ΣΧΕΣΕΙΣ & ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

1. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: η προέλευσή τους.

▪ Χωρίς σχέσεις ισοδυναμίας δεν θα είχαμε μαθηματικά, και ιδίως τα μαθηματικά των 2-3 τελευταίων αιώνων. Ο λόγος είναι ότι οι σχέσεις ισοδυναμίας είναι μια μορφή *ισότητας* στην πιο γνήσια εκδοχή της. Αν δύο στοιχεία, (που ως δύο δεν ταυτίζονται), θεωρηθούν, για κάποιο λόγο *ισοδύναμα* τότε μπορούμε, από μια ορισμένη οπτική γωνία, να τα χειριστούμε ως *ίσα*. Και στα μαθηματικά – όπως και σε κάθε επιστημονικό πεδίο – όποιος ασχολείται με ένα είδος αντικειμένων το πρώτο που θα πρέπει να είναι σε θέση να κάνει είναι να διακρίνει εάν δύο από τα αντικείμενά του είναι ίσα ή όχι! Σε αυτό το καθήκον οι σχέσεις ισοδυναμίας αναδεικνύονται ως το πρωτεύον εργαλείο.

▪ Πώς προκύπτουν όμως τέτοιες σχέσεις ισοδυναμίας; Δεν μπορούμε να δώσουμε μία πλήρως γενική εξήγηση – αυτό θα ήταν σαν να εξηγούσαμε ένα μέρος του σύμπαντος, κάτι πολύ φιλόδοξο για μας. Υπάρχουν όμως λίγα επανεμφανιζόμενα «μοτίβα» στις σχέσεις ισοδυναμίας που θα πρέπει να τα γνωρίζουμε:

- «***Κοινό χαρακτηριστικό***»: αν τα στοιχεία ενός συνόλου Α είναι σύνθετα, δηλαδή αν παρουσιάζουν επί μέρους *χαρακτηριστικά* ή ***γνωρίσματα***, τότε είναι δυνατόν να απομονώσουμε ένα από αυτά και να θεωρήσουμε την συνάρτηση $\chi(\text{-})$ που μας δίδει την τιμή αυτού του γνωρίσματος.

$$\chi(\text{-}):\ A \longmapsto \{\ \textit{τιμές επί μέρους γνωρίσματος}\ \}$$

- Στην πράξη συναντάμε διαρκώς τέτοια δείγματα: π.χ. *χρώμα*(μήλο-Μ) = πράσινο, ή *ύψος*(Μαρία) = 1.68, ή *τύπος*(σοκολάτα-Σ) = 55%, κοκ. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατόν να θεωρήσουμε δύο αντικείμενα ως ισοδύναμα εάν έχουν *ισούνται ως προς αυτό το (επί μέρους) χαρακτηριστικό* $\chi(\text{-})$, ορίζοντας την εξής σχέση ισοδυναμίας $S \subseteq A \times A$:

$$(\alpha \approx_S \beta)\ \equiv\ (\ \chi(\alpha) = \chi(\beta)\ )\ .$$

- Η σχέση αυτή έχει κατά προφανή τρόπο τις ιδιότητας της ισοδυναμίας – αφού ορίζεται με βάση μια ισότητα (την σχέση ισοδυναμίας *par excellence*):
  - *ανακλαστική*: $(\alpha \approx_S \alpha)$ διότι τετριμμένα $\chi(\alpha) = \chi(\alpha)$.
  - *συμμετρική*: αν $(\alpha \approx_S \beta)$ τότε και $(\beta \approx_S \alpha)$, διότι τετριμμένα $\chi(\alpha) = \chi(\beta) \Rightarrow \chi(\beta) = \chi(\alpha)$.
  - *μεταβατική*: αν $(\alpha \approx_S \beta)$, $(\beta \approx_S \gamma)$ τότε $(\alpha \approx_S \gamma)$, διότι $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$, $\chi(\beta) = \chi(\gamma) \Rightarrow \chi(\alpha) = \chi(\gamma)$.
- Αυτό το μοτίβο ορισμού μιας ισοδυναμίας έχει μια καθολικότητα: εμφανίζεται σε όλες τις σχέσεις ισοδυναμίας, αλλά το ενδιαφέρον είναι ότι σε ορισμένες (και πολλές, και ενδιαφέρουσες) περιπτώσεις *η ίδια η σχέση παράγει το αντίστοιχο γνώρισμα*! Αυτό συμβαίνει ιδίως στο δεύτερο μοτίβο ισοδυναμίας που εξηγούμε στη συνέχεια.

- «***Αναλλοίωτες μετασχηματισμών***»: Όταν χειριζόμαστε κάποιο είδος αντικειμένων, σχεδόν πάντοτε συναντούμε την δυνατότητα να μετασχηματίζουμε το ένα εξ αυτών σε κάποιο άλλο. Οι μετασχηματισμοί (πλην των τετριμμένων εξαιρέσεων) κάτι *μεταβάλλουν*, αλλά και κάτι διατηρούν *αναλλοίωτο*. Π.χ. εάν βάψουμε μια καρέκλα, θα αλλάξουμε το χρώμα της, αλλά θα μείνει καρέκλα. Εάν μεγενθύνουμε μια φωτογραφία, θα αλλάξουμε τις διαστάσεις της, αλλά τα εικονιζόμενα θα παραμείνουν απολύτως ίδια. Αν περιστρέψουμε ένα 5-γωνο, ο προσανατολισμός του θα μεταβληθεί, αλλά θα παραμείνει 5-γωνο.
- Έστω λοιπόν ότι για σύνολο αντικειμένων Α, διαθέτουμε κάποιο σύνολο μετασχηματισμών Μ. Αν διαλέξουμε ένα στοιχείο σ του Α και το μετασχηματίσουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους, είναι εύλογο να θεωρήσουμε τα αντίτυπα που παραγάγαμε ως «ισοδύναμα» με το σ, ως προς αυτό το «χαρακτηριστικό» που οι μετασχηματισμοί Μ αφήνουν *αναλλοίωτο* – (είτε γνωρίζουμε ποιό είναι αυτό είτε όχι…). Έχουμε λοιπόν και την εξής δυνατότητα παραγωγής σχέσεων ισοδυναμίας:

$$(\alpha \approx_M \beta)\ \equiv\ \text{υπάρχει μια σειρά μετασχηματισμών στο Μ που μετατρέπουν το α στο β}\ .$$

- Για να είναι μια τέτοια σχέση πράγματι σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να προκύπτουν οι τρείς βασικές ιδιότητες:
  - *ανακλαστική*: για να έχουμε $(\alpha \approx_S \alpha)$ θα πρέπει το Μ να περιέχει τον «ταυτοτικό» μετασχηματισμό, δηλαδή αυτόν που αφήνει κάθε στοιχείο ως έχει.
  - *συμμετρική*: για να έχουμε ότι κάθε $(\alpha \approx_S \beta)$ επιφέρει και $(\beta \approx_S \alpha)$, θα πρέπει για μια σειρά μετασχηματισμών του α στο β, να υπάρχει και μία άλλη που να «αντιστρέφει» το αποτέλεσμα, αφού μετασχηματίζει το β πίσω στο α.
  - *μεταβατική*: για να έχουμε ότι οι σχέσεις $(\alpha \approx_S \beta)$ και $(\beta \approx_S \gamma)$ επιφέρουν πάντοτε $(\alpha \approx_S \gamma)$, θα πρέπει οι μετασχηματισμοί να συντίθενται μεταξύ τους: εάν μια 1η σειρά εξ αυτών τρέπει το α σε β, και μια 2η τρέπει το β σε γ, θα πρέπει να υπάρχει και να επιτρέπεται

και η «σύνθεση» των δύο σειρών, (ώστε να τρέπεται και το α σε γ με «μία» σειρά μετατροπών).

Οι παραπάνω απαιτήσεις μας λένε ότι οι μετασχηματισμοί Μ (επί του συνολου Α) πρέπει να συγκροτούν μια ***ομάδα*** μετασχηματισμών. Η θεωρία ομάδων είναι από τις πιο βαρυσήμαντες μαθηματικές περιοχές. Ένας από τους λόγους είναι ότι οι ομάδες, (και οι ***συμμετρίες*** που οι ομάδες είτε υποκρύπτουν, είτε φανερώνουν, είτε και τα δύο διαδοχικά), αποτελούν πηγή χρήσιμων και κρίσιμων σχέσεων ισοδυναμίας.

2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: παραδείγματα.

- Δίνουμε, στη συνέχεια, λίγα παραδείγματα, που ακολουθούν τις παραπάνω γραμμές.

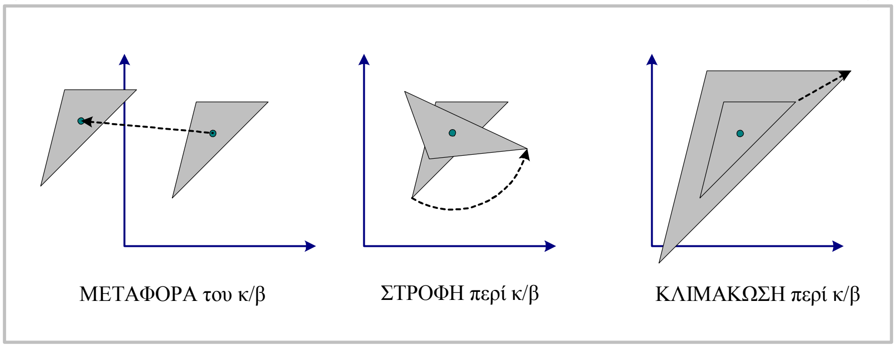
- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΣΩΠΩΝ: Στη καθημερινή ζωή υπάρχει πλήθος περιπτώσεων όπου ομαδοποιούμε πρόσωπα με βάση κοινά χαρακτηριστικά, λ.χ. ηλικία, ύψος, επάγγελμα, αθλητική ομάδα, χρώμα μαλλιών, πολιτικές τοποθετήσεις, τόπος καταγωγής, φύλο, μητρική γλώσσα, βαθμίδα εκπαίδευσης, οικογενειακή κατάσταση, και ο κατάλογος είναι μακροσκελέστατος. Για τα πρόσωπα που είναι «ισοδύναμα» υπό μία τέτοια σχέση η γλώσσα συχνότατα διαθέτει ειδικές λέξεις (λ.χ. «οι ξανθοί», «η πρασινομάτηδες»), αλλά και οι θεσμοί συχνά τα αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο, λ.χ. οι «πολύτεκνοι» δικαιούνται τις ίδιες οικονομικές ελαφρύνσεις.

- ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΡΙΘΜΩΝ: Αλλά και στα απλά μαθηματικά έχουμε πλήθος από τέτοιες ομαδοποιήσεις. Η σχέση «ισοϋπολοιπικότητας» είναι χαρακτηριστική. Διαλέγουμε ένα «μέτρο (modulus)» m και θεωρούμε δύο αριθμούς ισοδύναμους, εάν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο στην Ευκλείδια διαίρεση δια m:

$$(\alpha \approx_m \beta) \;\equiv\; ((\alpha \bmod m) = (\beta \bmod m))$$

Η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, αφού προέρχεται από ένα «κοινό χαρακτηριστικό», εδώ το «υπόλοιπο δια m».

- ΙΣΟΤΗΤΑ / ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ: Το Ευκλείδιο επίπεδο προσφέρει σχετικά απλά και πολύ παραστατικά παραδείγματα σχέσεων ισοδυναμίας που παράγονται από μετασχηματισμούς. Έστω ότι έχουμε ένα επίπεδο σχήμα – για απλότητα ένα τρίγωνο. Σκεφθείτε τρείς πολύ βασικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς: (1) την μεταφορά αυτού του τριγώνου (ως μεταφορά του κέντρου βάρους του, χωρίς περιστροφή)· (2) την περιστροφή του πέριξ του κέντρου βάρους του· και (3) την μεγέθυνσή του (ή σμίκρυνσή του), ως προς το κέντρο βάρους του.



Είναι μια απλή γεωμετρική άσκηση να διαπιστώσετε ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί (1) και (2) συντίθενται μεταξύ τους και σχηματίζουν «ομάδα»: υπάρχουν οι ουδέτεροι μετασχηματισμοί, οι μετασχηματισμοί αντιστρέφονται, και μάλιστα η μεταφορά ενός τριγώνου και στη συνέχεια η στροφή του, έχει το ίδιο αποτέλεσμα με το πρώτα να το στρέψουμε, και στη συνέχεια να το μεταφέρουμε. Επίσης η σύνθεση δύο μεταφορών ισούται με μια μεταφορά, όπως και δύο συνεχόμενες στροφές πέριξ του κ/β του παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα με μία στροφή. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι σε μια οποιαδήποτε σειρά μεταφορών και στροφών, μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταφορές από τις στροφές, και στη συνέχεια να συνθέσουμε όλες τις μεταφορές σε μία μεταφορά, και όλες τις στροφές σε μία στροφή. Αυτή η παρατήρηση μας βοηθάει να επιβεβαιώσουμε ότι η εξής σχέση τριγώνων είναι σχέση ισοδυναμίας:

$$(\alpha \approx \beta) \;\equiv\; \text{«το τρίγωνο α φέρεται επί του β μέσω μιας μεταφοράς και μιας στροφής»}$$

- *ανακλαστική:* Ισχύει πάντοτε «$\alpha \approx \alpha$» διότι υπάρχει η «κενή» μεταφορά και στροφή.
- *συμμετρική:* Ισχύει ότι «εάν $\alpha \approx \beta$ τότε $\beta \approx \alpha$» διότι αν το α τρίγωνο φέρεται επί του β με μια μεταφορά και μια στροφή, τότε με την αντίθετη στροφή και μεταφορά το β φέρεται επί του α.
- *μεταβατική:* Ισχύει ότι «εάν $\alpha \approx \beta$ και $\beta \approx \gamma$ τότε και $\alpha \approx \gamma$» διότι όπως είδαμε οι μεταφορές και οι στροφές περί το κ/β μετατίθενται και συντίθενται και μας δίνουν μια συνολική μεταφορά και στροφή του τριγώνου α στο γ.

Το ανάλογο ισχύει και αν συμπεριλάβουμε στους επιτρεπτούς μετασχηματισμούς και την κλιμάκωση. Η ακόλουθη σχέση:

$$(\alpha \approx \beta) \;\equiv\; \text{«το τρίγωνο α φέρεται επί του β μέσω μεταφοράς, στροφής και κλιμάκωσης»}$$

καταλήγει και αυτή ως σχέση ισοδυναμίας.

- ΙΣΟΚΟΠΤΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ: Ας θυμηθούμε ότι το παράδειγμα της ισοκοπτικότητας, από την προηγούμενη ενότητα: είναι μια σχέση ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, άρα είναι σχέση ισοδυναμίας, και είναι μια σχέση που ορίζεται με βάση *μετασχηματισμούς* των αντικειμένων μας (εδώ: την *ανα-συναρμολόγηση* των σχημάτων).

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ: Στο επόμενο παράδειγμα – που το ρίχνουμε επίτηδες «χύμα» στο χαρτί – ως χώρος αναφοράς για την σχέση μας είναι τα ζεύγη φυσικών αριθμών, στα οποία ένα τουλάχιστον μέλος τους είναι διάφορο του μηδενός:

$$A = \mathbf{N} \times \mathbf{N} - \{\langle 0, 0 \rangle\}$$

Η σχέση ≈ (που είναι σχέση ισοδυναμίας όπως θα δούμε) ορίζεται ως εξής:

$$(\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle) \;\equiv\; (\alpha\,\delta = \beta\,\gamma)$$

(Μνημονικά: ισοδύναμα ≡ το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων: $\overbrace{\alpha \;\; \underbrace{\beta \;\; = \;\; \gamma}_{\beta\times\gamma} \;\; \delta}^{\alpha\times\delta}$.)

Ελέγχουμε την ισχύ των ιδιοτήτων Α–Σ–Μ:

- *ανακλαστική:* Ισχύει πάντοτε $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \alpha, \beta \rangle$ διότι, τετριμμένα, $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$.
- *συμμετρική:* Ισχύει ότι «εάν $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle$ τότε και $\langle \gamma, \delta \rangle \approx \langle \alpha, \beta \rangle$» διότι η 1η σχέση μας δίδει $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, που γράφεται και ως $\gamma\,\beta = \delta\,\alpha$, το οποίο μας δίδει τη 2η σχέση.
- *μεταβατική:* Για την μεταβατική ιδιότητα θα πρέπει να δείξουμε ότι:

  «εάν $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle$ και $\langle \gamma, \delta \rangle \approx \langle \varepsilon, \zeta \rangle$, τότε και $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \varepsilon, \zeta \rangle$»

  Η υπόθεση μας δίδει ότι: $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, και $\gamma\,\zeta = \delta\,\varepsilon$, και το συμπέρασμα ζητεί $\alpha\,\zeta \stackrel{?}{=} \beta\,\varepsilon$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πρώτες σχέσεις κατά μέλη, λαμβάνουμε:

  $$\boldsymbol{\alpha\,\zeta}\,\gamma\,\delta = \boldsymbol{\beta\,\varepsilon}\,\gamma\,\delta$$

  Αν $\gamma > 0$ και $\delta > 0$, διαιρώντας δια $\gamma\,\delta$ λαμβάνουμε, προφανώς, το ζητούμενο $\alpha\,\zeta = \beta\,\varepsilon$. Αλλιώς έχουμε δύο υπο-περιπτώσεις να εξετάσουμε:

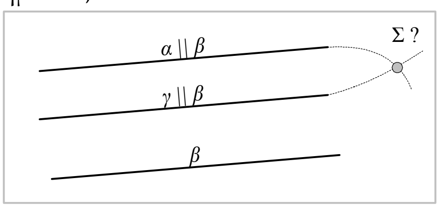
  - ($\gamma = 0$): Οι σχέσεις που έχουμε στη διάθεσή μας γίνονται, $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma = 0$, και, $0 = \gamma\,\zeta = \delta\,\varepsilon$, δηλαδή: $\alpha\,\delta = 0$ και $\delta\,\varepsilon = 0$. Στο ζεύγος $\langle \gamma, \delta \rangle$ έχουμε $\gamma = 0$, και αφού δεν είναι και τα δύο μέλη ίσα με 0, θα έχουμε $\delta > 0$. Από αυτό, και από τα $\alpha\,\delta = 0$ και $\delta\,\varepsilon = 0$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$, και $\varepsilon = 0$. Αυτό μας δίδει το ζητούμενο: $\alpha\,\zeta = 0 = \beta\,\varepsilon$.
  - ($\delta = 0$): (συμμετρικό με το παραπάνω με το ‘δ’ στη θέση του ‘γ’).

- ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ: Έστω ότι ο χώρος αναφοράς μας είναι οι ευθείες του επιπέδου. Από τις πιο σπουδαίες σχέσεις σε αυτό το χώρο είναι η *παραλληλία* ‘||’:

$$(\text{ευθεία } \alpha) \;||\; (\text{ευθεία } \beta) \;\equiv\; \text{« (α ταυτίζεται με β) ή (α, β δεν έχουν κοινό σημείο) »}$$

Ελέγχουμε την ισχύ των ιδιοτήτων Α–Σ–Μ:

- *ανακλαστική*: Το (α || α) ισχύει (εδώ κατά σύμβαση – αν θέλετε), σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.
- *συμμετρική*: Αν (α || β) θα ισχύει και (β || α), διότι οι δύο ευθείες είτε ταυτίζονται είτε δεν έχουν κοινό σημείο, ανεξαρτήτως της σειράς που αναφέρονται.
- *μεταβατική*: Αν (α || β) και (β || γ), θα ισχύει όμως και (α || γ); Τί αποκλείει μία περίπτωση σαν την παρακάτω, όπου δύο διαφορετικές ευθείες α και γ είναι μεν παράλληλες προς την ευθεία β, αλλά έχουν κάποιο κοινό σημείο Σ;



  Δύο παράλληλες προς μία ευθεία από ένα σημείο;; Το ζήτημα αυτό τροφοδότησε 2300 (!) χρόνια γεωμετρικής έρευνας, και ονομάστηκε, τελικά, «το 5ο αξίωμα του *Ευκλείδη*»:

  «από σημείο εκτός ευθείας ε άγεται μία και *μόνον μία* παράλληλος προς την ευθεία ε.»

  Δεν μπορούμε να αποδείξουμε το παραπάνω από τα αξιώματα της Ευκλείδιας γεωμετρίας: η μεταβατικότητα της παραλληλίας, δηλαδή, αποτελεί *αξίωμα* για την Ευκλείδια γεωμετρία!

Εάν όμως αναφερθούμε σε «ευθείες» όχι τόσο αφηρημένα, *αλλά κατά μία συγκεκριμμένη αναπαράστασή τους*, τότε κάτι μπορούμε να αποδείξουμε. Στην καρτεσιανή γεωμετρία, μια ευθεία «αναπαρίσταται» από μια γραμμική εξίσωση με παραμέτρους τις δύο συντεταγμένες:

$$\alpha\, x + \beta\, y = \gamma$$

όπου εκ των δύο συντελεστών α, β, ένας τουλάχιστον πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Η παραλληλία ως μη-τομή δύο διαφορετικών τέτοιων ευθειών σημαίνει ότι το εξής γραμμικό σύστημα <u>δεν</u> έχει λύση:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned}$$

και (εδώ) αυτό ισχύει εάν και μόνον η ορίζουσα μηδενίζεται. Εάν δηλαδή $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, ή «το γινόμενο των άκρων είναι το γινόμενο των μέσων»: $\alpha_1 \beta_2 = \beta_1 \alpha_2$. Αυτό μας φέρνει στο προηγούμενο παράδειγμά μας: εάν από κάθε ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο κρατήσουμε το ζεύγος των συντελεστών της $\langle \alpha, \beta \rangle$, τότε δύο ευθείες είναι παράλληλες εάν και μόνον εάν:

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \approx \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$$

Και σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ήδη δείξει ότι η σχέση είναι (και) μεταβατική!

- Ισοδυναμια διαφορων[1]: Κατά αναλογία του προ-προ-ηγούμενου παραδείγματος χρησιμοποιούμε ως χώρο αναφοράς τα ζεύγη $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, και η σχέση ≈ (που είναι σχέση ισοδυναμίας όπως θα δούμε) ορίζεται ως εξής:

$$(\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle) \equiv (\alpha + \delta = \beta + \gamma)$$

(Μνημονικά: το άθροισμα των άκρων ισούται με το άθροισμα των μέσων: $\overbrace{\alpha \ \underbrace{\beta \ = \ \gamma}_{\beta+\gamma} \ \delta}^{\alpha+\delta}$.)

Ελέγχουμε την ισχύ των Α/Σ/Μ ιδιοτήτων:

- *ανακλαστική:* Ισχύει πάντοτε $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \alpha, \beta \rangle$ διότι, τετριμμένα, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- *συμμετρική:* Ισχύει ότι «εάν $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle$ τότε και $\langle \gamma, \delta \rangle \approx \langle \alpha, \beta \rangle$» διότι η 1η σχέση μας δίδει $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, που γράφεται και ως $\gamma + \beta = \delta + \alpha$, το οποίο μας δίδει τη 2η σχέση.
- *μεταβατική:* Για την μεταβατική ιδιότητα θα πρέπει να δείξουμε ότι:

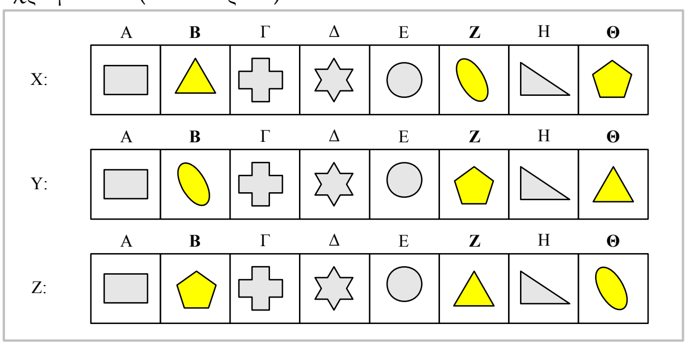
  «εάν $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle$ και $\langle \gamma, \delta \rangle \approx \langle \varepsilon, \zeta \rangle$, τότε και $\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \varepsilon, \zeta \rangle$»

  Η υπόθεση δίδει ότι: $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, και $\gamma + \zeta = \delta + \varepsilon$, και το συμπέρασμα ζητεί $\alpha + \zeta \overset{?}{=} \beta + \varepsilon$.
  Αθροίζοντας τις δύο πρώτες σχέσεις κατά μέλη, λαμβάνουμε:

  $$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\zeta} + \gamma + \delta = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} + \gamma + \delta$$

  και αφαιρώντας το $\gamma + \delta$ από τα δύο μέλη λαμβάνουμε, προφανώς, το ζητούμενο $\alpha + \zeta = \beta + \varepsilon$.

- Ομοιοτητα ακολουθιων: Τοποθετούμε 8 σχήματα σε 8 θέσεις (ονόματι Α, Β, ..., Θ). Σε διάφορες περιπτώσεις ίσως να μην μας ενδιαφέρει το ακριβές σχήμα που έχει τοποθετηθεί σε κάποιες θέσεις, αλλά μόνον ένα επί μέρους χαρακτηριστικό του, λ.χ. το χρώμα του (εδώ κίτρινο).



Ας διακρίνουμε λοιπόν το υποσύνολο Κ = { Β, Ζ, Θ } των θέσεων που έχουν δεχθεί κίτρινα σχήματα. Μπορούμε να θεωρήσουμε δύο τοποθετήσεις Χ και Υ ως *ισοδύναμες* εάν στις θέσεις του συνόλου Κ περιέχουν το ίδιο *σύνολο* σχημάτων, ενώ στις υπόλοιπες περιέχουν τα ίδια σχήματα μία-προς-μία. Στο παραπάνω σχήμα εικονίζονται τρείς τοποθετήσεις που τις θεωρούμε ισοδύναμες διότι διαφέρουν μόνον ως προς τις θέσεις Κ, και εκεί φέρουν το ίδιο συνολικά περιεχόμενο: ένα τρίγωνο, μια έλλειψη και ένα πεντάγωνο. Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας διότι ορίζεται με βάση ένα «κοινό χαρακτηριστικό»: το περιεχόμενο των Α, Γ, Δ, Ε, Η μία-προς-μία, και των Κ = { Β, Ζ, Θ }

[1] Κατά την παρουσιάση του παραδείγματος των ισοδύναμων ζευγών ένας φοιτητής ρώτησε: «*και γιατί να πάρουμε το γινόμενο των άκρων και των μέσων και όχι κάτι άλλο, λ.χ. το άθροισμα;*». Τελικά δόθηκε και αυτό το παράδειγμα προς χάριν της ερώτησης.

από κοινού. Το παράδειγμα, φυσικά, γενικεύεται σε Ν δοχεία, με περιεχόμενα { σ_λ: λ = 1, ..., N}, και υποσύνολο «αδιάφορων» θέσεων $K \subseteq \{1, ..., N\}$, όπου δύο τοποθετήσεις { α_λ: λ = 1, ..., N} και { β_λ: λ = 1, ..., N} είναι ισοδύναμες εάν $\alpha_\lambda = \beta_\lambda$ για $\lambda \notin K$ (μία-προς-μία), και $\{ \alpha_\lambda : \lambda \in K \} = \{ \beta_\lambda : \lambda \in K \}$ (από κοινού).

3. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: οι κλάσεις ισοδυναμίας των παραδειγμάτων.

- Σε κάθε σχέση S η πρώτη προσοχή μας πρέπει να στρέφεται στις εικόνες υπό αυτή την σχέση: για ένα στοιχείο σ ∈ A, ποιά είναι η εικόνα S[{σ}]; Δηλαδή, *με ποιά στοιχεία σχετίζεται το στοιχείο σ*; Στις σχέσεις ισοδυναμίας θα γράφουμε αυτή την εικόνα είτε περιγραφικά ως ***κλάση**$_S$* **(σ)**, είτε περιληπτικά ως **[σ]**$_S$ – (ο δείκτης S παραλείπεται όταν εννοείται εκ των συμφραζομένων):

$$\textit{κλάση}_S(\sigma) \equiv [\sigma]_S \equiv \{ x \in A: (x \approx_S \sigma) \}$$

- Αξίζει να επανεξετάσει κάποιος τα παραδείγματα που δώσαμε και να εντοπίσουμε το ποιά είναι σε κάθε περίπτωση η κλάση κάθε στοιχείου. Σχολιάζουμε το θέμα συνοπτικά:

▪ Χαρακτηριστικα προσωπων:	Υπό τη σχέση «ηλικία(α) = ηλικία(β)» τα ισοδύναμα ενός προσώπου είναι οι συνομήλικοι με αυτόν. Τα ανάλογα ισχύουν για άλλα χαρακτηριστικά.
▪ Χαρακτηριστικα αριθμων:	Υπό την ισοϋπολοιπική σχέση ως προς *m*, η κλάση ισοδυναμίας του μηδενός, είναι τα πολλαπλάσια του *m*.
▪ Ισοτητα τριγωνων: ▪ ομοιοτητα τριγωνων:	Στη σχέση της ισοδυναμίας λόγω μεταφοράς – στροφής, τα ισοδύναμα ενός τριγώνου είναι όλα τα *ίσα* με αυτό. Στη σχέση της ισοδυναμίας λόγω μεταφοράς – στροφής - κλιμάκωσης, τα ισοδύναμα ενός τριγώνου είναι όλα τα *όμοια* με αυτό.
▪ Ισοκοπτικα πολυγωνα:	Στην ισοκοπτική σχέση, η κλάση ενός πολυγώνου είναι όλα όσα έχουν ίσο εμβαδόν με αυτό.
▪ Ισοδυναμια αναλογιων:	Στη σχέση «αναλογικής» ισοδυναμίας δύο ζευγών, τα ισοδύναμα ενός ζεύγους ⟨α, β⟩ είναι όλα τα «πολλαπλάσια» από αυτό ⟨λα, λβ⟩.
▪ Παραλληλια ευθειων:	Στη σχέση της παραλληλίας η κλάση μιας ευθείας είναι όλες οι παράλληλες με αυτήν.
▪ Ισοδυναμια διαφορων:	Στη σχέση «διαφορικής» ισοδυναμίας δύο ζευγών, τα ισοδύναμα ενός ζεύγους ⟨α, β⟩ είναι όλα τα ζεύγη ⟨α+δ, β+δ⟩ με την ίδια διαφορά (εδώ δ) των μελών τους.
▪ Ομοιοτητα ακολουθιων:	(σχολιάζεται αργότερα.)

4. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: μερικά χρήσιμα θεωρήματα.

- Στις κλάσεις ισοδυναμίας αναφέρονται το δύο πρώτα απλά και εύλογα λήμματα αυτής της ενότητας.

⊨ Κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο.

⊢ Κάθε κλάση έχει την μορφή *κλάση*(σ) ≡ { x ∈ A: (x ≈ σ) }, για κάποιο στοιχείο σ, και αφού σ ≈ σ (ανακλαστική), έπεται ότι σ ∈ *κλάση*(σ).

■

⊨ Αν τα στοιχεία σ, σ′ είναι *ισοδύναμα*, τότε οι κλάσεις τους είναι *ίσες*:

$$(\sigma \approx \sigma') \Rightarrow (\textit{κλάση}(\sigma) = \textit{κλάση}(\sigma'))$$

⊢ Αν α ∈ *κλάση*(σ) τότε α ≈ σ, και αφού σ ≈ σ′ τότε α ≈ σ′ (μεταβατική) άρα και α ∈ *κλάση*(σ′). Αντιστρόφως, αν α ∈ *κλάση*(σ′) τότε α ≈ σ′, και αφού σ′ ≈ σ (συμμετρική), τότε α ≈ σ (μεταβατική), και άρα α ∈ *κλάση*(σ). Συνολικά: *κλάση*(σ) = *κλάση*(σ′).

■

- Κλασεις ισοδυναμιας – μια διαμεριση του χωρου αναφορας: Το κεντρικό θεώρημα στις σχέσεις ισοδυναμίας αναφέρεται στη «δομή «που έχουν οι κλάσεις οι ισοδυναμίας, δομή που είναι απλή μεν, αλλά πολύ σημαντική:

⊨ Σε κάθε σχέση ισοδυναμίας ≈, επί συνόλου A, οι κλάσεις ισοδυναμίας

$$\text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(\approx) = \{ \text{κλάση}(\sigma): \sigma \in A \}$$

αποτελούν *διαμέριση* του χώρου αναφοράς A, δηλαδή:

$A = \bigcup_{C \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(\approx)} C$ (καλύπτουν όλο το σύνολο Α.)

$C, C' \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(\approx), C \neq C' \Rightarrow (C \cap C') = \varnothing$ (είναι ξένες μεταξύ τους.)

⊢ Αφού οι κλάσεις είναι υποσύνολα του Α, ισχύει εύλογα ότι $\bigcup_{C \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(\approx)} C \subseteq A$. Αντιστρόφως, κάθε στοιχείο σ ∈ Α, ανήκει σε μιά κάποια κλάση ισοδυναμίας C, (το ελάχιστον σ ∈ κλάση(σ), λόγω *ανακλαστικής* ιδιότητας). Άρα ισχύει και $A \subseteq \bigcup_{C \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(\approx)} C$.

Για να δείξουμε ότι οι κλάσεις είναι ξένες ανά δύο θα πρέπει να δείξουμε ότι αν δύο κλάσεις C, C′ δεν είναι ξένες, (δηλαδή έχουν κοινό στοιχείο) τότε είναι ίσες:

$$(C \cap C' \neq \varnothing) \Rightarrow (C = C')$$

Έστω ότι οι κλάσεις C, C′ προέρχονται από τα στοιχεία σ και σ′, δηλαδή C = *κλάση*(σ), C′ = *κλάση*(σ′). Αν έστω ένα στοιχείο α ανήκει στην τομή C ∩ C′, τότε α ≈ σ (αφού ανήκει στην κλάση C του σ), και, παρομοίως, α ≈ σ′. Από την συμμετρική ιδιότητα έχουμε ότι σ ≈ α, και στη συνέχεια, από την μεταβατική ιδιότητα, έχουμε ότι σ ≈ σ′. Το πρώτο μας λήμμα, μας λεει τώρα ότι αφού τα σ και σ′ είναι ισοδύναμα, *κλάση*(σ) = *κλάση*(σ′).

■

Το παραπάνω θεώρημα μας δίδει το πιο ιδιαίτερο γνώρισμα των σχέσεων ισοδυναμίας, και ακριβέστερα, μας δίδει έναν (αφ′ υψηλού) *χαρακτηρισμό* των σχέσεων ισοδυναμίας (βλ. και σχήμα παρακάτω):

⊨ Για κάθε σύνολο Α, όλες οι δυνατές σχέσεις ισοδυναμίας επ′ αυτού αντιστοιχούν 1-προς-1 με το σύνολο όλων των διαμερίσεων του Α.

⊢ Η απόδειξη είναι προφανής: όπως είδαμε από μια σχέση ισοδυναμίας παράγεται μία διαμέριση του Α, και από μία διαμέριση Δ του Α παράγεται μια σχέση ισοδυναμίας ≈ (που έχει μάλιστα αυτή την διαμέριση ως κλάσεις: ΚΛΑΣΕΙΣ(≈) = Δ):

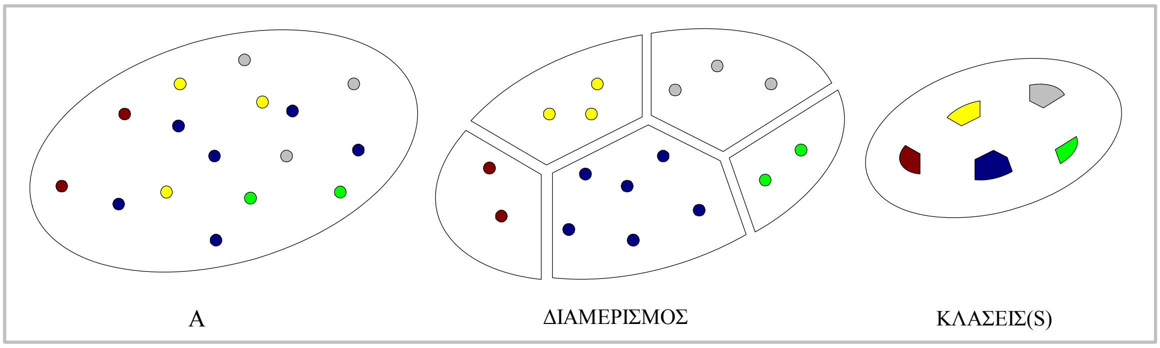
$$(\alpha \approx \beta) \equiv (\text{τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ ανήκουν στο ίδιο (υπο)σύνολο της διαμέρισης } \Delta)$$

Η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας αφού στηρίζεται σε ένα «κοινό χαρακτηριστικό» χ(-):

$$\chi(\alpha) = \text{το σύνολο της } \Delta \text{ όπου αυτό ανήκει.}$$

■

▪ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: Χάρι στο παραπάνω δομικό θεώρημα, η σχεδίαση μιας σχέσης ισοδυναμίας απλουστεύεται: αρκεί να σχεδιάζουμε το σύνολο αναφοράς και, κατά τον προφανή τρόπο, την διαμέριση που η σχέση ισοδυναμίας παράγει (ή παράγεται από). Στο παρακάτω σχήμα θα χρειαζόμασταν 62 βελάκια για να σχεδιάσουμε τα ζεύγη της σχέσης S που εικονίζεται (ως ομοχρωμία) – χωρίς αυτό να βοηθούσε στη κατανόησή της. Δεξιά στο σχήμα βλέπουμε πως η διαμέριση ΚΛΑΣΕΙΣ(S), αποτελεί μια «σύνοψη» του συνόλου Α (από την οπτική γωνία της συγκεκριμμένης σχέσης).



▪ ΙΣΟΠΛΗΘΕΙΣ ΚΛΑΣΕΙΣ: Το γεγονός ότι οι κλάσεις μιας σχέσης ισοδυναμίας διαμερίζουν το σύνολο αναφοράς μας οδηγεί σε ειδικές περιπτώσεις σε ένα απλοϊκό αλλά αναντικατάστατο λήμμα:

⊨ Αν σε μια σχέση ισοδυναμίας ≈, επί (πεπερασμένου) συνόλου Α, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι *ισοπληθείς*, τότε ισχύει η εξής σχέση για το μέγεθος του Α:

|Α| = ΠΛΗΘΟΣ-ΚΛΑΣΕΩΝ × ΜΕΓΕΘΟΣ-ΤΩΝ-ΚΛΑΣΕΩΝ

⊢ Η απόδειξη είναι προφανής: αφού οι κλάσεις είναι ξένες μεταξύ τους μπορούμε να αθροίσουμε τα μεγέθη τους χωρίς να μετρήσουμε ένα στοιχείο δύο φορές· και αφού καλύπτουν όλο το σύνολο Α το άθροισμα δεν θα παραλείψει κανένα στοιχείο του Α. Το άθροισμα των μεγεθών τους θα μας δώσει λοιπόν σωστά το μέγεθος Α, και αυτό το άθροισμα είναι προφανώς ίσο με ΠΛΗΘΟΣ-ΚΛΑΣΕΩΝ φορές το ΜΕΓΕΘΟΣ-ΤΩΝ-ΚΛΑΣΕΩΝ.

■

Η αξία του λήμματος είναι μεγαλύτερη από όση φαίνεται.

5. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: η «ερμηνεία» των κλάσεων ισοδυναμίας.

▪ Με δεδομένη μια γενική εικόνα της «δομής» μιας σχέσης ισοδυναμίας, αξίζει να επανεξετάσουμε τα παραδείγματα που δώσαμε για να εντοπίσουμε πως φωτίζει κάθε περίπτωση αυτό το θεώρημα για τη διαμέριση εκ των κλάσεων ισοδυναμίας. Σχολιάζουμε το θέμα συνοπτικά, και αναλύουμε περισσότερο 1-2 περιπτώσεις:

▪ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΣΩΠΩΝ:	Η κλάση ισοδυναμίας ως προς «επάγγελμα» μας δίνει όλους έχουν το ίδιο επάγγελμα, επομένως οι κλάσεις ισοδυναμίας, μας δίνει όλα τα «επαγγέλματα». Παρομοίως η σχέση «τόπος καταγωγής» μας δίδει όλους τους Μακεδόνες, Νησιώτες, Ηπειρώτες κτт. Το ανάλογο ισχύει και για ολα τα άλλα γνωρίσματα: ηλικία, χρώμα οφθαλμών, κοκ.
▪ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΡΙΘΜΩΝ:	Κάθε κλάση της σχέσης $\approx_m$ περιέχει ισοϋπολοιπικούς ως προς m αριθμούς, επομένως οι κλάσεις περιγράφουν όλα τα δυνατά υπόλοιπα ως προς m.
▪ ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ: ▪ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ:	Κάθε κλάση του 1ου είδους περιέχει ίσα τρίγωνα, επομένως οι κλάσεις ισοδυναμίας μας λένε ποιά τρίγωνα υπάρχουν – ανεξαρτήτως θέσης. Στη 2η περίπτωση κάθε κλάση περιέχει «τα» όμοια μεταξύ τους τρίγωνα, επομένως οι κλάσεις ισοδυναμίας περιγράφουν όλες τις «μορφές» τριγώνων, (ασχέτως θέσης *και* μεγέθους).
▪ ΙΣΟΚΟΠΤΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ:	Κάθε κλάση περιέχει πολύγωνα που είναι ισεμβαδικά μεταξύ τους, επομένως, οι κλάσεις περιγράφουν όλα τα δυνατά εμβαδά που μπορούν να εμφανιστούν στα επίπεδα πολύγωνα.
▪ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ:	Στην ισοδυναμία αναλογιών είδαμε ότι η σχέση ορίζεται ως εξής: $(\langle \alpha,\beta\rangle \approx \langle \gamma,\delta\rangle) \equiv (\alpha\delta = \beta\gamma)$ Η ισότητα των γινομένων γράφεται και ως $\alpha/\gamma = \beta/\delta = \lambda$, και άρα δύο ζεύγη είναι ισοδύναμα εάν το 1ο είναι πολλαπλάσιο του 2ου – (μια περίπτωση μετασχηματισμού!): $(\langle \alpha,\beta\rangle \approx \langle \gamma,\delta\rangle) \equiv$ υπάρχει λ ώστε $\langle \alpha,\beta\rangle = \langle \lambda\gamma,\lambda\delta\rangle$ Αυτό γεννά το ερώτημα «*και γιατί όλη αυτό το κεφαλοκλείδωμα, αφού η σχέση είναι τόσο απλή;*». Διότι η σχέση φαίνεται απλή όταν *έχεις την δυνατότητα της διαίρεσης* – και στους φυσικούς αριθμούς δεν την έχουμε (πάντοτε)! Εδώ, αντιθέτως, η παραπάνω σχέση που ορίζεται με βάση αυτό που έχουμε, τον πολλαπλασιασμό, μας οδηγεί στις κλάσεις ισοδυναμίας, οι οποίες δεν παριστούν παρά τα *ισοδύναμα κλάσματα*, δηλαδή τους *ρητούς αριθμούς*! Αν γράψουμε κάθε ζεύγος ως «κλάσμα» (όπου β > 0), $\langle \alpha,\beta\rangle = \frac{\alpha}{\beta}$ μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις των ρητών αριθμών, και να αποκτήσουμε ένα σύνολο «αριθμών» στους οποίους επιτρέπεται πάντοτε η διαίρεση (πλην δια μηδενός): $\frac{\alpha}{\beta} / \frac{\gamma}{\delta} = \langle \alpha,\beta\rangle / \langle \gamma,\delta\rangle \equiv \langle \alpha\delta, \beta\gamma\rangle = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ Προσέξτε ότι το «1» εκπροσωπείται από τα ζεύγη $\langle x, x\rangle$, και το αντίστροφο ενός ζεύγος $\langle \alpha,\beta\rangle$, εκπροσωπείται απλά, από το $\langle \beta,\alpha\rangle$!
▪ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ:	Κάθε ευθεία έχει μια «κλίση» και η κλάση αυτής της ευθείας περιέχει όλες και μόνον τις ευθείες με αυτή την κλίση. Οι κλάσεις ισοδυναμίας μας δίδουν λοιπόν όλες τις κλίσεις που μπορεί να παρουσιάσει μια ευθεία στο επίπεδο.
▪ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ:	Στην ισοδυναμία διαφορών είδαμε ότι η σχέση ορίζεται ως εξής:

	$$(\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle) \;\equiv\; (\alpha + \delta = \beta + \gamma)$$ Η ισότητα γράφεται και ως $\alpha-\gamma = \beta-\delta = d$, και άρα δύο ζεύγη είναι ισοδύναμα εάν το 1ο είναι μια «αύξηση» του 2ου κατά d : $$(\langle \alpha, \beta \rangle \approx \langle \gamma, \delta \rangle) \;\equiv\; \text{υπάρχει } d \text{ ώστε } \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \gamma + d, \delta + d \rangle$$ Και εδώ η σχέση φαίνεται απλή όταν έχεις την δυνατότητα της *αφαίρεσης*, αλλά στους φυσικούς αριθμούς δεν την έχουμε πάντοτε! Ας προσέξουμε εδώ ότι αν, για $d > 0$, έχουμε $\alpha - \beta = d > 0$, τότε το ζεύγος $\langle \alpha, \beta \rangle$ είναι ισοδύναμο με το ζεύγος $\langle d, 0 \rangle$, ενώ εάν $\alpha - \beta = (-d) < 0$, το $\langle \alpha, \beta \rangle$ είναι ισοδύναμο με το $\langle 0, d \rangle$. Οι κλάσεις τύπου $[\langle d, 0 \rangle]$ αναπαριστούν λοιπόν «θετικές» και οι κλάσεις $[\langle 0, d \rangle]$ «αρνητικές» διαφορές. Το *μηδενικό* στοιχείο είναι η κλάση $[\langle x, x \rangle]$, ο *αντίθετος* ενός «ακεραίου» $[\langle \alpha, \beta \rangle]$ ορίζεται από το, $$-[\langle \alpha, \beta \rangle] \;\equiv\; [\langle \beta, \alpha \rangle]$$ η *πρόσθεση* δύο ακεραίων ορίζεται απλά ως, $$[\langle \alpha, \beta \rangle] + [\langle \gamma, \delta \rangle] \;\equiv\; [\langle \alpha+\gamma, \beta+\delta \rangle]$$ και η *αφαίρεση* είναι η πρόσθεση του αντιθέτου: $$[\langle \alpha, \beta \rangle] - [\langle \gamma, \delta \rangle] \;\equiv\; [\langle \alpha+\delta, \beta+\gamma \rangle]$$ Εδώ λοιπόν, οι κλάσεις ισοδυναμίας «είναι» οι *ακέραιοι αριθμοί* : οι θετικοί ακέραιοι αντιστοιχούν στις κλάσεις $[\langle d, 0 \rangle]$, οι αρνητικοί στις κλάσεις $[\langle 0, d \rangle]$, το μηδέν στην κλάση $[\langle 0, 0 \rangle]$, και οι πράξεις μεταξύ των κλάσεων είναι σε μία-προς-μία αντιστοιχία με εκείνες επί των ακεραίων. Μόνον που οι αυτές κλάσεις ισοδυναμίας δεν χρησιμοποιούν τους ακέραιους: ο ορισμός τους εμπλέκει μόνον τους φυσικούς και την πρόσθεση! Προσέχουμε εδώ ότι ο μηχανισμός των σχέσεων και των κλάσεων ισοδυναμίας είναι τόσο βαθύς ώστε είναι δυνατόν να ***ορίσει*** τους *ακεραίους*, (όπως πριν τους *ρητούς* (από τα «κλάσματα»), και πολλά άλλα). Αυτή η *δημιουργική* δύναμη των σχέσεων ισοδυναμίας είναι κεντρικό εργαλείο στα μαθηματικά, (είτε διακριτά, είτε συνεχή).
▪ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ:	Έστω ότι τοποθετούμε n αντικείμενα, από ένα σε n θέσεις. Όλοι οι τρόποι τοποθέτησης είναι: n για το 1ο εξ αυτών, επί (n–1) για το 2ο, επί (n–2) για το 3ο, κοκ, δηλαδή $n\times(n-1)\times(n-1)\times\ldots\times2\times 1 = n!$ συνολικά. Τί συμβαίνει όμως εάν k από αυτά είναι τα ίδια; Τότε οι εναλλαγές μεταξύ τους δεν θα άλλαζαν την τοποθέτηση. Πώς θα μετρήσουμε σωστά σε αυτή την περίπτωση; Το πρόβλημα είναι ότι η φράση «*έχουμε δύο ‘ίδια’ αντικείμενα*» δεν έχει μαθηματικό νόημα: «δύο» αντικείμενα είναι είτε το *ένα ίδιο* αντικείμενο, είτε *δύο διαφορετικά* αντικείμενα. Πώς θα χειριστούμε τέτοιες περιπτώσεις με σαφήνεια; Η απάντηση-λύση είναι η *ισοδυναμία*. Έστω ότι κατα μία τοποθέτηση X το σύνολο των k «ιδίων» αντικειμένων έχει τοποθετηθεί στις θέσεις $K \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Θεωρούμε όλες τις τοποθετήσεις που κατά το παράδειγμά μας (σελ. 4) είναι *ισοδύναμες* με την X. Αυτές οι τοποθετήσεις αποτελούν την κλάση ισοδυναμίας [X], της X, και αν θεωρούμε τα αντικείμενα στις θέσεις K ως «ίδια», αυτή η κλάση περιέχει ακριβώς όλες τις τοποθετήσεις που θεωρούμε ως «ίδιες» με την X. Τί μέγεθος έχει μια τέτοια κλάση; Οι δυνατές εναλλακτικές τοποθετήσεις k αντικειμένων σε αυτές τις k θέσεις είναι k! – όπως παρατηρήσαμε στην αρχή. Η κλάση [X] έχει λοιπόν μέγεθος k!, αλλά αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας των τοποθετήσεων είναι ισοπληθείς (!): είναι όλες μεγέθους k! . Το σύνολο όλων των n! τοποθετήσεων διαμερίζεται σε τέτοιες κλάσεις *ισοδύναμων (εκ μέρους μας)* τοποθετήσεων. Πόσες είναι; Έστω q. Αφού οι κλάσεις είναι ισοπληθείς, μεγέθους k!, και $n! = q \times k!$, έχουμε $q = n!/k!$ (!) Το «μάθημα» από αυτό το παράδειγμα – που θα το συναντήσουμε πολλές φορές στην ενότητα περί καταμέτρησης και συνδυαστικής – είναι ότι οι σχέσεις ισοδυναμίας δεν είναι πάντοτε ένα βαρύγδουπο συμβάν που έρχεται και μένει (όπως στην περίπτωση της ισοκοπτικότητας ή της ισοδυναμίας των αναλογιών), αλλά εμφανίζονται και *παροδικά*, ως *αναλυτικό* εργαλείο. Η «μισή» τους αξία έχει αυτή την μορφή: η σχέση λησμονείται μεν, τα αποτελέσματα όμως όχι.

6. ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ: *λογικές σχέσεις & πράξεις.*

▪ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ & ΕΚΛΕΠΤΥΝΣΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ: Αν μια σχέση ισοδυναμίας S είναι *υποσύνολο* μιας άλλης σχέσης ισοδυναμίας T, δηλαδή $S \subseteq T$, τότε τί σχέση έχουν μεταξύ τους οι κλάσεις ισοδυναμίας των σχέσεων αυτών; Το εξής μας λέει ότι και αυτές έχουν σχέση υποσυνόλων από την S προς την T:

⊨ Αν σε δύο σχέσεις ισοδυναμίας S και T, η 1η επιφέρει την 2η, δηλαδή $S \subseteq T$, ή κατά λογική,

$$(\alpha \approx_S \beta) \Rightarrow (\alpha \approx_T \beta)$$

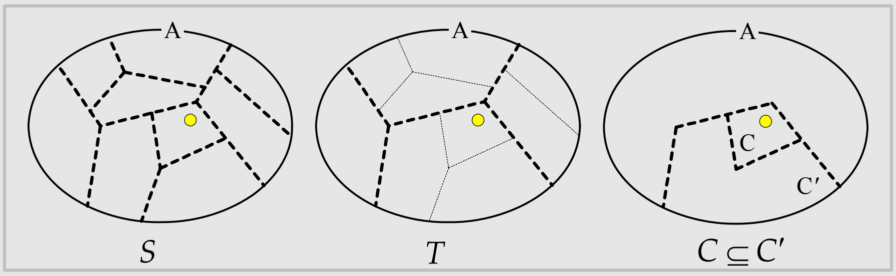
τότε οι κλάσεις της S αποτελούν *λεπτότερη διαμέριση* των κλάσεων της $\approx_T$:

$$C \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(S) \Rightarrow \exists C' \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(T) \text{ ώστε } C \subseteq C'$$

⊢ Έστω C μια κλάση της S, και έστω σ ένα στοιχείο της (αφού οι κλάσεις δεν είναι ποτέ κενές). Το στοιχείο σ θα ανήκει, ως προς την 2η σχέση T, στη κλάση $C' = \textit{κλάση}_T(\sigma)$. Κάθε στοιχείο α της κλάσης C είναι ισοδύναμο με το σ ως προς την S, άρα και ως προς την σχέση T, και άρα ανήκει στην κλάση C′ . Συμβολικά:

$$(\alpha \in C = \text{κλάση}_S(\sigma)) \Rightarrow (\alpha \approx_S \sigma) \Rightarrow (\alpha \approx_T \sigma) \Rightarrow (\alpha \in \text{κλάση}_T(\sigma) = C').$$

Εξ αυτού λαμβάνουμε ότι $C \subseteq C'$.



■

▪ ΣΥΖΕΥΞΗ & ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ: Οι σχέσεις ισοδυναμίας επιδέχονται διάφορες πράξεις, απλώς ως σχέσεις. Υπάρχει κάποια πράξη από αυτές τέτοια ώστε από σχέσεις ισοδυναμίας παράγει επίσης μια σχέση ισοδυναμίας. Στη γενική περίπτωση μόνον η πράξη της τομής έχει αυτή την ιδιότητα:

⊨ Η τομή $S \cap T$ δύο σχέσεων ισοδυναμίας S και T επί συνόλου A, δηλαδή η σύζευξη,

$$(\alpha \approx_{S\cap T} \beta) \equiv (\alpha \approx_S \beta) \wedge (\alpha \approx_T \beta)$$

είναι επίσης σχέση ισοδυναμίας, και οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής προκύπτουν ως η *κοινή διαμέριση* των κλάσεων ισοδυναμίας των S και T.

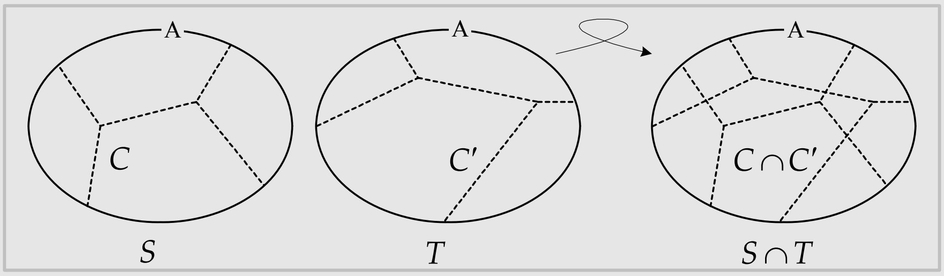
⊢ Οι ιδιότητες Α/Σ/Μ επιβεβαιώνονται με ευθύ και άμεσο τρόπο. Ως προς τις κλάσεις ισοδυναμίας, για κάθε στοιχείο σ είναι προφανές ότι:

$$\text{κλάση}_{S\cap T}(\sigma) = \text{κλάση}_S(\sigma) \cap \text{κλάση}_T(\sigma)$$

διότι τα στοιχεία του 1ου μέλους είναι και του 2ου και αντιστρόφως. Επομένως:

$$\text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(S\cap T) = \{ C \cap C' : C \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(S),\ C' \in \text{ΚΛΑΣΕΙΣ}(T),\ C \cap C' \neq \varnothing \}$$

διότι αυτά τα υποσύνολα *διαμερίζουν* το A και είναι όλα κλάσεις ισοδυναμίας της $S \cap T$.



Η παραπάνω έκφραση περιγράφει την κοινή διαμέριση εκ των διαμερίσεων της S και T.

■

Δείγματα ζητημάτων «σχέσεων ισοδυναμίας» από τον χώρο της επιστήμης των υπολογιστών:

Στη θεωρία και την πράξη της «πληροφορικής» θα συναντήσετε έναν ορυμαγδό από κρυφές ή φανερές σχέσεις ισοδυναμίας, αρκεί να φορέσετε τα κατάλληλα γυαλιά. Αναφέρουμε, προχείρως, ένα δείγμα:

- Σε ένα πρόγραμμα ένα *όνομα* (μεταβλητής) 'Χ' εμφανίζεται σε δύο σημεία. Πότε αυτές οι εμφανίσεις δηλώνουν την *ίδια μεταβλητή*;
- Πότε δύο προγράμματα Α και Β κάνουν την «ίδια δουλειά»;
- Πότε δύο αλγόριθμοι έχουν «ισοδύναμες» επιδόσεις στο τρόπο με τον οποίο λύνουν ένα πρόβλημα;
- Ένα σύστημα διαχείρισης βάσης δεδομένων (λ.χ. σε μια τράπεζα), πρόκειται να εκτελέσει ένα σύνολο δοσοληψιών ('transactions'), κάτα κάποια σειρά. Αλλά ποιά σειρά; Ποιές σειρές εκτέλεσης αυτών των δοσοληψιών είναι ισοδύναμες μεταξύ τους;
- Πεντακόσια εκατομμύρια και κάτι ψιλά χρήστες εκδηλώνουν τα ενδιαφέροντά τους για την αγορά βιβλίων από το διαδίκτυο. Πότε τα ενδιαφέροντα δύο εξ αυτών μπορούν να θεωρηθούν ως «ισοδύναμα» (ώστε λ.χ. κάποιο σύστημα να προτείνει στον ένα εξ αυτών να προμηθευτεί ότι και ο άλλος;)
- Διαδικτυώνουμε 6,000 τοποθεσίες με ένα δίκτυο. Πότε δύο τρόποι διασύνδεσης μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμοι; Και από πιά «οπτική γωνία»;
- Έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά τρόπων συμπίεσης δεδομένων. Πότε και υπό ποία έννοια είναι δύο εξ αυτών ισοδύναμοι;
- Έχουμε δύο ψηφιακές φωτογραφίες ή εικόνες. Πότε είναι ισοδύναμες ως προς το περιεχόμενό τους; (Εάν λ.χ. αυτές είναι ακτινογραφίες, πότε εικονίζουν την ίδια ασθένεια;)
- Μας δίδουν δύο ψηφιακά φωνητικά σήματα. Πότε είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι προέρχονται από το ίδιο πρόσωπο; Με την έννοια ότι προέρχονται και τα δύο από παιδική φωνή; Ή από βαρύτονο; κοκ.
- Σχετικά με ένα πληροφοριακό σύστημα, έχουμε στη διάθεσή μας δύο γλώσσες διατύπωσης ερωτημάτων (*query languages*). Πότε είναι εκφραστικά ισοδύναμες; Μήπως υπάρχει ένα ερώτημα στη 1η που δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί με την 2η;
- Σε μία ορισμένη γλώσσα διατύπωσης ερωτημάτων ένας χρήστης διατυπώνει δύο ερωτήματα. Πότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή πότε είναι το ίδιο ερώτημα διατυπωμένο υπό δύο διαφορετικούς τρόπους;
- Μας δίνουν δύο πακέτα τεχνικών προδιαγραφών για ένα σύστημα. Πότε τα θεωρούμε ισοδύναμα, ότι δηλαδή ζητούν τα «ίδια» πράγματα;
- Αποσκοπώντας σε ένα πεδίο εφαρμογής, (λ.χ. την οργάνωση μιας αποθήκης), σχεδιάζουμε δύο βάσεις δεδομένων, δηλαδή δύο «σχήματα» των σχέσεων που θα αποθηκεύονται. Πότε οι δύο βάσεις είναι ισοδύναμες;
- Σε ένα δίκτυο έχουμε δύο δυνατά πρωτόκολλα επικοινωνίας δύο κόμβων του δικτύου. Πότε αυτά τα πρωτόκολλα είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι εξασφαλίζουν την ίδια «συμπεριφορά» στο δίκτυο;
- Για την «ίδια» γλώσσα προγραμματισμού δύο εταιρείες εκδίδουν δύο τυπικές περιγραφές (δύο «γραμματικές»). Είναι ισοδύναμες πράγματι – ή ενδέχεται να έχουμε ασυμβίβαστες διαφορές;
- Σε δύο γλωσσομεταφραστικά συστήματα, ο υπολογισμός δύο λογικών εκφράσεων υλοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πότε και πώς αυτοί οι τρόποι είναι ισοδύναμοι;
- Ερχόμαστε αντιμέτωποι με δύο (αλγοριθμικά) προβλήματα. Πότε είναι ισοδύναμα, δηλαδή πότε έχουν τον ίδιο «βαθμό δυσκολίας»;