συμπεράνουν ότι: **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του;**

c Η γνώση των παικτών όταν A, B, C white, εμπειρικά με βάση το μοντέλο P

Τα παρακάτω θεωρούνται κοινή γνώση των παικτών:

Το μοντέλο P .

Το ότι οι παίκτες μπορούν να εσληθεύσουν την τιμή αλήθειας οποιουδήποτε τύπου, σε οποιαδήποτε κατάσταση του μοντέλου.

Για κάθε παίκτη X , οι παίκτες που βλέπουν το ίδιο σύνολο χρωμάτων με τον X μπορούν να εκτελέσουν (από την πλευρά τους) κάθε συλλογισμό που είναι εφικτός για τον X .

α) Εξετάζουμε, με βάση το μοντέλο P , αν οι παίκτες **ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Ο παίκτης A βλέπει ότι η πραγματική κατάσταση είναι μία από τις s_1, s_2 , οπότε
ο A **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Ο παίκτης B βλέπει ότι η πραγματική κατάσταση είναι μία από τις s_1, s_3 , οπότε
ο B **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Ο παίκτης C βλέπει ότι η πραγματική κατάσταση είναι μία από τις s_1, s_4 , οπότε
ο C **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

β) Εξετάζουμε αν ο παίκτης A **ξέρει** ότι οι B , C **ξέρουν** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Σύμφωνα με την αντίληψη του A :

Για τον παίκτη B είναι πιθανές οι καταστάσεις s_1, s_2, s_3, s_5 .

Επειδή συμπεριλαμβάνεται η s_5 και $(P, s_5) \neq \text{*nobody-knows-color*}$,

ο A δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι ο παίκτης B **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Για τον παίκτη C είναι πιθανές οι καταστάσεις s_1, s_2, s_4, s_7 .

Επειδή συμπεριλαμβάνεται η s_7 και $(P, s_7) \neq \text{*nobody-knows-color*}$,

ο A δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι ο παίκτης C **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**.

Παρατήρηση 2 Το σύνολο των καταστάσεων που ένας παίκτης θεωρεί πιθανές δεν είναι κοινή γνώση: κάθε άλλος παίκτης δεν βλέπει το δικό του χρώμα.

Παρατήρηση 3 Το σύνολο των καταστάσεων που, κατά την αντίληψη του παίκτη X , ένας παίκτης $Y \neq X$ θεωρεί πιθανές, είναι κοινή γνώση για τους X , Y .

Ερώτημα 4 Υπάρχει φόρμουλα θ_A που να είναι έγκυρη σε ένα μοντέλο M (να αληθεύει σε όλες τις καταστάσεις) *άν και μόνο αν* ο παίκτης A **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**;

Ερώτημα 5 Υπάρχει φόρμουλα η_A που να είναι έγκυρη σε ένα μοντέλο M *άν και μόνο αν* ο παίκτης A **ξέρει** ότι ο παίκτης B **ξέρει** πως **κανείς δεν ξέρει το χρώμα του**;