Στοιχεία προτασιακής λογικής

Λογικές πράξεις and , or , not

Για οποιεσδήποτε *τιμές αλήθειας* s, t στο σύνολο {true, false} , οι γνωστές πράξεις

s and t , s or t , not s

δίνουν αποτελέσματα στο σύνολο {true, false} .

Για τις αλγεβρικές παραστάσεις που χρησιμοποιούν τις παραπάνω πράξεις, ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες της *Άλγεβρας Boole* .

Παράδειγμα 1

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t, r ισχύουν τα παρακάτω:

not (s and t) = (not s) or (not t)　　　not (s or t) = (not s) and (not t)

r or (s and t) = (r or s) and (r or t)　　　r and (s or t) = (r and s) or (r and t)

r or (r and t) = r and (r or t) = r　　　κλπ.

Λογικές Πράξεις implies , iff

Ορίζουμε μιά πράξη implies μεταξύ τιμών αλήθειας ως εξής:

s implies t = (not s) or (s and t) .

Ορίζουμε επίσης μιά πράξη iff : s iff t = (s implies t) and (t implies s) .

Παρατήρηση 1

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t , ισχύουν τα παρακάτω:

false implies t = true

s implies true = true

s implies t = (not s) or t　　　not (s implies t) = s and (not t)

(s iff t) = true , αν και μόνο άν s = t .

Σημείωση　Ταυτότητες όπως οι παραπάνω μπορούν να επαληθευτούν (i) κατασκευάζοντας πίνακες τιμών αληθείας, είτε (ii) χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες της Άλγεβρας Boole.

Προτάσεις και τιμές αλήθειας τους

Σε μία δήλωση φ που είναι *πρόταση*, δηλαδή έχει *συγκεκριμένο μονοσήμαντο νόημα*, αντιστοιχίζεται πάντα *μιά μοναδική τιμή αλήθειας της* φ , TA(φ) , έτσι ώστε:

TA(φ) = true , όταν ισχύει η φ ,　　　TA(φ) = false , όταν δεν ισχύει η φ .

Παρατήρηση 2

Σύμφωνα με τα παραπάνω, TA(" φ και ψ ") = TA(φ) and TA(ψ) .

TA(" φ είτε ψ ") = TA(φ) or TA(ψ) .

TA(" όχι φ ") = not TA(φ) .

Συνεπαγωγή Μιά δήλωση " αν φ τότε ψ " θεωρείται ότι ισχύει, όταν:

είτε η φ *δεν* ισχύει, είτε ισχύουν οι φ *και* ψ .

Αμφίδρομη Συνεπαγωγή Μιά δήλωση " φ αν και μόνο αν ψ " θεωρείται ότι ισχύει, όταν:

ισχύουν οι " αν φ τότε ψ " *και* " αν ψ τότε φ " .

Παρατήρηση 3

Σύμφωνα με τους ορισμούς των λογικών πράξεων implies , iff , έχουμε:

TA(" αν φ τότε ψ ") = (not TA(φ)) or (TA(φ) and TA(ψ))
= TA(φ) implies TA(ψ) .

TA(" φ αν και μόνο αν ψ ") = (TA(φ) implies TA(ψ)) and (TA(ψ) implies TA(φ))
= TA(φ) iff TA (ψ) .

Από την Άσκηση 3,

TA(" φ αν και μόνο αν ψ ") = (TA(φ) implies TA(ψ)) and ((not TA(φ)) implies (not TA(ψ)))

TA(" φ αν και μόνο αν ψ ") = (TA(φ) and TA(ψ)) or ((not TA(φ)) and (not TA(ψ))) .

Προτασιακές μορφές και Λογική ισοδυναμία

Ονομάζουμε *προτασιακή μορφή*, μία δήλωση στην οποία μπορούν να εμφανίζονται *παράμετροι* φ , ψ κλπ. Όταν οι παράμετροι της προτασιακής μορφής αντικατασταθούν με (οποιεσδήποτε) προτάσεις, προκύπτει μία πρόταση.

Το νόημα μιάς προτασιακής μορφής προσδιορίζεται κάθε φορά από τις προτάσεις που αντικαθιστούν τις παραμέτρους της.

Η τιμή αλήθειας μιάς προτασιακής μορφής, προσδιορίζεται από τις *τιμές αλήθειας* των προτάσεων που αντικαθιστούν κάθε φορά τις παραμέτρους της

Δύο προτασιακές μορφές, Π(φ, ψ, ...) και Ρ(φ, ψ, ...) , λέγονται *λογικά ισοδύναμες* όταν:

για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των (προτάσεων που αντικαθίστανται στις θέσεις των) φ , ψ κλπ,

TA(Π(φ, ψ, ...)) = TA(Ρ(φ, ψ, ...)) .

Μία προτασιακή μορφή Π(φ, ψ, ...) λέγεται *έγκυρη* όταν: για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των φ , ψ κλπ,

TA(Π(φ, ψ, ...)) = true .

Παράδειγμα 2

(i) Οι προτασιακές μορφές " φ και ψ " , " ψ και φ " , " όχι " φ είτε ψ " " ,
είναι ανά δύο λογικά ισοδύναμες.

(ii) Οι προτασιακές μορφές (a) " φ είτε " όχι φ " " (b) " αν " όχι "όχι φ" " τότε φ "
(c) " ψ και φ " είτε " " όχι ψ " και φ " είτε " ψ και " όχι φ " " είτε " " όχι ψ " και " όχι φ " " ,
είναι έγκυρες.

Παρατήρηση 4

Η προτασιακή μορφή " φ αν και μόνο αν ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την
" αν φ τότε ψ " *και* " αν ψ τότε φ " .

Συνηθισμένες Λογικές ισοδυναμίες

Οι προτασιακές μορφές " φ *συνεπάγεται* ψ ", " φ *μόνο αν* ψ ", " ψ *αν* φ " ,
θεωρούνται λογικά ισοδύναμες με την " αν φ τότε ψ " .

Η προτασιακή μορφή " φ *αν και μόνο αν* ψ " θεωρείται λογικά ισοδύναμη με την " φ *ανν* ψ " ,
και με την " " φ αν ψ " *και* " φ μόνο αν ψ " " .

Η προτασιακή μορφή " αν ψ τότε φ " *δεν* είναι λογικά ισοδύναμη με την προτασιακή μορφή
" αν φ τότε ψ " (η πρώτη ονομάζεται *αντίστροφη* της δεύτερης -- βλ. Άσκηση 2).

Η προτασιακή μορφή " αν φ τότε ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την " αν όχι ψ , τότε όχι φ "
(η δεύτερη ονομάζεται *ανάστροφη* της πρώτης -- βλ. Άσκηση 3).

Προτασιακές συναρτήσεις

Ονομάζουμε *προτασιακή συνάρτηση* μία δήλωση στην οποία εμφανίζονται μεταβλητές.
Όταν οι μεταβλητές της προτασιακής συνάρτησης αντικατασταθούν με *οποιεσδήποτε* τιμές (από ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού U), προκύπτει μία πρόταση.
Το νόημα μιάς προτασιακής συνάρτησης – επομένως και η τιμή αλήθειας της – προσδιορίζεται κάθε φορά από τις τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές της.

Εγκυρότητα Μία προτασιακή συνάρτηση λέγεται *έγκυρη στο πεδίο ορισμού* U, όταν:
με την αντικατάσταση των μεταβλητών με *οποιεσδήποτε* τιμές που ανήκουν στο U, προκύπτει μια πρόταση με τιμή αλήθειας true .

Δηλώσεις με μεταβλητές

Μιά δήλωση φ όπου εμφανίζονται μεταβλητές, θεωρείται ότι *ισχύει για ένα δεδομένο πεδίο ορισμού* U , όταν: η προτασιακή συνάρτηση φ , είναι έγκυρη στο U.

Από τα παραπάνω, μία δήλωση φ θεωρείται ότι *ισχύει για το πεδίο ορισμού* U , όταν:
με την αντικατάσταση των μεταβλητών της φ με *οποιεσδήποτε* τιμές που ανήκουν στο U ,
προκύπτει μια πρόταση με τιμή αλήθειας true .

Παρατήρηση 5

Σύμφωνα με τον ορισμό της λογικής πράξης implies :

(a) μιά δήλωση " αν φ τότε ψ " όπου εμφανίζονται μεταβλητές ισχύει στο πεδίο ορισμού U , ανν:
για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών που ανήκουν στο U , TA(φ) implies TA(ψ) = true ,

(b) μιά δήλωση " αν φ τότε ψ " όπου εμφανίζονται μεταβλητές δεν ισχύει στο U , ανν:
υπάρχουν στο U (κατάλληλες) τιμές των μεταβλητών, έτσι ώστε TA(φ) implies TA(ψ) = false .
Οι τιμές αυτές δίνουν *ένα αντιπαράδειγμα* για την δήλωση.

Παράδειγμα 3

(i) a. Έστω ότι x , y είναι ακέραιοι.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " , δεν είναι έγκυρη στους ακέραιους: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης $\pi(x, y) = TA(" x^2 < y^2 ")$ implies TA(" $x<y$ ") , βλέπουμε ότι

$\pi(2, -3)$ = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " δεν ισχύει για τους ακέραιους: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, για το οποίο έχουμε $x_0^2 < y_0^2$, αλλά $x_0 \geq y_0$.

b. Έστω ότι x , y είναι *θετικοί* ακέραιοι.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " , είναι έγκυρη στους θετικούς ακέραιους: βλέπουμε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους x , y , είτε θα έχουμε TA(" $x^2 < y^2$ ") = false , ή θα έχουμε

TA(" $x^2 < y^2$ ") = true *και* TA(" $x<y$ ") = true -- άρα, $\pi(x, y)$ = true .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2<y^2$ τότε $x<y$ " ισχύει για τους θετικούς ακέραιους: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

(ii) a. Έστω ότι x , y είναι *πραγματικοί*.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " , *είναι έγκυρη* στους πραγματικούς: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης $\rho(x, y)$ = TA(" $x^2 < 0$ ") implies TA(" $x^2 < y$ ") , βλέπουμε ότι:

για οποιουσδήποτε πραγματικούς x , y , θα έχουμε TA(" $x^2 < 0$ ") = false -- άρα $\rho(x, y)$ = true (παρατήρηση: η τιμή TA(" $x^2 < y$ ") μπορεί να είναι είτε true είτε false) .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " *ισχύει* για τους πραγματικούς: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

b. Έστω ότι x , y είναι *μιγαδικοί*.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " , δεν είναι έγκυρη στους μιγαδικούς: βλέπουμε ότι

$\rho(i, -3)$ = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " δεν ισχύει για τους μιγαδικούς: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = i$, $y_0 = -3$, για το οποίο έχουμε $x_0^2 < 0$, αλλά $x_0^2 \geq y_0$.

(iii) a. Έστω ότι x , y είναι ακέραιοι.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x-y = 1$ τότε $y-x = 1$ " , δεν είναι έγκυρη στους ακέραιους: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης σ(x, y) = TA(" x−y = 1 ") implies TA(" y−x = 1 ") , βλέπουμε ότι σ(1, 0) = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x-y = 1$ τότε $y-x = 1$ " δεν ισχύει για τους ακέραιους: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, για το οποίο έχουμε $x_0-y_0 = 1$, αλλά $y_0-x_0 \neq 1$.

b. Έστω ότι x , y είναι στοιχεία του συνόλου U = {0 , 2} .

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x-y = 1$ τότε $y-x = 1$ " , είναι έγκυρη στο πεδίο ορισμού U: βλέπουμε ότι, για οποιαδήποτε x , y στο U , θα έχουμε TA(" x−y = 1 ") = false -- άρα, σ(x, y) = true

(ανεξάρτητα από την TA(" y−x = 1 ")) .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x-y = 1$ τότε $y-x = 1$ " ισχύει για το σύνολο U = {0 , 2}: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Βούρος – Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική Α</u>:

1.1 Προτάσεις και Ποσοδείκτες -- μέχρι και το Παράδειγμα 1.16 (σελ. 28).

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>:

1.1 Propositional Logic

1.3 Propositional Equivalences

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s or (s and t) = s and (s or t) = s

(s and t) and (s or t) = (s and t)   (s and t) or (s or t) = (s or t) .

(s and t) or (not s) or (not t) = true .

β Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω προτασιακές μορφές, είναι (ανά δύο) λογικά ισοδύναμες:

" φ είτε " φ και ψ " "   " φ και " φ είτε ψ " "   " φ " .

Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " φ και ψ " είτε " όχι φ " είτε " όχι ψ " είναι έγκυρη.

2 **α** Για κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, βρείτε τιμές αλήθειας που να την διαψεύδουν:

s implies t = s and t   s implies t = t implies s   s implies t = s iff t   s iff t = s and t .

β Επαληθεύστε ότι, ανάμεσα στις παρακάτω προτασιακές μορφές, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές που να είναι λογικά ισοδύναμες:

" αν φ τότε ψ "   " φ και ψ "   " αν ψ τότε φ "   " φ αν και μόνο αν ψ " .

3 **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s implies t = (not t) implies (not s)

s iff t = (s implies t) and ((not s) implies (not t))

s iff t = (s and t) or ((not s) and (not t)) .

β Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " αν φ τότε ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την

" αν όχι ψ , τότε όχι φ " .

γ Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " φ αν και μόνο αν ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την

" " αν φ τότε ψ " και " αν όχι φ , τότε όχι ψ " " .

4 **α** Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση f(s, t) , που να χρησιμοποεί μόνο τις πράξεις iff , and , και για την οποία να ισχύει f(s, t) = s implies t , για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

β Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση g(s, t) , που να χρησιμοποεί μόνο τις λογικές πράξεις iff , or , και για την οποία να ισχύει g(s, t) = s implies t , για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

5 **α** Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση xor(s, t) , που να χρησιμοποιεί μόνο τις λογικές πράξεις or , and , not , και για την οποία να ισχύει: xor(s, t) = true αν και μόνο αν $s \neq t$, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

β Επαληθεύστε ότι, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t , r ,

xor(s, s) = false   xor(s, t) = xor(t, s)   xor(s, xor(t, r)) = xor(xor(s, t) , r) .

6 **α** Βρείτε για ποιούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 1$ τότε $x < 0$ " .

β Βρείτε για ποιούς θετικούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 0$ τότε $x < -1$ " .

7 **α** Βρείτε για ποιούς πραγματικούς x , ισχύει η αμφίδρομη συνεπαγωγή

" $x^2 < 0$ αν και μόνο αν $x^2 < -1$ " .

β Βρείτε για ποιούς πραγματικούς x , ισχύει η αμφίδρομη συνεπαγωγή

" $x^2 < 0$ αν και μόνο αν $x < -1$ " .

8 **α** Βρείτε για ποιούς ακέραιους x , y , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " .

β Βρείτε για ποιούς μιγαδικούς x , y , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " .

9 Για κάθε μία από τις παρακάτω δηλώσεις, βρείτε αν ισχύει στα εξής πεδία ορισμού:

$U_1 = \{ \}$, $U_2 = \{1\}$, $U_3 = \{1, 2\}$.

α " $x \neq x$ "

β " αν $x<y$ τότε $y<x$ "

γ " αν " $x \neq y$ και $z \neq y$ " τότε $x = z$ " .

10 Επαληθεύστε ότι: κάθε δήλωση όπου εμφανίζονται μεταβλητές, ισχύει στο πεδίο ορισμού $U = \{ \}$.

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

2 **α** Για κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, βρείτε τιμές αλήθειας που να την διαψεύδουν:

s implies t = s and t   s implies t = t implies s   s implies t = s iff t   s iff t = s and t .

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα που καταγράφει, για όλες τις δυνατές τιμές αλήθειας των μεταβλητών s , t , τις τιμές αλήθειας κάθε μιάς από τις παραστάσεις που εμφανίζονται.

Για συντομία, γράφουμε **T** αντί για true και **F** αντί για false .

s	t	s implies t	s and t	t implies s	s iff t
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι:

s implies t $\neq$ s and t	όταν	s = **F**	t = **T**
s implies t $\neq$ t implies s	όταν	s = **F**	t = **T**
s implies t $\neq$ s iff t	όταν	s = **F**	t = **T**
s iff t $\neq$ s and t	όταν	s = **F**	t = **F**

β Επαληθεύστε ότι, ανάμεσα στις παρακάτω προτασιακές μορφές, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές που να είναι λογικά ισοδύναμες:

" αν φ τότε ψ "   " φ και ψ "   " αν ψ τότε φ "   " φ αν και μόνο αν ψ " .

Συγκρίνουμε τις δυνατές τιμές αλήθειας των   " αν φ τότε ψ "   " φ και ψ " : γνωρ'ιζουμε, ότι

TA(" αν φ τότε ψ ") = TA(φ) implies TA(ψ)

TA(" φ και ψ ") = TA(φ) and TA(ψ) .

Από τον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι

TA(φ) implies TA(ψ) $\neq$ TA(φ) and TA(ψ)   όταν   TA(φ) = false .

Εργαζόμαστε ανάλογα για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

3 **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s implies t = (not t) implies (not s) (1)

s iff t = (s implies t) and ((not s) implies (not t)) (2)

s iff t = (s and t) or ((not s) and (not t)) . (3)

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που να καταγράφει τις τιμές αλήθειας κάθε μιάς από τις παραστάσεις που εμφανίζονται και να τις συγκρίνουμε -- ή εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξής παρατηρήσεις:

Άν ταυτίσουμε την τιμή αλήθειας true με την *αριθμητική τιμή* 1 , και την τιμή αλήθειας false με το 0 , έχουμε ότι (αριθμητικά) (not t) = 1–t

και επίσης ότι (s implies t) = 1 αν $s \le t$, (s iff t) = 1 αν $s = t$

(s implies t) = 0 αν $s > t$ (s iff t) = 0 αν $s \neq t$.

Ελέγχουμε ότι ισχύει αριθμητικά η ισότητα (1) :

((not t) implies (not s)) = 1 ανν (not t) ≤ (not s) , ανν $1-t \le 1-s$, δηλαδή $s \le t$.

Επομένως, ((not t) implies (not s)) = s implies t .

Ελέγχουμε ότι ισχύει αριθμητικά η ισότητα (2) . Το δεξιό σκέλος έχει τιμή 1 όταν (s implies t) = 1 και ((not s) implies (not t)) = 1 , δηλαδή όταν $s \le t$ και $t \le s$. Το αριστερό σκέλος έχει τιμή 1 όταν $s = t$. Επομένως, η (2) ισχύει αριθμητικά.