Λογική και Λογικός Προγραμματισμός - Ειδικά Θέματα Υπολογ/κής Λογικής 2016 - 17

1η Ομάδα Ασκήσεων   7 / 11 / 2016

Οι παραπομπές στο βιβλίο του Fitting *αφορούν στην* δεύτερη έκδοση (1996).

1 *Fitting* Exercise 2.2.4. Οι restricted formulas ορίζονται μετά το Theorem 2.2.5.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δομική επαγωγή, όπως στο *Fitting* Theorem 2.2.3, είτε επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων ενός τύπου.

1 Μονάδα

2 Εστω φ ένας προτασιακός τύπος που χρησιμοποιεί μόνο τα συνδετικά $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (και προτασιακά γράμματα).

α Χρησιμοποιώντας δομική αναδρομή, όπως στο *Fitting* Theorem 2.6.4, ορίζουμε ένα τύπο $[[\ \varphi\ ]]$ ως εξής:

<u>Αρχική περίπτωση:</u> Για κάθε προτασιακό γράμμα γ : $[[\ \gamma\ ]] = (\neg\, \gamma)$, $[[\ (\neg\, \gamma)\ ]] = \gamma$.

<u>Επαγωγικό βήμα:</u>

$$[[\ (\neg\,\neg\, \varphi_1)\ ]] = [[\ \varphi_1\ ]]$$
$$[[\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)\ ]] = (\ [[\ \varphi_1\ ]] \vee [[\ \varphi_2\ ]]\ )$$
$$[[\ \neg\,(\varphi_1 \vee \varphi_2)\ ]] = (\ [[\ (\neg\, \varphi_1)\ ]] \vee [[\ (\neg\, \varphi_2)\ ]]\ )$$
$$[[\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ ]] = (\ [[\ \varphi_1\ ]] \wedge [[\ \varphi_2\ ]]\ )$$
$$[[\ \neg\,(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\ ]] = (\ [[\ (\neg\, \varphi_1)\ ]] \wedge [[\ (\neg\, \varphi_2)\ ]]\ )$$

Αποδείξτε ότι: Για οποιοδήποτε τύπο φ και απόδοση τιμών αλήθειας υ , $\upsilon(\ [[\ \varphi\ ]]\ ) = \upsilon(\ (\neg\, \varphi)\ )$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δομική επαγωγή, όπως στο *Fitting* Theorem 2.6.3, είτε επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων του τύπου φ .

β Εστω φ ένας προτασιακός τύπος που χρησιμοποιεί τα συνδετικά $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (και προτασιακά γράμματα). Δώστε έναν ορισμό του τύπου $[[\ \varphi\ ]]$, χρησιμοποιώντας δομική αναδρομή όπως στο *Fitting* Theorem 2.2.4.

1½ Μονάδα

3 Έστω υ μία απόδοση τιμών αληθείας. Έστω $\Sigma(\upsilon)$ το εξής σύνολο τύπων:

$$\Sigma(\upsilon) = \{\ \gamma : \gamma \text{ είναι προτασιακό γράμμα, και } \upsilon(\gamma) = \textit{true}\ \} \cup \{\ (\neg\gamma) : \gamma \text{ είναι προτασιακό γράμμα, και } \upsilon(\gamma) = \textit{false}\ \} .$$

α Έστω X , Y προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει η συνεπαγωγή $\Sigma(\upsilon) \models (X \vee Y)$. Αποδείξτε ότι θα ισχύει μία τουλάχιστον από τις συνεπαγωγές $\Sigma(\upsilon) \models X$, $\Sigma(\upsilon) \models Y$.

Νύξη Ποιές αποδόσεις τιμών αληθείας ικανοποιούν το $\Sigma(\upsilon)$;

β Βρείτε ένα προτασιακό τύπο Z , για τον οποίο ισχύει η συνεπαγωγή $Z \models (p \vee q)$, αλλά δεν ισχύει καμία από τις συνεπαγωγές $Z \models p$, $Z \models q$.

1½ Μονάδα

4 Περιγράψτε αναλυτικά μιά διαδικασία που, για οποιοδήποτε δεδομένο κλειστό tableau T, κατασκευάζει ένα tableau T_0 (για το ίδιο σύνολο τύπων Σ όπως το T), που είναι *ατομικά κλειστό* (*Fitting* Definition 3.1.2).

Δώστε ένα (ασυμπτωτικό) άνω φράγμα για το μέγεθος του T_0, συναρτήσει του μεγέθους του T (ορίζουμε ως *μέγεθος* ενός tableau, τον συνολικό αριθμό συμβόλων των τύπων που σημειώνονται στους κόμβους του).

1½ Μονάδα

5 ***α*** Βρείτε ένα κλειστό tableau που να αποδεικνύει την προτασιακή συνεπαγωγή

$$((p \to q) \to q) \models ((q \to p) \to p).$$

β Βρείτε ένα κλειστό tableau που να αποδεικνύει την ταυτολογία

$$\models (((p \to q) \to p) \to p).$$

Πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο οι Tableau Expansion Rules – *Fitting* Definition 3.1.1.

1 Μονάδα

6 Έστω Σ το σύνολο τύπων $\{ (p \to (q \to s)), (\neg s), (p \to q) \}$.

α Κατασκευάστε ένα strict tableau T για το Σ, έτσι ώστε: κάθε κόμβος του T που η ετικέτα του δεν είναι literal, να έχει αναλυθεί σε όλους τους κλάδους που τον περιέχουν.

β Χρησιμοποιώντας κατάλληλους κλάδους του T, βρείτε αποδόσεις τιμών αλήθειας που να ικανοποιούν το Σ.

Νύξη Δείτε το *Fitting,* Theorem 3.8.1. **1½ Μονάδα**

γ Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε σύνολο τύπων Σ, η παραπάνω μέθοδος θα υπολογίσει όλες τις αποδόσεις τιμών αλήθειας που ικανοποιούν το Σ.

1 Μονάδα