- **Το Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας για τη Λογική πρώτης τάξης (First Order Model Existence Theorem)**

Σύνολα Hintikka πρώτης τάξης (First Order Hintikka sets)

Υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί ένα λεξιλόγιο Λ.
Έστω H ένα σύνολο προτάσεων (sentences), στο λεξιλόγιο Λ.

Λέμε ότι το H είναι *σύνολο Hintikka πρώτης τάξης ως προς το λεξιλόγιο* Λ, όταν ικανοποιεί τις συνθήκες (1 - 7) :

(1) $\{\gamma , \neg\gamma\}$ δεν περιέχεται στο H , για κάθε ατομικό τύπο γ, στο λεξιλόγιο Λ

(2) $\bot \notin H$, $\neg T \notin H$

(3) $\neg(\neg\varphi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi \in H$

(4) $(\varphi \wedge \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi \in H$ και $\psi \in H$
$\neg(\varphi \vee \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \in H$ και $\neg\psi \in H$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi \in H$ και $\neg\psi \in H$

(5) $(\varphi \vee \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi \in H$ είτε $\psi \in H$
$\neg(\varphi \wedge \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \in H$ είτε $\neg\psi \in H$
$(\varphi \rightarrow \psi) \in H \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \in H$ είτε $\psi \in H$

(6) $(\forall x\ \varphi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi\{x/t\} \in H$,
για κάθε κλειστό όρο t, στο λεξιλόγιο Λ
$\neg(\exists x\ \varphi) \in H \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi\{x/t\} \in H$,
για κάθε κλειστό όρο t, στο λεξιλόγιο Λ

(7) $(\exists x\ \varphi) \in H \quad \Rightarrow \quad \varphi\{x/t\} \in H$,
για κάποιο κλειστό όρο t, στο λεξιλόγιο Λ
$\neg(\forall x\ \varphi) \in H \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi\{x/t\} \in H$,
για κάποιο κλειστό όρο t, στο λεξιλόγιο Λ

Λήμμα του Hintikka

Υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί ένα λεξιλόγιο Λ, όπου υπάρχουν κλειστοί όροι.
Έστω H ενα σύνολο Hintikka πρώτης τάξης ως προς το λεξιλόγιο Λ.
Το H θα είναι ικανοποιήσιμο, *σε ένα μοντέλο Herbrand* για το Λ. □

Για την Απόδειξη, βλέπε Fitting -- Proposition 5.6.2.

Ιδιότητες Συνέπειας πρώτης τάξης (First Order Consistency Properties)

Υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί ένα αριθμήσιμο λεξιλόγιο L.
Έστω L^{par} μία επέκταση του λεξιλογίου L, με ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο *παραμέτρων* -- *νέων* σταθερών που δεν περιέχονται στο L.
Έστω C μία ιδιότητα, αναφερόμενη σε (αριθμήσιμα) σύνολα τύπων πρώτης τάξης, *στο λεξιλόγιο* L^{par} .

Λέμε ότι η ιδιότητα C είναι *ιδιότητα συνέπειας πρώτης τάξης ως προς το λεξιλόγιο* L, όταν:
Κάθε σύνολο τύπων Σ όπου ισχύει η C, *και όπου εμφανίζεται μόνο πεπερασμένο πλήθος παραμέτρων*, θα ικανοποιεί τις συνθήκες (0 - 5).

(0) $\{\gamma , \neg\gamma\}$ δεν περιέχεται στο Σ , για κάθε ατομικό τύπο γ, στο λεξιλόγιο L^{par}
$\bot \notin \Sigma$, $\neg T \notin \Sigma$

(1) $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\varphi , \psi\}$ έχει την ιδιότητα C
$\neg(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\neg\varphi , \neg\psi\}$ έχει την ιδιότητα C
$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\varphi , \neg\psi\}$ έχει την ιδιότητα C

(2) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ έχει την C *είτε* το $\Sigma \cup \{\psi\}$ έχει την C
$\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ έχει την C *είτε* το $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ έχει την C
$(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ έχει την C *είτε* το $\Sigma \cup \{\psi\}$ έχει την C

(3) $\neg(\neg\varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ έχει την ιδιότητα C

(4) $(\forall x\, \varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{ \varphi\{x/t\} \}$ έχει την ιδιότητα C ,
για κάθε κλειστό όρο t, *στο λεξιλόγιο* L^{par}
$\neg(\exists x\, \varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{ \neg\varphi\{x/t\} \}$ έχει την ιδιότητα C
για κάθε κλειστό όρο t, *στο λεξιλόγιο* L^{par}

(5) $(\exists x\, \varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{ \varphi\{x/p\} \}$ έχει την ιδιότητα C ,
για κάποια παράμετρο p που δεν εμφανίζεται στο Σ
$\neg(\forall x\, \varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{ \neg\varphi\{x/p\} \}$ έχει την ιδιότητα C ,
για κάποια παράμετρο p που δεν εμφανίζεται στο Σ

Παραδείγματα ιδιοτήτων συνέπειας

« το Σ είναι ικανοποιήσιμο »

« κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο[1] »

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι οι παραπάνω είναι ιδιότητες συνέπειας.

[1] Το Σ ονομάζεται πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σ΄ αυτή την περίπτωση.

Λήμμα

Έστω C μία ιδιότητα συνέπειας πρώτης τάξης ως προς το λεξιλόγιο L.
Έστω Σ ένα σύνολο τύπων πρώτης τάξης *στο λεξιλόγιο* L που έχει την C :
Υπάρχει ένα σύνολο Hintikka πρώτης τάξης H, ως προς το λεξιλόγιο L^{par} ,
έτσι ώστε $\Sigma \subseteq H$. □

Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας

Έστω C μία ιδιότητα συνέπειας πρώτης τάξης, ως προς το λεξιλόγιο L.
Έστω Σ ένα σύνολο τύπων πρώτης τάξης στο λεξιλόγιο L, που έχει την C :
Το Σ θα είναι ικανοποιήσιμο, σε ένα μοντέλο Herbrand για το L^{par}. □

Το Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας προκύπτει αμέσως από το παραπάνω Λήμμα,
επειδή κάθε σύνολο Hintikka είναι ικανοποιήσιμο (Λήμμα του Hintikka, βλ. Fitting Proposition 5.6.2).