Διακριτά Μαθ/κά ΙΙ - Θεωρία Γραφημάτων & Εφαρμογές Σεπτέμβριος 2019

ΕΓΘΑ **:** Σ. Κοσμαδάκης, «Εισαγωγή στα Γραφήματα, Θεωρία-Ασκήσεις»

Το Γ είναι πάντα ένα τυχαίο μη-κατευθυνόμενο γράφημα

Α1 - Β1 - Γ1

Για οποιαδήποτε σύνολα X , Y , Z , ισχύει ότι:

(1) $X\oplus Y = Y\oplus X$ <u>αντιμεταθετικότητα</u> **Απόδειξη**: $X\oplus Y = (X-Y)\cup(Y-X) = (Y-X)\cup(X-Y) = Y\oplus X$

(2) $(X\oplus Y)\oplus Z = X\oplus(Y\oplus Z)$ <u>προσεταιριστικότητα</u>

Απόδειξη: χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 *ΕΓΘΑ* 3.4 βλέπουμε ότι το σύνολο $(X\oplus Y)\oplus Z$ αποτελείται από τα στοιχεία που, είτε ανήκουν σε ένα μόνο από τα X , Y , Z , ή ανήκουν και στα τρία -- και το ίδιο ισχύει για το σύνολο $X\oplus(Y\oplus Z)$.

(3) $X\oplus X = \varnothing$ **Απόδειξη**: $X\oplus X = (X-X)\cup(X-X) = \varnothing\cup\varnothing = \varnothing$

(4) $X\oplus\varnothing = X$ **Απόδειξη**: $X\oplus\varnothing = (X-\varnothing)\cup(\varnothing-X) = X\cup\varnothing = X$

$\varnothing\oplus X = X$ **Απόδειξη**: $\varnothing\oplus X = X\oplus\varnothing = X$

Α1 Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A , B , ισχύει **$B\oplus(A\oplus A)\oplus B = \varnothing$** .

$B\oplus(A\oplus A)\oplus B = B\oplus\varnothing\oplus B$ (επειδή $A\oplus A = \varnothing$, από 3)

$= B\oplus B$ (επειδή $B\oplus\varnothing = B$, από 4)

$= \varnothing$ (από 3).

Β1 Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A , B , ισχύει **$B\oplus(A\oplus B) = A$** .

$B\oplus(A\oplus B) = B\oplus(B\oplus A)$ (επειδή $A\oplus B = B\oplus A$, από 1)

$= (B\oplus B)\oplus A$ (από 2)

$= \varnothing\oplus A$ (επειδή $B\oplus B = \varnothing$, από 3)

$= A$ (από 4)

Γ1 Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε σύνολα A , B , C , ισχύει **$(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)\oplus(C\oplus A) = \varnothing$** .

$(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)\oplus(C\oplus A)$

$= A\oplus(B\oplus B)\oplus(C\oplus C)\oplus A$ (αλλαγή των παρενθέσεων με χρήση της 2)

$= A\oplus\varnothing\oplus\varnothing\oplus A$ (επειδή $B\oplus B = C\oplus C = \varnothing$, από 3)

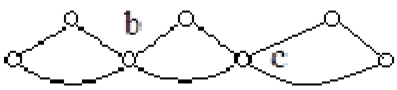
$= (A\oplus\varnothing)\oplus(\varnothing\oplus A)$ (χρησιμοποιώντας την 2)

$= A\oplus A$ (από 4)

$= \varnothing$ (από 3)

Α2 Βρείτε ένα Γ δισυνεκτικό ως προς ακμές, που να έχει *ακριβώς δύο* κομβικά σημεία.

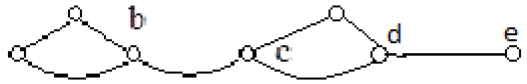
Το παρακάτω γράφημα Γ αποτελείται από τρείς κύκλους. Κάθε ακμή του περιέχεται σε έναν από τους κύκλους, οπότε στο Γ δεν υπάρχει γέφυρα – *ΕΓΘΑ* 2.3.1 – και από *ΕΓΘΑ* 4.2.2 το Γ είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.



Οι κορυφές b, c είναι κομβικά σημεία του Γ : για κάθε μία υπάρχουν δύο από τις προσκείμενες ακμές της που δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο του Γ – *ΕΓΘΑ* 2.3.2. Κάθε άλλη κορυφή έχει ακριβώς δύο προσκείμενες ακμές που περιέχονται στον ίδιο κύκλο, επομένως οι b, c είναι τα μοναδικά κομβικά σημεία του Γ.

B2 Βρείτε ένα συνεκτικό Γ που να έχει *ακριβώς τρείς* δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές.

Από *ΕΓΘΑ* 4.4 *Άσκηση* 22 γνωρίζουμε ότι: οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος που προκύπτει αφαιρώντας τις γέφυρες του Γ, είναι οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές του Γ. Στο παρακάτω γράφημα Γ οι μοναδικές γέφυρες



είναι οι ακμές {b, c} και {d. e} : κάθε άλλη ακμή περιέχεται σε κάποιο κύκλο του Γ – *ΕΓΘΑ* 2.3.1. Αφαιρώντας τις γέφυρες προκύπτουν ακριβώς τρείς συνεκτικές συνιστώσες: οι δύο κύκλοι του Γ και η κορυφή e.

Γ2 Βρείτε ένα συνεκτικό Γ που να έχει *ακριβώς τρείς* δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές, και *ακριβώς ένα* κομβικό σημείο.

Στο παρακάτω γράφημα Γ η κορυφή a είναι το μοναδικό κομβικό σημείο, επειδή έχει δύο προσκείμενες ακμές που δεν περιέχονται στον ίδιο κύκλο – *ΕΓΘΑ* 2.3.2.

Τα παρακάτω υπογραφήματα του Γ είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές – *ΕΓΘΑ* 4.1 :

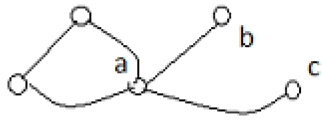
1 Η κορυφή b. Είναι υπο-γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές, επειδή δεν έχει δύο διαφορετικές κορυφές για τις οποίες να μην αληθεύει η σχέση R_κ .

Προσθέτοντας στην b οποιεσδήποτε κορυφές και ακμές του Γ παίρνουμε υπο-γράφημα που δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό: η κορυφή b έχει βαθμό 1 στο Γ, άρα δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει την b και κάποια άλλη κορυφή.

2 Η κορυφή c. Αντίστοιχα με την b.

3 Ο κύκλος του Γ. Είναι υπο-γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές, επειδή για οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές του αληθεύει η σχέση R_κ .

Προσθέτοντας στον κύκλο οποιεσδήποτε κορυφές και ακμές του Γ παίρνουμε υπο-γράφημα που δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό, επειδή η κορυφή a θα είναι κομβικό σημείο – βλέπε *ΕΓΘΑ* 4.1 *Πρόταση* 4.1.2 (1) .



Α3 Έστω η σχέση **P = { (u, v) | u+v = 1 }** πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

α Αποδείξτε ότι η P <u>είναι συμμετρική</u>.

Όταν ισχύει x P y για δύο ακέραιους αριθμούς x , y , θα έχουμε x+y = 1 . Άρα y+x = 1 (η πρόσθεση ακέραιων αριθμών είναι αντιμεταθετική), οπότε ισχύει και y P x . Επομένως η σχέση P πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι συμμετρική αφού, όταν ισχύει x P y , θα ισχύει και y P x – *ΕΓΘΑ* 1.2.

β Αποδείξτε ότι η P <u>δεν είναι μεταβατική</u>.

Μια σχέση P πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *μεταβατική* αν:

όταν ισχύει x P y και y P z , ισχύει και x P z – *ΕΓΘΑ* 1.2.

Έστω η τριάδα ακέραιων x=1 , y=0 , z=1 : Βλέπουμε ότι x+y = 1 και y+z = 1 , άρα ισχύει x P y και y P z . Όμως x+z = 2 $\neq$ 1 , άρα *δεν* ισχύει x P z : η τριάδα x=1 , y=0 , z=1 είναι *αντιπαράδειγμα* για την μεταβατικότητα της P , πάνω στο σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.

Β3 Έστω η σχέση **P = { (u, v) | u–v = 1 }** πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

α Αποδείξτε ότι η <u>P δεν είναι συμμετρική</u>.

Μια σχέση P πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *συμμετρική* αν:

όταν ισχύει x P y , ισχύει και y P x – *ΕΓΘΑ* 1.2.

Έστω το ζεύγος ακέραιων x=1 , y=0 : Βλέπουμε ότι x–y = 1 , άρα ισχύει x P y . Όμως y–x = –1 $\neq$ 1 , άρα *δεν* ισχύει y P x : το ζεύγος x=1 , y=0 είναι *αντιπαράδειγμα* για τη συμμετρία της P , πάνω στο σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.

β Αποδείξτε ότι η P δεν είναι μεταβατική.

Μια σχέση P πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *μεταβατική* αν:

όταν ισχύει x P y και y P z , ισχύει και x P z – *ΕΓΘΑ* 1.2.

Έστω η τριάδα ακέραιων x=1 , y=0 , z=–1 : Βλέπουμε ότι x–y = 1 και y–z = 1 , άρα ισχύει x P y και y P z . Όμως x–z = 2 $\neq$ 1 , άρα *δεν* ισχύει x P z : η τριάδα x=1 , y=0 , z=–1 είναι *αντιπαράδειγμα* για την μεταβατικότητα της P , πάνω στο σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.

Γ3 Έστω η σχέση **P = { (0, 0) , (2, 2) , (2, 0) , (0, 2) }** πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

α Βρείτε άν η P είναι συμμετρική.

Όταν ισχύει x P y για ακέραιους αριθμούς x , y θα έχουμε $x \in \{0, 2\}$ και $y \in \{0, 2\}$, αφού *οι μόνοι ακέραιοι* που εμφανίζονται στα ζεύγη που αποτελούν την σχέση P , είναι το 0 και το 2 .

Επειδή η P περιέχει *κάθε ζεύγος* με στοιχεία το 0 είτε το 2 , θα ισχύει και y P x .

Επομένως η σχέση P πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι συμμετρική αφού, όταν ισχύει x P y , θα ισχύει και y P x – *ΕΓΘΑ* 1.2.

β Βρείτε άν η P είναι μεταβατική**.**

Όταν ισχύει x P y και y P z για ακέραιους αριθμούς x , y , z , θα έχουμε $\{x, y, z\} \subseteq \{0, 2\}$, αφού *οι μόνοι* ακέραιοι που εμφανίζονται στα ζεύγη που αποτελούν την σχέση P , είναι το 0 και το 2 .

Επειδή η P περιέχει *κάθε ζεύγος* με στοιχεία το 0 είτε το 2 , θα ισχύει και x P z .

Επομένως η σχέση P πάνω στο σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι μεταβατική αφού, όταν ισχύει x P y και y P z , θα ισχύει και x P z – *ΕΓΘΑ* 1.2.

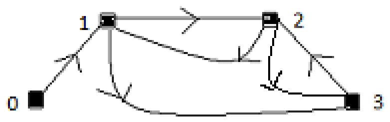
A4 α Στο κατευθυνόμενο γράφημα G2 , βρείτε μία *κλειστή διαδρομή* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (1 , (1,2) , 2 , (2,1) , 1 , (1,2) , 2 , (2,1) , 1) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζονται – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 2 .

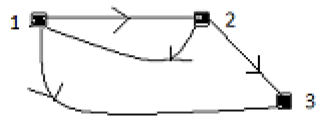
β Στο κατευθυνόμενο γράφημα G1 , βρείτε ένα *κλειστό ίχνος* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (1 , (1,2) , 2 , (2,3) , 3 , (3,2) , 2 , (2,1) , 1) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζονται, και είναι ίχνος, αφού καμμία ακμή δεν εμφανίζεται δύο φορές – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 2 .

G1 :



G2 :



A5 Για το κατευθυνόμενο γράφημα G2 του παραπάνω σχήματος:

α Βρείτε άν είναι ισχυρά συνεκτικό.

Βλέπουμε ότι στο G2 δεν υπάρχει μονοπάτι με αρχή την κορυφή 3 (αφού καμμία ακμή δεν αρχίζει από αυτή την κορυφή). Επομένως δεν ισχύει 1 $R_{\delta\delta}$ 3 , και το G2 δεν είναι ισχυρά συνεκτικό – βλέπε *ΕΓΘΑ* 4.3.

β Βρείτε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του.

Για κάθε κορυφή α του G2 , βρίσκουμε την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H(α) που περιέχει την α , χρησιμοποιώντας την *ΕΓΘΑ* Πρόταση 4.3.4:

Παρατηρούμε ότι στο G2 υπάρχει μία κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές 1 , 2 , και δεν υπάρχει κλειστή διαδρομή που να περιέχει την κορυφή 3 και κάποια άλλη κορυφή. Άρα έχουμε δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, την H(1) = H(2) = ({1, 2} , { (1,2) , (2,1) }) , και την H(3) = ({3} , $\varnothing$) .

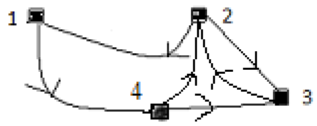
Β4 α Στο κατευθυνόμενο γράφημα G2 , βρείτε μία *κλειστή διαδρομή* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (3 , (3,2) , 2 , (2,3) , 3 , (3,2) , 2 , (2,3) , 3) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζονται – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 2 .

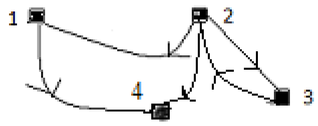
β Στο κατευθυνόμενο γράφημα G1 , βρείτε ένα *κλειστό ίχνος* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (1 , (1,4) , 4 , (4,2) , 2 , (2,3) , 3 , (3,2) , 2 , (2,1) , 1) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζονται, και είναι ίχνος, αφού καμμία ακμή δεν εμφανίζεται δύο φορές – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 2 .

G1 :



G2 :



Β5 Για το κατευθυνόμενο γράφημα G2 του παραπάνω σχήματος:

α Βρείτε άν είναι ισχυρά συνεκτικό.

Βλέπουμε ότι στο G2 δεν υπάρχει μονοπάτι με αρχή την κορυφή 4 (αφού καμμία ακμή δεν αρχίζει από αυτή την κορυφή). Επομένως δεν ισχύει 1 $R_{\delta\delta}$ 4 , και το G2 δεν είναι ισχυρά συνεκτικό – βλέπε *ΕΓΘΑ* 4.3.

β Βρείτε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του.

Για κάθε κορυφή α του G2 , βρίσκουμε την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα Η(α) που περιέχει την α , χρησιμοποιώντας την *ΕΓΘΑ* Πρόταση 4.3.4:

Παρατηρούμε ότι στο G2 υπάρχει μία κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές 3 , 2 , και δεν υπάρχει κλειστή διαδρομή που να περιέχει την κορυφή 4 και κάποια άλλη κορυφή, ούτε υπάρχει κλειστή διαδρομή που να περιέχει την κορυφή 1 και κάποια άλλη κορυφή. Άρα έχουμε τρείς ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, την Η(3) = Η(2) = ({3, 2} , { (3,2) , (2,3) }) , την Η(4) = ({4} , ∅) , και την Η(1) = ({1} , ∅) .

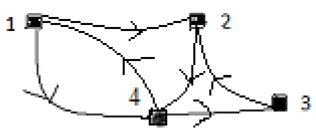
Γ4 α Στο κατευθυνόμενο γράφημα G2 , βρείτε μία *κλειστή διαδρομή* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (3 , (3,2) , 2 , (2,4) , 4 , (4,3) , 3 , (3,2) , 2 , (2,4) , 4 , (4,3) , 3) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζοναι – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 2 .

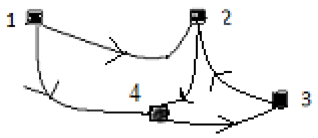
β Στο κατευθυνόμενο γράφημα G1 , βρείτε ένα *κλειστό ίχνος* που να μην είναι κύκλος.

Η διαδρομή (1 , (1,4) , 4 , (4,3) , 3 , (3,2) , 2 , (2,4) , 4 , (4,1) , 1) είναι κλειστή, αφου τα άκρα της ταυτίζονται, και είναι ίχνος, αφού καμμία ακμή δεν εμφανίζεται δύο φορές – βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.2. Η διαδρομή δεν είναι κύκλος, αφού επαναλαμβάνεται η κορυφή 4 .

G1 :



G2 :



Γ5 Για το κατευθυνόμενο γράφημα G2 του παραπάνω σχήματος:

α Βρείτε άν είναι ισχυρά συνεκτικό.

Βλέπουμε ότι στο G2 δεν υπάρχει μονοπάτι με τέλος την κορυφή 1 (αφού καμμία ακμή δεν καταλήγει σε αυτή την κορυφή). Επομένως δεν ισχύει 1 $R_{\delta\delta}$ 4 , και το G2 δεν είναι ισχυρά συνεκτικό – βλέπε *ΕΓΘΑ* 4.3.

β Βρείτε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του.

Για κάθε κορυφή α του G2 , βρίσκουμε την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα Η(α) που περιέχει την α , χρησιμοποιώντας την *ΕΓΘΑ* Πρόταση 4.3.4:

Παρατηρούμε ότι στο G2 υπάρχει μία κλειστή διαδρομή που περιέχει τις κορυφές 4 , 3 , 2 , και δεν υπάρχει κλειστή διαδρομή που να περιέχει την κορυφή 1 και κάποια άλλη κορυφή. Άρα έχουμε δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, την Η(4) = Η(3) = Η(2) = ({4, 3, 2} , { (4,3) , (3,2) , (2,4) }) , και την Η(1) = ({1} , ∅) .

Α6 - Β6 - Γ6 Έστω ότι το Γ έχει n κορυφές, και *το πολύ* n–3 ακμές. Αποδείξτε ότι: το Γ θα έχει τουλάχιστον τρείς συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω $G_j = (V_j, E_j)$, j = 1,...k , οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος Γ = (V, E).

Κάθε G_j είναι συνεκτικό, οπότε $|E_j| \geq |V_j|-1$, j=1,...k (1) (βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.4.3 (ii)).

Τα σύνολα V_j διαμερίζουν τις κορυφές του G – *ΕΓΘΑ* 2.3 – οπότε $n = \sum_{j=1,\dots k} |V_j|$ (2)

Τα σύνολα E_j διαμερίζουν τις κορυφές του G – *ΕΓΘΑ* 2.3 και *Ασκήσεις* 2.5, 2 – οπότε $m = \sum_{j=1,\dots k} |E_j|$ (3)

Αντικαθιστώντας στην (3) το $|E_j|$ βάσει της (1), και χρησιμοποιώντας την (2), βρίσκουμε

$m \geq \sum_{j=1,\dots k} (|V_j|-1) = (\sum_{j=1,\dots k} |V_j|) - k = n-k$, άρα $m \geq n-k$ (4)

Εφόσον $n-3 \geq m$, βρίσκουμε από την (4) ότι $n-3 \geq n-k$ **,** επομένως $k \geq 3$ **.**

Α7 - Β7 - Γ7 Έστω Γ ένα δέντρο με n κορυφές. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του Γ είναι 2(n–1), *χρησιμοποιώντας μόνο την επαγωγή για τα δέντρα*.

Για την επαγωγή για τα δέντρα, βλέπε *ΕΓΘΑ 3.1*.

Εργαζόμαστε όπως για την Πρόταση 3.1.2 : αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι, για κάθε $n \geq 1$, η ζητούμενη πρόταση ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(n) .

Γνωρίζουμε ότι κάθε γράφημα της υπο-κλάσης T(n) έχει ακριβώς n κορυφές -- οπότε πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε γράφημα της υπο-κλάσης T(n) , το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι 2(n–1) .

Αρχική περίπτωση n = 1 .

Κάθε γράφημα στην T(1) έχει μόνο μία κορυφή και *καμμία* ακμή, οπότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του είναι 0 . Αφού για n=1 παίρνουμε 2(n–1) = 0 , η πρόταση ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(1) .

Επαγωγικό βήμα Έστω ότι το η ζητούμενη πρόταση ισχύει για $n = i-1 \geq 1$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για n = i .

Έστω ένα δέντρο G στην υπο-κλάση T(i) , i>1 . Από την επαγωγική κατασκευή της T(i) έχουμε $G = (V \cup \{a\} , E \cup \{ \{a, b\} \})$, όπου $G' = (V, E)$ είναι δέντρο της υπο-κλάσης T(i–1) , και $a \notin V$, $b \in V$.

Υποθέτουμε επαγωγικά, ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G′ είναι 2((i–1)–1) = 2(i–2) .

Η νέα ακμή {a, b} του G θα προσθέσει 1 στον βαθμό της κορυφής b , και επίσης η νέα κορυφή a του G θα έχει βαθμό 1 . Άρα, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G θα είναι 2(i–2)+1+1 = 2(i–1) .

Στα παρακάτω θέματα να αναφέρετε, για κάθε μία επιλογή, άν είναι *σωστή* ή *λάθος*.
***Δεν χρειάζεται να εξηγήσετε* τις απαντήσεις σας**

Α8 Για κάθε Γ με *ακριβώς* n κορυφές, m ακμές, K κύκλους και X χορδές, θα ισχύει ότι:

- **a** Άν n > m+1 , το Γ δεν είναι συνεκτικό. ΣΩΣΤΟ
- **b** Άν $K \geq 1$, θα είναι $m \geq n$. ΛΑΘΟΣ
- **c** X = K . ΛΑΘΟΣ
- **d** Άν K=2 και το Γ είναι συνεκτικό, θα έχει κομβικό σημείο. ΣΩΣΤΟ

Α9 Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα Γ ισχύει ότι:

- **a** Δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές, δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή. ΛΑΘΟΣ
- **b** Άν το Γ περιέχει κλειστό ίχνος, θα περιέχει και κύκλο. ΣΩΣΤΟ
- **c** Άν το Γ είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, κάποιος κύκλος του θα περιέχει όλες τις κορυφές του. ΛΑΘΟΣ
- **d** Άν το Γ είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, κάθε ακμή του θα περιέχεται σε κάποιο κύκλο. ΣΩΣΤΟ

B8 Για κάθε Γ με *ακριβώς* n κορυφές, m ακμές, K κύκλους και X χορδές, θα ισχύει ότι:

a Άν το Γ δεν είναι συνεκτικό, θα είναι $n > m+1$. ΛΑΘΟΣ

b Άν $n \geq m$, θα είναι $X \leq 1$. ΛΑΘΟΣ

c Άν $K=0$, θα είναι $m < n$. ΣΩΣΤΟ

d Άν $K \geq 3$, θα είναι $X \geq 3$. ΛΑΘΟΣ

B9 Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα Γ ισχύει ότι:

a Δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς ακμές, δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή. ΣΩΣΤΟ

b Άν υπάρχει κλειστό ίχνος του Γ που περιέχει δύο κορυφές a , b, θα υπάρχει και κύκλος του Γ που περιέχει τις a , b. ΛΑΘΟΣ

c Άν το Γ είναι συνεκτικό, κάποια διαδρομή του Γ θα περιέχει όλες τις κορυφές του Γ . ΣΩΣΤΟ

d Άν το Γ δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές, δεν θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές. ΣΩΣΤΟ

Γ8 Για κάθε Γ με *ακριβώς* n κορυφές, m ακμές, K κύκλους και X χορδές, θα ισχύει ότι:

a Άν $n \leq m+1$ και $K=0$, το Γ θα είναι συνεκτικό. ΣΩΣΤΟ

b Άν $K=0$, το Γ θα έχει κομβικό σημείο. ΛΑΘΟΣ

c Άν $K=2$ και το Γ είναι συνεκτικό, θα έχει γέφυρα. ΛΑΘΟΣ

d $X \leq 1$, αν και μόνο αν $K \leq 1$. ΣΩΣΤΟ

Γ9 Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα Γ ισχύει ότι:

a Δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές, δεν μπορούν να έχουν κοινή ακμή. ΣΩΣΤΟ

b Άν υπάρχει κλειστό ίχνος του Γ που περιέχει μία ακμή {a , b} , θα υπάρχει και κύκλος του Γ που περιέχει την {a , b} . ΣΩΣΤΟ

c Άν το Γ είναι συνεκτικό, κάποιο μονοπάτι του Γ θα περιέχει όλες τις κορυφές του Γ . ΛΑΘΟΣ

d Άν το Γ δεν είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, θα υπάρχει κορυφή που δεν περιέχεται σε κύκλο. ΛΑΘΟΣ