

Λογική και Λογικός Προγραμματισμός - Ειδικά Θέματα Υπολογικής Λογικής  
2017 - 18

2<sup>η</sup> Ομάδα Ασκήσεων

21 / 12 / 2017

Οι παραπομπές στο βιβλίο του Fitting αφορούν στην δεύτερη έκδοση (1996).

1 Ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων  $S$  ονομάζεται πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, όταν: κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του  $S$  είναι ικανοποιήσιμο.

Έστω ότι το σύνολο  $S$  είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, και περιέχει κάποιο τύπο  $(\varphi \vee \psi)$ . Αποδείξτε ότι: ένα τουλάχιστον από τα σύνολα  $\Sigma\{\varphi\}$ ,  $\Sigma\{\psi\}$  θα είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. **1 Μονάδα**

2 Θεωρούμε τον εξής (υποθετικό) κανόνα παράλληλης επίλυσης: δύο γενικευμένες διαζεύξεις  $[X, Y, a]$  και  $[\neg X, \neg Y, b]$ , μπορούν να επιλυθούν ταυτόχρονα ως προς τους τύπους  $X$  και  $Y$ , και να προκύψει η  $[a, b]$ .

Βρείτε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι: Αν στο σύστημα της προτασιακής επίλυσης προστεθεί η παράλληλη επίλυση, δεν θα ισχύει το Θεώρημα ορθότητας – *Fitting* Theorem 3.4.8 (Propositional resolution soundness). **1 Μονάδα**

3 Έστω  $\Sigma$  ένα σύνολο από συνθήκες (clauses).

**α** Έστω  $[\lambda]$  – όπου  $\lambda$  ένα προτασιακό γράμμα – μία συνθήκη για την οποία ισχύει  $\Sigma \models [\lambda]$ .

Αποδείξτε ότι: μία τουλάχιστον από τις συνθήκες  $[\ ]$ ,  $[\lambda]$ , προκύπτει από το  $\Sigma$  με προτασιακή επίλυση – Propositional Resolution Rule, Definition 3.3.2. **Νύξη** Το σύνολο  $\Sigma\{[\neg\lambda]\}$  είναι μη-ικανοποιήσιμο. Εξετάστε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το *Fitting* Lemma 3.7.6. **½ Μονάδα**

**β** Έστω  $[\lambda_1, \lambda_2]$  – όπου  $\lambda_1, \lambda_2$  προτασιακά γράμματα – μία συνθήκη για την οποία  $\Sigma \models [\lambda_1, \lambda_2]$ .

Αποδείξτε ότι: μία τουλάχιστον από τις συνθήκες  $[\ ]$ ,  $[\lambda_1]$ ,  $[\lambda_2]$ ,  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , προκύπτει από το  $\Sigma$  με προτασιακή επίλυση. **Νύξη** Χρησιμοποιήστε το (α). **1 Μονάδα**

4 Έστω  $\Sigma$  ένα σύνολο από συνθήκες (clauses), και  $\lambda$  ένα προτασιακό γράμμα. Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα συνθηκών:

$\Sigma|_{\lambda}$  : από το  $\Sigma$  παραλείπουμε τις συνθήκες που περιέχουν το  $\lambda$ , και διαγράφουμε το  $\neg\lambda$  από τις συνθήκες που το περιέχουν.

$\Sigma|_{\neg\lambda}$  : από το  $\Sigma$  παραλείπουμε τις συνθήκες που περιέχουν το  $\neg\lambda$ , και διαγράφουμε το  $\lambda$  από τις συνθήκες που το περιέχουν.

Αποδείξτε ότι: το  $\Sigma$  είναι ικανοποιήσιμο, αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα σύνολα  $\Sigma|_{\lambda}$ ,  $\Sigma|_{\neg\lambda}$  είναι ικανοποιήσιμο. **½ Μονάδα**

5 Δίνονται δύο διαψεύσεις (refutations) με προτασιακή επίλυση:  $E_1$  για το σύνολο τύπων  $\{\varphi, \psi\}$ ,  $E_2$  για το σύνολο  $\{\theta, \chi\}$ .

Περιγράψτε πώς μπορεί να κατασκευαστεί μία διάψευση με προτασιακή επίλυση, για το σύνολο τύπων  $\{(\psi \vee \theta), (\theta \vee \varphi), (\varphi \vee \chi), (\chi \vee \psi)\}$ .

**Νύξη** Χρησιμοποιήστε το *Fitting* Lemma 3.7.6.

**1 Μονάδα**

6 Αποδείξτε τις παρακάτω συνεπαγωγές χρησιμοποιώντας προτασιακή επίλυση -- βλέπε *Fitting Definition 3.3.3* :

$$\alpha \quad (p \rightarrow q) \rightarrow q \models (q \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$\beta \quad \models (p \rightarrow q) \rightarrow ((s \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow q))$$

$$\gamma \quad \models ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p .$$

**1½ Μονάδα**

7 Έστω  $\Sigma$  το σύνολο τύπων  $\{ (q \wedge p) \rightarrow (\neg s) , p \vee (\neg s) , (p \rightarrow q) \}$ .

Χρησιμοποιώντας το σύστημα της προτασιακής επίλυσης και τις ιδιότητες Ορθότητας και Πληρότητας -- *Fitting, Proposition 3.4.6* και *Theorem 3.7.9* -- αποδείξτε ότι: (a) το  $\Sigma$  είναι ικανοποιήσιμο, (b) κάθε τιμοδοσία που ικανοποιεί το  $\Sigma$ , θέτει  $s = \text{false}$ . **1½ Μονάδα**

*Η 2<sup>η</sup> Ομάδα Ασκήσεων πρέπει να παραδοθεί μέχρι τις 22-1-2018*

*Απαντήστε σε όλες τις ασκήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι ατομικές.*

*Χρησιμοποιείτε κειμενογράφο, με γραμματοσειρά μεγέθους 12pt .*

*Οι φόρμουλες μπορούν να είναι χειρόγραφες (σε ανάλογο μέγεθος), αν είναι ευκολότερο.*

*Αν παραδώσετε τις απαντήσεις ηλεκτρονικά, στείλετε αρχείο κειμένου – μη στείλετε σκαναρισμένο χειρόγραφο.*