Διακριτά Μαθηματικά

Σημείωση

Το ΕΑΠ είναι υπεύθυνο για την επιμέλεια έκδοσης και την ανάπτυξη των κειμένων σύμφωνα με τη Μεθοδολογία της εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης. Για την επιστημονική αρτιότητα και πληρότητα των συγγραμμάτων την αποκλειστική ευθύνη φέρουν οι συγγραφείς, κριτικοί αναγνώστες και ακαδημαϊκοί υπεύθυνοι που ανέλαβαν το έργο αυτό.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Θεματική Ενότητα
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τόμος Α'

Διακριτά Μαθηματικά

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΒΟΥΡΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών
Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΤΡΑ 2002

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Θεματική Ενότητα
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τόμος Α΄
Διακριτά Μαθηματικά

Συγγραφή
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΒΟΥΡΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών
Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων Πανεπιστημίου Αιγαίου

Κριτική Ανάγνωση
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ
Λέκτορας Τμήματος Στατιστικής
Πανεπιστημίου Southampton

Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος για την επιστημονική επιμέλεια του τόμου
ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΚΑΤΣΙΚΑΣ
Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών
Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων Πανεπιστημίου Αιγαίου

Επιμέλεια στη μέθοδο της εκπαίδευσης από απόσταση
ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΙΕΡΡΑΚΕΑΣ

Γλωσσική Επιμέλεια
ΕΛΠΙΔΑ ΒΑΚΑΛΟΓΛΟΥ

Τεχνική Επιμέλεια
TYPORAMA

Καλλιτεχνική Επιμέλεια, Σελιδοποίηση
TYPORAMA

Συντονισμός ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και γενική επιμέλεια των εκδόσεων
ΟΜΑΔΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΟΥ ΕΑΠ / 2001

ISBN: 960–538–373–X
Κωδικός Έκδοσης: ΠΛΗ 20/1

Copyright 2000 για την Ελλάδα και όλο τον κόσμο
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Οδός Παπαφλέσσα & Υψηλάντη, 26222 Πάτρα – Τηλ: (0610) 314094, 314206 Φαξ: (0610) 317244

Σύμφωνα με το Ν. 2121/1993, απαγορεύεται η συνολική ή αποσπασματική αναδημοσίευση του βιβλίου αυτού ή η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε μέσο χωρίς την άδεια του εκδότη.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προτάσεις και αποδεικτικές διαδικασίες

Σκοπός

Οι μέθοδοι της μαθηματικής λογικής χρησιμοποιούνται από τους μαθηματικούς για την απόδειξη θεωρημάτων και από τους επιστήμονες πληροφορικής για να αποδείξουν ότι οι αλγόριθμοι που σχεδιάζουν και υλοποιούν παρέχουν στην έξοδο τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Η ανάπτυξη δε της τεχνητής νοημοσύνης οδήγησε στην ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων και γλωσσών προγραμματισμού (π.χ. PROLOG) που υλοποιούν αποδεικτικές διαδικασίες βασισμένες στη μαθηματική λογική.

Η μαθηματική λογική κυρίως ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων και με την ορθότητα των συλλογισμών.

Για παράδειγμα, αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς,

(α) Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος

(β) Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί

Τότε η μαθηματική λογική μας βεβαιώνει ότι και η πρόταση

Ο Σωκράτης είναι θνητός

είναι επίσης αληθής.

Στην ενότητα 1.1 του κεφαλαίου αυτού ορίζεται η έννοια της πρότασης και καθορίζεται πώς από απλές προτάσεις προκύπτουν σύνθετες (υποενότητα 1.1.1). Στην ίδια ενότητα, ορίζεται η έννοια της προτασιακής συνάρτησης και παρουσιάζεται η χρήση των ποσοδεικτών (υποενότητα 1.1.2). Στο τέλος της ενότητας 1.1, παρουσιάζονται οι γενικευμένοι κανόνες De Morgan (υποενότητα 1.1.3). Στη συνέχεια, στην ενότητα 1.2 συζητείται η έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική επαγωγή.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η κατανόηση των εννοιών του κεφαλαίου θα σας επιτρέψει να

- *διακρίνετε αν μια έκφραση είναι πρόταση,*
- *διατυπώνετε προτάσεις φυσικού λόγου με συμβολικό τρόπο, με ή χωρίς τη χρήση ποσοδεικτών και λογικών τελεστών, και αντιστρόφως,*
- *συνθέτετε σύνθετες προτάσεις από απλές προτάσεις και να εκτιμάτε την τιμή αλη-*

θείας μιας σύνθετης πρότασης, δεδομένων των τιμών αληθείας των επιμέρους προτάσεων από τις οποίες συντίθεται,

- *διαχωρίζετε και να δίνετε παραδείγματα για τις έννοιες «θεώρημα», «αξίωμα», «ορισμός»,*
- *χρησιμοποιείτε αποδεικτικές μεθόδους για την επαλήθευση προτάσεων,*
- *διατυπώνετε και εφαρμόζετε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.*

Έννοιες κλειδιά

- *προτάσεις*
- *απλές προτάσεις*
- *σύνθετες προτάσεις*
- *υποθετικές προτάσεις*
- *υπαρξιακός και καθολικός ποσοδείκτης*
- *πεδίο αναφοράς (domain of discourse)*
- *νόμοι de Morgan*
- *πίνακας αληθείας*
- *αξίωμα, ορισμός*
- *θεώρημα*
- *αποδεικτική διαδικασία*
- *απαγωγή σε άτοπο*
- *μαθηματική επαγωγή*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η κατανόηση των εννοιών του κεφαλαίου αυτού, πέρα από την παροχή εισαγωγικών γνώσεων στη μαθηματική λογική, θα σας βοηθήσει να ακολουθήσετε με ευκολία τα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου, να αναπτύξετε την ικανότητα διατύπωσης αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων με ακρίβεια και σαφήνεια, καθώς επίσης να αποκτήσετε την ικανότητα απόδειξης θεωρημάτων εφαρμόζοντας αποδεικτικές διαδικασίες.

1.1 Προτάσεις και ποσοδείκτες

Σκοπός

Στην υποενότητα 1.1.1 της ενότητας αυτής ορίζεται η έννοια της πρότασης και καθορίζονται οι τρόποι κατασκευής σύνθετων προτάσεων. Τέλος, εξηγείται ο τρόπος εκτίμησης της τιμής αληθείας μιας πρότασης. Στην υποενότητα 1.1.2 καθορίζεται η έννοια της προτασιακής συνάρτησης και παρουσιάζεται η χρήση ποσοδεικτών. Στο τέλος της ενότητας και στην υποενότητα 1.1.3 παρουσιάζονται οι γενικευμένοι κανόνες De Morgan.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Έχοντας μελετήσει την ενότητα αυτή θα μπορείτε να

- *διακρίνετε αν μια έκφραση είναι πρόταση,*
- *διατυπώνετε προτάσεις με συμβολικό τρόπο, με ή χωρίς τη χρήση ποσοδεικτών και λογικών τελεστών, και αντιστρόφως,*
- *συνθέτετε σύνθετες προτάσεις από απλές προτάσεις και να εκτιμάτε την τιμή αληθείας μιας σύνθετης πρότασης, δεδομένων των τιμών αληθείας των επιμέρους προτάσεων από τις οποίες συντίθεται.*

Έννοιες κλειδιά

- *προτάσεις*
- *απλές προτάσεις*
- *σύνθετες προτάσεις*
- *υποθετικές προτάσεις*
- *υπαρξιακός και καθολικός ποσοδείκτης*
- *πεδίο αναφοράς*
- *νόμοι de Morgan*
- *πίνακας αληθείας.*

1.1.1 Προτάσεις

Μπορείτε να αποφανθείτε για το αν η καθεμία από τις ακόλουθες εκφράσεις είναι είτε αληθής είτε ψευδής (αλλά όχι και τα δύο);

1. Ο αριθμός 4 διαιρείται με το 2.
2. Ο αριθμός 5 διαιρείται μόνο με το 5 και το 1.
3. Ο Ντε Γκώλ πήρε το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
4. Για κάθε ακέραιο κ υπάρχει πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του κ.
5. Βρες μου το τηλέφωνο του Γιώργου
6. Θα έπρεπε να βρέχει

Η έκφραση (1) είναι αληθής δίχως καμία αμφιβολία.

Η έκφραση (2) είναι επίσης αληθής. Γνωρίζουμε ότι κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 1 διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα. Η έκφραση (2) μας λεει ότι ο 5 είναι πρώτος αριθμός.

Δεν γνωρίζω αν πράγματι θα άξιζε ο Ντε Γκωλ το Νόμπελ Λογοτεχνίας. Πάντως η έκφραση (3) είναι ψευδής.

Η έκφραση (4) είναι επίσης αληθής.

Οι εκφράσεις (5) και (6) δεν εκφράζουν κάποια γεγονότα ή ιδιότητες διακριτών αντικειμένων. Η έκφραση (5) είναι μια εντολή και η (6) είναι μια ευχή. Κανείς όμως δεν μπορεί να τις χαρακτηρίσει ως αληθείς ή ψευδείς.

Ορισμός 1.1: Μια έκφραση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ψευδής ή αληθής, αλλά όχι και τα δύο, καλείται **πρόταση**.

Οι προτάσεις αποτελούν στοιχειώδεις δομές της μαθηματικής λογικής.

Οι εκφράσεις (1), (2), (3), (4) παραπάνω είναι προτάσεις, αλλά οι (5) και (6) δεν είναι.

Για το συμβολισμό προτάσεων θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα π, ρ, τ και στην περίπτωση παραδειγμάτων, αν θέλουμε να επισημάνουμε μια πρόταση με ένα από τα παραπάνω γράμματα, θα ακολουθούμε το συμβολισμό:

Ο αριθμός 5 διαιρείται μόνο με το 5 και το 1 (π)

Πολλές φορές αναφερόμαστε στο χαρακτηρισμό «αληθής» ή «ψευδής» για μια πρόταση π, χρησιμοποιώντας τον όρο **τιμή αληθείας** για την πρόταση π. Αν η πρόταση π είναι αληθής, τότε η τιμή αληθείας της είναι «αληθής» (συμβολίζεται T). Στην αντίθετη περίπτωση, θα είναι «ψευδής» (συμβολίζεται F). Για παράδειγμα, η πρόταση (π) παραπάνω έχει τιμή αληθείας T.

Εκφράσεις, όπως «Χθες ήταν συννεφιά *και* σήμερα βρέχει», «Αύριο θα φύγω *ή* θα μείνω», «Αν είναι έξυπνη, τότε την παντρεύομαι», αποτελούν συνδυασμούς προτάσεων και μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς, ανάλογα με το αν οι επιμέρους προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Για παράδειγμα, η πρόταση «Αν είναι έξυπνη, τότε την παντρεύομαι» είναι αληθής (δεν είναι η μοναδική περίπτωση) αν η πρόταση «Είναι έξυπνη» είναι ψευδής και η πρόταση «Την παντρεύομαι» είναι αληθής. Αυτό σίγουρα σας δημιούργησε μια απορία, την οποία θα εξηγήσουμε αναλυτικότερα αργότερα.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να αξιολογήσετε αν μπορείτε να διακρίνετε αν μια έκφραση είναι πρόταση ή όχι.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.1

Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι προτάσεις και ποιες όχι:

1. $2 + 5 = 17$
2. Για κάποιον ακέραιο κ ισχύει ότι $7647376 = \kappa \times 14$
3. Κόψε ένα τσαμπί σταφύλι
4. Το πηλίκο δύο ακεραίων
5. Θα μπορούσατε να μας δώσετε λίγα μήλα;
6. Ήταν ώριμα τα σταφύλια.
7. Κάθε περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 4 είναι το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.

Πάντως, μπορούμε να κατασκευάσουμε προτάσεις συνδυάζοντας απλούστερες προτάσεις.

Ορισμός 1.2: Προτάσεις που προκύπτουν από το συνδυασμό απλούστερων προτάσεων καλούνται **σύνθετες προτάσεις**. Προτάσεις που δεν είναι σύνθετες καλούνται **απλές**.

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής: Πώς μπορούμε να συνδυάσουμε προτάσεις και να αποφανθούμε για την τιμή αληθείας των σύνθετων προτάσεων που προκύπτουν;

Ο συνδυασμός προτάσεων γίνεται με τη χρήση **λογικών συνδετικών,** που αντιστοιχούν σε συνδέσμους και προσδιορισμούς που χρησιμοποιούμε στο φυσικό λόγο, όπως «και», «ή», «δεν». Παρακάτω θα αναφερθούμε συγκεκριμένα στο καθένα από αυτά και θα καθορίσουμε την τιμή αληθείας των προτάσεων που προκύπτουν χρησιμοποιώντας **πίνακες αληθείας**.

Ορισμός 1.3: Ο **πίνακας αληθείας** σύνθετης πρότασης π, που προκύπτει από συνδυασμό προτάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, παραθέτει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αληθείας των προτάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, και για κάθε τέτοιο συνδυασμό, την τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης π.

Παρακάτω, για κάθε λογικό συνδετικό αναφέρεται ο ορισμός του, ο πίνακας αληθείας του για τον προσδιορισμό της τιμής αληθείας της σύνθετης πρότασης που προκύπτει και παραδείγματα χρήσης του.

Ορισμός 1.4: Η **σύζευξη προτάσεων** π και ρ συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi \wedge \rho}$ και διαβάζεται «π και ρ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $\pi \wedge \rho$ καθορίζεται από τον πίνακα αληθείας 1.1:

Πίνακας 1.1

Πίνακας αληθείας της σύζευξης δύο προτάσεων

π	ρ	$\pi \wedge \rho$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αληθείας, η σύνθετη πρόταση $\pi \wedge \rho$ είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις π και ρ είναι αληθείς.

Παράδειγμα 1.1

$2 + 7 = 10$ (π)

Η Σάμος είναι πανέμορφο νησί (ρ),

Η πρόταση π είναι ψευδής, η ρ αληθής, και επομένως η σύζευξή τους $\pi \wedge \rho$ «$2 + 7 = 10$ και η Σάμος είναι πανέμορφο νησί» είναι πρόταση ψευδής.

Παράδειγμα 1.2

Το «Χαμόγελο της Τζοκόντας» είναι έργο του Μ. Χατζιδάκι (π)

Το «Χαμόγελο της Τζοκόντας» είναι έργο του Λεονάρντο Ντα Βίντσι (ρ),

Η πρόταση π είναι αληθής, εφόσον αναφέρεται στο μουσικό έργο του συνθέτη που εκδόθηκε το 1965, η ρ είναι αληθής, εφόσον αναφέρεται στο γνωστό πίνακα του διάσημου ζωγράφου, και επομένως η σύζευξή τους $\pi \wedge \rho$ είναι πρόταση αληθής.

Ορισμός 1.5: Η **διάζευξη προτάσεων** π και ρ συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi \vee \rho}$, και διαβάζεται «$\pi$ ή ρ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $\pi \vee \rho$ καθορίζεται από τον πίνακα αληθείας 1.2:

Πίνακας 1.2

Πίνακας αληθείας της διάζευξης δύο προτάσεων

π	ρ	$\pi \vee \rho$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αληθείας, η σύνθετη πρόταση $\pi \vee \rho$ είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις π και ρ είναι ψευδείς.

Παράδειγμα 1.3

$2 + 7 = 10$ (π)

Η Μυτιλήνη είναι άγονο νησί (ρ),

Η πρόταση π είναι ψευδής, η ρ ψευδής και επομένως, η διάζευξή τους $\pi \vee \rho$ «2 + 7 = 10 ή η Μυτιλήνη είναι άγονο νησί» είναι πρόταση ψευδής.

Παράδειγμα 1.4

$6 < 10$ (π)

«Μια πρόταση προκύπτει πάντοτε από σύνθεση άλλων προτάσεων» (ρ),

Η πρόταση π είναι αληθής, ενώ η ρ είναι ψευδής. Επομένως, η διάζευξή τους $\pi \vee \rho$ είναι πρόταση αληθής.

Ορισμός 1.6: Η **άρνηση πρότασης** π συμβολίζεται $\rceil\boldsymbol{\rho}$, και διαβάζεται «δεν ισχύει ότι «ρ» ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $\rceil\boldsymbol{\rho}$ καθορίζεται από τον πίνακα 1.3:

Πίνακας 1.3
Πίνακας αληθείας της άρνησης πρότασης

ρ	$\rceil\boldsymbol{\rho}$
T	F
F	T

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αληθείας, η σύνθετη πρόταση $\rceil\rho$ είναι ψευδής (αντίστοιχα αληθής) μόνο στην περίπτωση που η ρ είναι αληθής (αντίστοιχα ψευδής).

Παράδειγμα 1.5

Ο Κώστας Κεντέρης είναι Ολυμπιονίκης των 200μ (π)

Η πρόταση π είναι αληθής, και επομένως η άρνησή της $\rceil\pi$

«Δεν ισχύει ότι ο «Κώστας Κεντέρης είναι Ολυμπιονίκης των 200μ» » (ρ)

είναι πρόταση ψευδής.

Παράδειγμα 1.6

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης (ρ) είναι αληθής, εφόσον (ρ) είναι ψευδής. Αυτό γενικεύεται ως εξής: Η τιμή αληθείας της πρότασης $\rceil(\rceil\pi)$ είναι η τιμή αληθείας της πρότασης π.

Ορισμός 1.7: Η **υποθετική πρόταση** συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi \rightarrow \rho}$, και διαβάζεται «Αν π, τότε ρ». Η πρόταση π καλείται υπόθεση (ή υποτιθέμενο) και η πρόταση ρ καλείται συμπέρασμα (ή συνεπαγόμενο).

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $\pi \rightarrow \rho$ καθορίζεται από τον πίνακα 1.4:

Πίνακας 1.4

Πίνακας αληθείας υποθετικής πρότασης

π	ρ	$\pi \rightarrow \rho$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αληθείας, η σύνθετη πρόταση $\pi \rightarrow \rho$ είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές. Ίσως αυτό να φαίνεται λίγο περίεργο και, όπως είπαμε προηγουμένως, να δημιουργεί μια απορία.

Διαισθητικά μπορούμε να το δούμε ως εξής: Αν η υπόθεση (π) είναι ψευδής, τότε η αλήθεια της σύνθετης πρότασης δεν πρέπει να εξαρτάται από την τιμή αληθείας του συμπεράσματος. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της υποθετικής πρότασης «*Αν* είναι έξυπνη, τότε την παντρεύομαι», η αλήθεια της υποθετικής πρότασης, όταν η υπόθεση «είναι έξυπνη» είναι αληθής, εξαρτάται από την τιμή αληθείας του συμπεράσματος. Έτσι, αν το συμπέρασμα ισχύει, η υποθετική έκφραση θεωρείται αληθής. Στην αντίθετη περίπτωση θεωρείται ψευδής. Στην περίπτωση όμως που η υπόθεση αποδειχθεί τελικά ψευδής, η αλήθεια της υποθετικής έκφρασης (σαν δήλωση) δεν πρέπει να αμφισβητηθεί σε καμία περίπτωση (δηλαδή για καμία τιμή αληθείας του συμπεράσματος). Άρα, αν η υπόθεση είναι ψευδής, η σύνθετη πρόταση θεωρείται αληθής, ανεξάρτητα από την τιμή του συμπεράσματος.

Παράδειγμα 1.7

Η Μαρία είναι μελετηρή (π)

Η Μαρία είναι καλή μαθήτρια (ρ),

Αν πρόταση π είναι ψευδής και η ρ αληθής (ή ψευδής), η πρόταση $\pi \rightarrow \rho$ «Αν η Μαρία είναι μελετηρή, τότε η Μαρία είναι καλή μαθήτρια» είναι πρόταση αληθής.

Παράδειγμα 1.8

$6 < 10$ (π)

«Η Μαρία είναι καλή μαθήτρια» (ρ),

Η πρόταση π είναι αληθής, και έστω ότι η ρ είναι αληθής. Επομένως, η υποθετική πρόταση $\pi \rightarrow \rho$ είναι πρόταση αληθής.

Παράδειγμα 1.9

$6 < 10$ (π)

«$12 > 20$» (ρ),

Η πρόταση π είναι αληθής, και η ρ είναι ψευδής. Επομένως, η υποθετική πρόταση $\pi \rightarrow \rho$ είναι πρόταση ψευδής.

Παράδειγμα 1.10

Θεωρήστε τις εξής δηλώσεις του Γιώργου:

Η Μαρία είναι έξυπνη (π)

Αν η Μαρία είναι έξυπνη, τότε την αγαπώ (ρ)

Θεωρώντας ότι οι δύο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας, δείξτε ότι η Μαρία είναι έξυπνη.

Ίσως το συμπέρασμα να φαίνεται περίεργο και το παράδειγμα δύσκολο. Θα πρέπει να έχετε κατανοήσει πλήρως τη φύση της υποθετικής πρότασης και να είσαστε ιδιαίτερα συστηματικοί και προσεκτικοί. Ας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς, τότε … πράγματι η Μαρία είναι έξυπνη και ο Γιώργος την αγαπά.
2. Αν και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς, αυτό σημαίνει ότι η σύνθετη πρόταση (ρ), που είναι η πρόταση ($\pi \rightarrow \sigma$), είναι ψευδής. Επίσης, η πρόταση (π) είναι ψευδής. Από τον ορισμό της υποθετικής πρότασης, αυτό δεν μπορεί να ισχύει σε καμία περίπτωση, και επομένως η πρόταση (π) δεν μπορεί να είναι ψευδής, όταν η πρόταση (ρ) είναι ψευδής.

Σύμφωνα λοιπόν με τις περιπτώσεις (1) και (2) παραπάνω, η μόνη περίπτωση που οι δύο προτάσεις (π) και (σ) έχουν την ίδια τιμή αληθείας είναι η περίπτωση όπου είναι και οι δύο αληθείς. Άρα .. η Μαρία είναι έξυπνη.

Παράδειγμα 1.11

Αν η πρόταση π είναι αληθής, η ρ είναι ψευδής και η τ είναι αληθής, να βρεθεί η τιμή αληθείας των ακόλουθων προτάσεων:

1. $(\pi \wedge \rho) \rightarrow \tau$

2. $(\pi \vee \rho) \rightarrow \rceil \tau$

3. $\pi \wedge (\rho \rightarrow \tau)$

4. $\pi \rightarrow (\rho \rightarrow \tau)$

Για την εύρεση της τιμής αληθείας κάθε σύνθετης πρότασης, αντικαθιστάμε κάθε σύμβολο πρότασης με την τιμή αληθείας της:

1. $(T \wedge F) \rightarrow T \quad = \quad F \rightarrow T \quad = \quad T$

2. $(T \vee F) \rightarrow \rceil T \quad = \quad T \rightarrow \rceil T \quad = \quad T \rightarrow F \quad = \quad F$

3. $T \wedge (F \rightarrow T) \quad = \quad T \wedge T \quad = \quad T$

4. $T \rightarrow (F \rightarrow T) \quad = \quad T \rightarrow T \quad = \quad T$

Αν δεν γνωρίζουμε τις τιμές αληθείας των π, ρ και τ, για να αποτιμήσουμε την τιμή αληθείας μιας σύνθετης πρότασης, για παράδειγμα της (1) παραπάνω, θα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα 1.5:

Πίνακας 1.5

Πίνακας αληθείας της υποθετικής πρότασης $(\pi \wedge \rho) \rightarrow \tau$

π	ρ	τ	$(\pi \wedge \rho) \rightarrow \tau$		
T	T	T	$(T \wedge T) \rightarrow T$	$T \rightarrow T$	T
T	T	F	$(T \wedge T) \rightarrow F$	$T \rightarrow F$	F
T	F	T	$(T \wedge F) \rightarrow T$	$F \rightarrow T$	T
T	F	F	$(T \wedge F) \rightarrow F$	$F \rightarrow F$	T
F	T	T	$(F \wedge T) \rightarrow T$	$F \rightarrow T$	T
F	T	F	$(F \wedge T) \rightarrow F$	$F \rightarrow T$	T
F	F	T	$(F \wedge F) \rightarrow T$	$F \rightarrow T$	T
F	F	F	$(F \wedge F) \rightarrow F$	$F \rightarrow T$	T

Παράδειγμα 1.12

Θεωρήστε την **ανεστραμμένη** πρόταση $\rho \to \pi$ της υποθετικής πρότασης $\pi \to \rho$. Δεδομένου ότι η $(\pi \to \rho)$ είναι αληθής, μπορεί η $(\rho \to \pi)$ να είναι ψευδής;

Αν

$$6 > 10\ (\pi)$$

$$12 < 20\ (\rho),$$

τότε η $(\pi \to \rho)$ είναι αληθής, ενώ η $(\rho \to \pi)$ είναι ψευδής.

Δημιουργούμε τον πίνακα αληθείας της $\rho \to \pi$ και της $\pi \to \rho$, όπως φαίνεται στον πίνακα 1.6:

Πίνακας 1.6
Πίνακας αληθείας ανεστραμμένης υποθετικής πρότασης

π	ρ	$\pi \to \rho$	$\rho \to \pi$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Παρατηρούμε ότι με την αναστροφή μιας υποθετικής πρότασης «αντιστρέφεται» και η τιμή αληθείας της σε δύο περιπτώσεις.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να ασκηθείτε στη διατύπωση προτάσεων με συμβολικό τρόπο, με τη χρήση λογικών συνδετικών, και αντιστρόφως.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.2

Έστω ότι οι προτάσεις

Η ύλη είναι ενδιαφέρουσα (π)

Οι ασκήσεις είναι δύσκολες (ρ)

Το μάθημα είναι ευχάριστο (τ)

Να γραφούν οι παρακάτω προτάσεις σε συμβολική μορφή

(α) Η ύλη είναι ενδιαφέρουσα και οι ασκήσεις είναι δύσκολες (β) Η ύλη δεν είναι ενδιαφέρουσα, οι ασκήσεις δεν είναι δύσκολες και το μάθημα δεν είναι ευχάριστο.

(γ) Αν η ύλη δεν είναι ενδιαφέρουσα και οι ασκήσεις δεν είναι δύσκολες, τότε το μάθημα δεν είναι ευχάριστο.

(δ) Το ότι η ύλη είναι ενδιαφέρουσα σημαίνει ότι οι ασκήσεις είναι δύσκολες και αντιστρόφως.

(ε) Είτε το μάθημα είναι ευχάριστο, είτε οι ασκήσεις είναι δύσκολες, αλλά όχι και τα δύο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.3

Να διατυπωθούν οι παρακάτω προτάσεις ως υποθετικές:

(α) Αναγκαία συνθήκη για ασφαλή οδήγηση είναι να φοράς τη ζώνη ασφαλείας.

(β) Ικανή συνθήκη για να ανθίσει η τριανταφυλλιά είναι να έχεις ρίξει λίπασμα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.4

Να γίνει αντιστοίχηση των παρακάτω προτάσεων φυσικού λόγου και των συμβολικών μορφών τους. Αν δεν τα καταφέρετε για όλο τον πίνακα, κάτι που είναι αρκετά δύσκολο και χρονοβόρο, δείτε την αντιστοίχηση των τριών πρώτων απλών προτάσεων στις απαντήσεις και προσπαθήστε να βρείτε τις αντιστοιχίες των σύνθετων προτάσεων:

π	Σήμερα είναι Δευτέρα
ρ	Είναι ζέστη
τ	Βρέχει
Κάθε Δευτέρα βρέχει	$\rceil \rho \rightarrow (\tau \wedge \pi)$
Έχω παρατηρήσει ότι αν δεν βρέχει τότε ή είναι ζέστη ή είναι Δευτέρα.	$\pi \rightarrow \rho$
Ικανή συνθήκη για να βρέχει ή να είναι ζέστη είναι να μην είναι Δευτέρα.	$\rceil(\rho \vee \pi) \rightarrow \tau$

Αναγκαία συνθήκη για να μην είναι Δευτέρα ή να μη βρέχει είναι να είναι ζέστη.	$\rceil \pi \rightarrow (\rho \vee \tau)$
Όταν τη Δευτέρα βρέχει ή είναι ζέστη, τότε είναι είτε ζέστη είτε είναι Δευτέρα ή βρέχει.	$(\pi \vee (\rceil \pi \wedge \rceil (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\pi \vee \rceil (\rho \vee \tau))$
Για να είναι Δευτέρα ή να ισχύει ότι δεν είναι ζέστη ή βρέχει, πρέπει ή να είναι Δευτέρα ή σε περίπτωση που δεν είναι Δευτέρα να μην είναι ζέστη ή βρέχει	$(\pi \wedge (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\tau \vee (\pi \vee \rho))$

Ορισμός 1.8: Μία πρόταση που είναι πάντοτε αληθής καλείται **ταυτολογία**, ενώ μια πρόταση που είναι πάντοτε ψευδής καλείται **αντίφαση**.

Παράδειγμα ταυτολογίας είναι η T →T, ενώ παράδειγμα αντίφασης είναι η T→F.

Ορισμός 1.9: Η σύνθετη πρόταση **«*π* εάν και μόνο εάν *ρ*»** ή **«*π* ανν *ρ*»** συμβολίζεται $\pi \leftrightarrow \rho$, και διαβάζεται «*π* αν και μόνο αν *ρ*».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης $\pi \leftrightarrow \rho$ καθορίζεται από τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

Πίνακας 1.7:
Πίνακας αληθείας πρότασης «ανν»

π	ρ	$\pi \leftrightarrow \rho$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Για την πρόταση $\pi \leftrightarrow \rho$, η πρόταση π θεωρείται ότι διατυπώνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την πρόταση ρ.

Παράδειγμα 1.13

$$1 < 5 \ (\pi)$$

$$2 < 6 \ (\rho),$$

Η πρόταση $\pi \leftrightarrow \rho$ είναι αληθής, δεδομένου ότι και οι δύο προτάσεις π και ρ είναι αληθείς. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να πούμε ότι η πρόταση «$1 < 5$» είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την $2 < 6$. Είναι λίγο περίεργο και όμως αληθές.

Ορισμός 1.10: Δύο προτάσεις π και ρ καλούνται **ισοδύναμες**, συμβολίζεται $\pi \equiv \rho$, αν:

1. Είναι απλές και η τιμή αληθείας της π είναι πάντοτε ίση με την τιμή αληθείας της ρ και αντιστρόφως.
2. Είναι σύνθετες, αποτελούνται από τις προτάσεις $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, και δεδομένων των τιμών αληθείας των $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, οι π και ρ έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

Για παράδειγμα, οι προτάσεις «ο αριθμός κ είναι περιττός» και «ο αριθμός κ δεν διαιρείται με το 2» είναι ισοδύναμες.

Αντίθετα, για την ισοδυναμία των προτάσεων «σήμερα βρέχει» και «αύριο έχει συννεφιά» δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Για να δείξουμε ότι δύο σύνθετες προτάσεις είναι ισοδύναμες, ένας απλός τρόπος (αλλά χρονοβόρος και δύσκολος αν οι επιμέρους προτάσεις είναι πάρα πολλές) είναι να δημιουργήσουμε τους πίνακες αληθείας τους και να αποδείξουμε τον ορισμό.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να κατανοήσετε τον τρόπο εκτίμησης της τιμής αληθείας μιας σύνθετης πρότασης, δεδομένων των τιμών αληθείας των επιμέρους προτάσεων από τις οποίες συντίθεται.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.5

Αν οι προτάσεις π, ρ, τ είναι κατ’ αντιστοιχία αληθής, αληθής, ψευδής, να εκτιμηθεί η τιμή αληθείας της πρότασης:

$$(\pi \wedge (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\tau \vee (\urcorner\, \pi \vee \rho))$$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.6

Αν οι προτάσεις π, ρ, τ είναι κατ' αντιστοιχία αληθής, ψευδής, ψευδής, να εκτιμηθεί η τιμή αληθείας της πρότασης:

$$(\pi \vee \rho) \rightarrow \tau$$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.7

Να φτιάξετε τον πίνακα αληθείας της πρότασης:

$$(\rceil\, \pi \wedge \rho) \vee (\tau \vee \rceil\, \pi)$$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.8

Νόμοι του De Morgan: Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

$$(\alpha)\ \rceil\,(\pi \vee \rho) \equiv (\rceil\, \pi) \wedge (\rceil\, \rho)$$

$$(\beta)\ \rceil\,(\pi \wedge \rho) \equiv (\rceil\, \pi) \vee (\rceil\, \rho)$$

Δραστηριότητα 1.1

Να κατασκευαστούν οι πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις:

(α) $\rceil\,(\pi \vee \rho) \leftrightarrow \tau$

(β) $\rceil\,(\pi \vee \rho) \wedge \tau$

(γ) $(\pi \rightarrow \rho) \vee (\pi \rightarrow \tau)$

(δ) $(\pi \vee \rceil\, \rho) \rightarrow \rceil \pi$

(ε) $((\rho \rightarrow \pi) \rightarrow \tau) \rightarrow ((\rho \rightarrow \pi) \rightarrow (\pi \rightarrow \tau))$

(στ) $\rceil \pi \vee \rho$

(ζ) $(\rceil\, \pi \wedge \rceil\, \rho) \vee (\rceil\, \tau)$

(η) $(\pi \vee \rho) \rightarrow \rceil\, \tau$

Υπόδειξη:

Μπορείτε να εργαστείτε με δύο τρόπους:

Α. Όπως στο παράδειγμα 1.11, και στην περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την τιμή αληθείας των επιμέρους προτάσεων της σύνθετης πρότασης (βλέπε πίνακα 1.5).

Β. Αποτιμούμε την τιμή αληθείας των απλούστερων προτάσεων με βάση τις δυνατές τιμές των απλών προτάσεων, και δεδομένων αυτών αποτιμούμε την τιμή αληθείας των σύνθετων προτάσεων (α) – (η). Τέτοιο παράδειγμα εργασίας δίνεται από την άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.7.

Δραστηριότητα 1.2

Έστω ότι θέλετε να περιγράψετε διάφορα βιβλία και έστω οι προτάσεις:

Είναι ογκώδες (π)

Είναι καλογραμμένο (ρ)

Είναι φτωχό σε ύλη (σ)

Ο συγγραφέας είναι διάσημος (τ)

Να διατυπωθούν σε συμβολική μορφή οι ακόλουθες προτάσεις:

(α) Είναι ογκώδες, αλλά φτωχό σε ύλη

(β) Αναγκαία συνθήκη για να είναι καλογραμμένο είναι να είναι ο συγγραφέας διάσημος

(γ) Είτε είναι φτωχό σε ύλη είτε είναι ογκώδες, αλλά ποτέ και τα δύο

(δ) Αν είναι ογκώδες και καλογραμμένο, ο συγγραφέας είναι διάσημος.

(ε) Αν είναι ογκώδες και φτωχό σε ύλη, τότε είτε δεν είναι καλογραμμένο είτε ο συγγραφέας δεν είναι διάσημος.

Υπόδειξη:

Εργαστείτε όπως και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.2. Στην περίπτωση χρήσης αναγκαίων ή/και ικανών συνθηκών συμβουλευτείτε την άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.3.

Δραστηριότητα 1.3

Ο Νίκος, ο Τάσος και ο Γιώργος έχουν παιδιά. Ο Νίκος δεν παίρνει το επίδομα X που παίρνει ο Τάσος και ο Γιώργος, ενώ ο Γιώργος δεν παίρνει το επίδομα Y που παίρνει ο Νίκος και ο Τάσος. Είναι γνωστό ότι αυτοί που παίρνουν το επίδομα X και δεν παίρνουν το επίδομα Y έχουν δύο παιδιά και προσλήφθηκαν πριν το 1990, ενώ αυτοί που παίρνουν το επίδομα Y και δεν παίρνουν το επίδομα X έχουν τρία ή περισσότερα παιδιά και προσλήφθηκαν μετά το 1994. Παρουσιάστε τις παραπάνω προτάσεις σε συμβολική μορφή και επίσης βρείτε πόσα παιδιά έχει ο Νίκος, ο Τάσος και ο Γιώργος και πότε προσελήφθησαν.

Υπόδειξη:

Σχηματίστε όλες τις υποθετικές προτάσεις «Είναι γνωστό ότι ο A που παίρνει το επίδομα X και δεν παίρνει το επίδομα Y έχει δύο παιδιά και προσλήφθηκε πριν το 1990», για όλα τα πρόσωπα A που αναφέρονται στην άσκηση. Κάντε το ίδιο για τις προτάσεις «Είναι γνωστό ότι ο A που παίρνει το επίδομα Y και δεν παίρνει το επίδομα X έχει τρία ή περισσότερα παιδιά και προσλήφθηκε μετά το 1994».

Με βάση τις δεδομένες τιμές αληθείας των προτάσεων, εκτιμήστε τις τιμές αληθείας των προτάσεων που ζητούνται για κάθε πρόσωπο.

1.1.2 Ποσοδείκτες

Οι παραπάνω προτάσεις δεν μπορούν να εκφράσουν με ακρίβεια όλες τις εκφράσεις που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά και στην επιστήμη των υπολογιστών.

Ας δούμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

Ο X είναι ακέραιος (π)

$X^2 + 2X$ είναι άρτιος ακέραιος (ρ)

Ο παίκτης X σκόραρε 23 πόντους (τ)

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρότασης που έχουμε διατυπώσει, οι παραπάνω εκφράσεις δεν είναι προτάσεις, εφόσον δεν μπορούν να έχουν τιμή αληθείας. Οι τιμές αληθείας των προτάσεων αυτών εξαρτώνται από την τιμή της εκάστοτε μεταβλητής. Για παράδειγμα, η πρόταση (π) είναι αληθής αν $X = 5$ και ψευδής στην περίπτωση που το $X = 2.4$.

Εκφράσεις με χρήση μεταβλητών είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στα μαθηματικά και την επιστήμη των υπολογιστών.

Ορισμός 1.11: Έστω $\Pi(X)$ έκφραση σχετικά με μια μεταβλητή X και Δ ένα σύνολο. Η έκφραση $\Pi(X)$ καλείται **προτασιακή συνάρτηση** στο Δ, αν για κάθε X στο Δ, η $\Pi(X)$ είναι πρόταση. Το Δ καλείται **πεδίο αναφοράς (domain of discourse)**.

Έστω η έκφραση (π) παραπάνω και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$. Η π είναι προτασιακή συνάρτηση στο $\Re$, εφόσον για κάθε X στο $\Re$ η (π) είναι πρόταση.

Με παρόμοιο τρόπο, η έκφραση τ είναι προτασιακή συνάρτηση στο σύνολο των παικτών μπάσκετ Δ, εφόσον για κάθε παίκτη στο Δ η (τ) είναι πρόταση.

Η μεταβλητή X μιας προτασιακής συνάρτησης $\Pi(X)$ καλείται **ελεύθερη μεταβλητή** (ελεύθερη να «κινείται» στο πεδίο αναφοράς Δ). Τις περισσότερες φορές, τις μεταβλητές αυτές τις προσδιορίζουμε με ένα *ποσοδείκτη* λέγοντας ότι η $\Pi(X)$ ισχύει *για κάθε* X στο Δ ή *για κάποιο* X στο Δ.

Η παρακάτω άσκηση σας βοηθά να αξιολογήσετε αν έχετε κατανοήσει τις έννοιες «προτασιακή συνάρτηση» και «πεδίο αναφοράς (domain of discourse)».

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.9

Για κάθε έκφραση που είναι προτασιακή συνάρτηση βρείτε το πεδίο αναφοράς:

(α) $(2x + 1)^2$ είναι άρτιος ακέραιος.

(β) Να επιλεγεί ένας ακέραιος από το 1 στο 10

(γ) Έστω x ακέραιος, με $x = 1/x + 16$.

(δ) Η Αθήνα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας

(ε) Η πρωτεύουσα της Ελλάδας

Ορισμός 1.12: Έστω π προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ.

Η (π) καλείται **καθολικά προσδιορισμένη** έκφραση αν είναι της μορφής

$$\forall X, \Pi(X) \quad (\pi)$$

και διαβάζεται «για κάθε X, $\Pi(X)$».Το σύμβολο $\forall$ καλείται **καθολικός ποσοδείκτης**

Η έκφραση $\forall X, \Pi(X)$ είναι αληθής, αν η πρόταση $\Pi(X)$ είναι αληθής για κάθε X στο Δ. Αντιθέτως, η έκφραση $\forall X, \Pi(X)$ είναι ψευδής, αν υπάρχει έστω και ένα X στο Δ, τέτοιο ώστε η πρόταση $\Pi(X)$ είναι ψευδής. Ένα στοιχείο του Δ για το οποίο ο $\Pi(X)$ γίνεται ψευδής, καλείται **αντιπαράδειγμα**.

Παράδειγμα 1.14

Λέμε ότι:

Για κάθε τρίγωνο ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180^{o},

και ότι:

Υπάρχει φοιτητής που αποκτά τις προϋποθέσεις απόκτησης πτυχίου σε λιγότερο από 4 έτη.

Παράδειγμα 1.15

Η καθολικά προσδιορισμένη έκφραση

$$\forall X, \text{ Αν } X > 1, \text{ τότε } X + 1 > 1$$

είναι αληθής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στην περίπτωση αυτή $\Pi(X)$ είναι η υποθετική πρόταση (Αν $X > 1$, τότε $X + 1 > 1$), η οποία ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό X. Για να δείξετε κάτι τέτοιο θα πρέπει να διακρίνετε τις εξής περιπτώσεις:

(α) Αν $X \leq 1$ τότε η $\Pi(X)$ είναι αληθής, εφόσον η υπόθεση της ($X > 1$) δεν είναι αληθής.

(β) Αν $X > 1$, τότε προφανώς $X + 1 > 1$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε πραγματικό αριθμό X η πρόταση (Αν $X > 1$, τότε $X + 1 > 1$) είναι αληθής. Επομένως η καθολικά προσδιορισμένη έκφραση

$$\forall X, \text{ Αν } X > 1, \text{ τότε } X + 1 > 1$$

είναι αληθής.

Παράδειγμα 1.16

Η καθολικά προσδιορισμένη έκφραση

$$\forall X, \text{ Ο } X \text{ δεν είναι εργαζόμενος}$$

είναι ψευδής στο σύνολο των φοιτητών. Για την απόδειξη αυτού, αρκεί να βρεθεί ένας φοιτητής Φ για τον οποίο η πρόταση (Ο Φ δεν είναι εργαζόμενος) είναι ψευδής. Σε αυτή την περίπτωση ο Φ είναι ένα αντιπαράδειγμα για την παραπάνω καθολικά προσδιορισμένη έκφραση.

Ορισμός 1.13: Έστω π προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ.

Η (π) καλείται **υπαρξιακά προσδιορισμένη** έκφραση αν είναι της μορφής

$$\exists X,\ \Pi(X)\ (\pi)$$

και διαβάζεται «υπάρχει X, $\Pi(X)$» ή «για κάποιο X, $\Pi(X)$». Το σύμβολο $\exists$ καλείται **υπαρξιακός ποσοδείκτης**

Η έκφραση $\exists X, \Pi(X)$ είναι αληθής, αν η πρόταση $\Pi(X)$ είναι αληθής για κάποιο X στο Δ. Αντιθέτως, η έκφραση $\exists X, \Pi(X)$ είναι ψευδής, αν για κάθε X στο Δ, η πρόταση $\Pi(X)$ είναι ψευδής.

Παράδειγμα 1.17

Η υπαρξιακά προσδιορισμένη έκφραση

$$\exists X,\ \text{Αν } X > 1 \text{ τότε } X + 1 > 1$$

είναι αληθής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να δειχθεί ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός (τουλάχιστον) για τον οποίο η υποθετική πρόταση $\Pi(X) = (\text{Αν } X > 1, \text{ τότε } X + 1 > 1)$ είναι αληθής. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $X = 0$, για τον οποίο η υποθετική πρόταση γίνεται αληθής. Αυτό συμβαίνει διότι η υπόθεση $(X > 1)$ για $X = 0$ είναι ψευδής.

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός X για τον οποίο η πρόταση (Αν $X > 1$, τότε $X + 1 > 1$) είναι αληθής. Επομένως, η υπαρξιακά προσδιορισμένη έκφραση

$$\exists X,\ \text{Αν } X > 1, \text{ τότε } X + 1 > 1$$

είναι αληθής.

Παράδειγμα 1.18

Η υπαρξιακά προσδιορισμένη έκφραση

$\exists X$, Ο X είναι εργαζόμενος

είναι αληθής στο σύνολο των φοιτητών. Για την απόδειξη αυτού, αρκεί να βρεθεί ένας τουλάχιστον φοιτητής Φ για τον οποίο η πρόταση (Ο Φ είναι εργαζόμενος) είναι αληθής. Όλοι μας γνωρίζουμε κάποιον.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να αποκτήσετε την ευχέρεια διατύπωσης προτάσεων με συμβολικό τρόπο, με τη χρήση ποσοδεικτών, και αντιστρόφως.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.10

Έστω η προτασιακή συνάρτηση $\Pi(x, y)$ = «ο x είναι διευθυντής του y» με πεδίο αναφοράς το σύνολο των εργαζόμενων σε έναν οργανισμό. Να διατυπωθούν οι παρακάτω εκφράσεις στο φυσικό λόγο:

(α) $\forall \mathrm{X}\, \exists Y\, \Pi(X, Y)$,

(β) $\forall Y\, \exists X\, \Pi(X, Y)$,

(γ) $\exists X\, \forall Y\, \Pi(X, Y)$,

(δ) $\forall X\, \forall Y\, \Pi(X, Y)$,

(ε) $\exists Y\, \exists X\, \Pi(X, Y)$,

(στ) $\exists (Y, X)\, \Pi(X, Y)$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.11

Να διατυπωθεί με συμβολικό τρόπο η έκφραση:

«Ό,τι λάμπει δεν είναι χρυσός»

Για να παρασταθεί η παραπάνω πρόταση με συμβολικό τρόπο, θα πρέπει να σκεφτείτε καταρχήν τι ακριβώς εννοούσε ο Shakespeare με την έκφραση αυτή.

1.1.3 Γενικευμένοι κανόνες De Morgan

Παρατηρήστε ότι για την προτασιακή συνάρτηση που αναφέρθηκε στα παραπάνω παραδείγματα :

$$\Pi(X) = \text{Ο } X \text{ είναι εργαζόμενος}$$

και για τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\exists X, \text{ Ο } X \text{ είναι εργαζόμενος } (\pi)$$

$$\forall X, \text{ Ο } X \text{ δεν είναι εργαζόμενος } (\rho)$$

Ισχύουν τα εξής:

(α) $\pi = \exists X, \Pi(X)$,

(β) $\rho = \forall X, \urcorner\, \Pi(X)$, και

(γ) $\pi \leftrightarrow (\urcorner \rho)$.

Τα παραπάνω μπορούμε να τα δούμε ως εξής:

Για να δείξουμε ότι η π είναι αληθής, θα πρέπει να βρεθεί ένα X στο πεδίο αναφοράς, τέτοιο ώστε η $\Pi(X)$ να είναι αληθής. Τότε όμως, για το συγκεκριμένο X, η ($\rceil$ $\Pi(X)$) είναι ψευδής, άρα η ρ αποδεικνύεται ψευδής πρόταση. Συνεπώς, η ($\rceil\rho$), για κάθε X που κάνει την π αληθή, είναι επίσης αληθής.

Αν η π είναι ψευδής, τότε για κάθε X στο πεδίο αναφοράς, η ($\Pi(X)$) είναι ψευδής, δηλαδή η ($\rceil$ $\Pi(X)$) είναι αληθής. Δηλαδή, η ρ είναι αληθής. Συνεπώς, η ($\rceil$ ρ), για κάθε X που κάνει την (π) ψευδή, είναι ψευδής.

Από τα παραπάνω, μπορούμε να συνάγουμε ότι οι π και ($\rceil\rho$) είναι είτε και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς. Επομένως, $\pi \leftrightarrow (\rceil\rho)$.

Τα παραπάνω γενικεύονται από τους γενικευμένους νόμους του De Morgan, τους οποίους θα αποδείξουμε παρακάτω.

Θεώρημα 1.1 Γενικευμένοι νόμοι του De Morgan. Έστω $\Pi(X)$ προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ. Κάθε ζεύγος προτάσεων που αναφέρονται στα (α) και (β) παρακάτω είναι λογικά ισοδύναμες:

(α) $\rceil\,(\forall X, \Pi(X))$ (π),

$\exists X, \rceil\,(\Pi(X))$ (ρ)

(β) $\rceil\,(\exists X, \Pi(X))$ (π)

$\forall X, \rceil\,(\Pi(X))$ (ρ)

Απόδειξη.

Παρακάτω θα αποδείξω την (α), ενώ τη (β) την αφήνω ως δραστηριότητα σε εσάς. Αν καταλάβετε την παρακάτω απόδειξη, η απόδειξη της (β) είναι ανάλογη.

Για να είναι η π αληθής θα πρέπει να βρεθεί X στο Δ, τέτοιο ώστε η πρόταση ($\forall X$, $\Pi(X)$) να είναι ψευδής. Από τον ορισμό του καθολικού ποσοδείκτη, θα πρέπει να βρεθεί α στο Δ, τέτοιο ώστε η $\Pi(\alpha)$ να είναι ψευδής. Τότε όμως, η ($\rceil$ $\Pi(\alpha)$) είναι αληθής, και από τον ορισμό του υπαρξιακού ποσοδείκτη, η πρόταση $\exists X, \rceil\,(\Pi(X))$ είναι αληθής. Συνεπώς, όταν η π είναι αληθής, τότε και η ρ είναι αληθής.

Αντίστοιχα, αν η π είναι ψευδής, τότε η ($\forall X$, $\Pi(X)$) είναι αληθής. Δηλαδή, από τον ορισμό του καθολικού ποσοδείκτη, για κάθε X στο Δ, η $\Pi(X)$ είναι αληθής. Επομένως, δεν υπάρχει X στο Δ, τέτοιο ώστε η $\rceil(\Pi(X))$ να είναι αληθής. Επομένως, από τον ορισμό του υπαρξιακού ποσοδείκτη, η πρόταση $\exists X, \rceil\,(\Pi(X))$ είναι ψευδής.

Συνεπώς, όταν η π είναι ψευδής, τότε και η ρ είναι ψευδής.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι οι προτάσεις π και ρ της περίπτωσης (α) έχουν πάντοτε την ίδια τιμή αληθείας.

Για να κατανοήσετε τον τρόπο που οι παραπάνω νόμοι γενικεύουν τους νόμους De Morgan, όπως αυτοί αναφέρθηκαν στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.14 παραπάνω, θα πρέπει να σκεφτείτε τα εξής:

Μια καθολικά προσδιορισμένη πρόταση ($\forall X$, $\Pi(X)$) στο σύνολο Δ, γενικεύει την πρόταση $\Pi(X_1) \wedge \Pi(X_2) \ldots, \wedge \Pi(X_\nu)$ όπου X_i είναι μέλος του Δ. Η πρόταση αυτή είναι αληθής, αν κάθε $\Pi(X_i)$, X_i στο Δ, είναι αληθής.

Με παρόμοιο τρόπο, μια υπαρξιακά προσδιορισμένη πρόταση ($\exists X$, $\Pi(X)$) στο σύνολο Δ, γενικεύει την πρόταση $\Pi(X_1) \vee \Pi(X_2) \ldots, \vee \Pi(X_\nu)$ όπου X_i είναι μέλος του Δ. Η πρόταση αυτή είναι αληθής, αν υπάρχει τουλάχιστο ένα X_i στο Δ, τέτοιο ώστε η $\Pi(X_i)$ να είναι αληθής.

Με βάση τα παραπάνω, ο γενικευμένος νόμος (α) του De Morgan μπορεί να διατυπωθεί αντικαθιστώντας την πρόταση

$$(\urcorner (\forall X, \Pi(X)))$$

με την πρόταση

$$\urcorner (\Pi(X_1) \wedge \Pi(X_2) \ldots, \wedge \Pi(X_\nu)),$$

και την πρόταση

$$\exists X, \urcorner (\Pi(X))$$

με την πρόταση

$$(\urcorner \Pi(X_1)) \vee (\urcorner \Pi(X_2)) \ldots, \vee (\urcorner \Pi(X_\nu)).$$

Σε αυτή τη μορφή, ο νόμος γενικεύει την ειδική περίπτωση που διατυπώθηκε στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 14/Κεφ.1, όπου αναφέρεται ότι οι προτάσεις $\urcorner (\pi \wedge \rho)$ και $(\urcorner \pi) \vee (\urcorner \rho)$ έχουν πάντοτε την ίδια τιμή αληθείας.

Δραστηριότητα 1.4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$\forall X, \rceil \Pi(X) \vee P(X) \text{ και}$$

$$\forall X, \Pi(X) \rightarrow P(X)$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ισοδυναμίας σύνθετων προτάσεων και δημιουργήστε τους πίνακες αληθείας των δύο εκφράσεων.

Δραστηριότητα 1.5

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$\rceil (\forall X (\Pi(X) \rightarrow P(X))) \text{ και}$$

$$\exists X, \Pi(X) \wedge \rceil P(X)$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Δραστηριότητας 1.4.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ορίζεται η έννοια της πρότασης και καθορίζεται πώς από απλές προτάσεις προκύπτουν οι σύνθετες με τη χρήση των λογικών συνδετικών σύζευξης, διάζευξης, άρνησης, «αν...τότε...» και «ανν». Για τις σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν με τη χρήση των παραπάνω συνδετικών παρουσιάζονται οι πίνακες αληθείας τους, ενώ τα παραδείγματα και οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης σας βοηθούν να κατανοήσετε καλύτερα τον τρόπο εκτίμησης της τιμής αληθείας μιας σύνθετης πρότασης, δεδομένων των τιμών αληθείας των επιμέρους προτάσεων, και τον τρόπο σχηματισμού του πίνακα αληθείας μιας σύνθετης πρότασης. Στην υποενότητα 1.1.2 της ενότητας ορίζεται η έννοια της προτασιακής συνάρτησης και παρουσιάζεται η χρήση των ποσοδεικτών. Οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης της υπο–ενότητας αυτής σας βοηθούν να ασκηθείτε στη διατύπωση προτάσεων με χρήση ποσοδεικτών. Στο τέλος της ενότητας παρουσιάζονται οι γενικευμένοι κανόνες De Morgan, την παρουσίαση των οποίων μπορείτε να δείτε και ως εμβάθυνση σε όσα προηγήθηκαν στην ενότητα.

1.2 Αποδεικτικές διαδικασίες και μαθηματική επαγωγή

Σκοπός

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει γενικευμένες αποδεικτικές διαδικασίες, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική επαγωγή. Η τελευταία χρησιμοποιείται εκτενέστατα στα μαθηματικά και κυρίως στα διακριτά μαθηματικά, καθώς επίσης και στην επιστήμη των υπολογιστών.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Η κατανόηση των εννοιών του κεφαλαίου θα σας επιτρέψει να

- *διαχωρίζετε και να δίνετε παραδείγματα για τις έννοιες «θεώρημα», «αξίωμα», «ορισμός»,*
- *χρησιμοποιείτε αποδεικτικές μεθόδους για την επαλήθευση προτάσεων,*
- *διατυπώνετε και εφαρμόζετε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής .*

Έννοιες κλειδιά

- *αξίωμα, ορισμός*
- *θεώρημα*
- *αποδεικτική διαδικασία*
- *απαγωγή σε άτοπο*
- *μαθηματική επαγωγή.*

Ένα **μαθηματικό σύστημα** αποτελείται από **αξιώματα**, **ορισμούς, μη καθορισμένες έννοιες** και **θεωρήματα**.

Ορισμός 1.14: Ένα **αξίωμα** είναι μια πρόταση που θεωρείται πάντοτε αληθής.

Η Ευκλείδειος γεωμετρία αποτελεί ένα μαθηματικό σύστημα.

Παραδείγματα αξιωμάτων είναι τα εξής:

(α) Από δύο διακεκριμένα σημεία περνάει πάντοτε μια ευθεία.

(β) Ένα επίπεδο καθορίζεται από τρία διακεκριμένα σημεία

Ορισμός 1.15: Ένας **ορισμός** καθορίζει μια νέα έννοια με βάση προηγούμενες έννοιες.

Παραδείγματα ορισμών είναι τα εξής:

(α) Δύο γωνίες καλούνται *συμπληρωματικές* αν το άθροισμά τους είναι 90^o. (Η νέα έννοια είναι αυτή των συμπληρωματικών γωνιών).

(β) *Απόλυτος τιμή* ενός πραγματικού αριθμού x καλείται ο x αν αυτός είναι θετικός ή ο $(-x)$ στην αντίθετη περίπτωση. (Η νέα έννοια είναι αυτή της απόλυτης τιμής).

Μια έννοια μπορεί να μην καθορίζεται από έναν ορισμό (**μη καθορισμένη έννοια**), αλλά με έμμεσο τρόπο μέσω των ιδιοτήτων της που αναφέρονται σε κάποια αξιώματα.

Για παράδειγμα, οι έννοιες του σημείου ή της ευθείας δεν ορίζονται με βάση κάποιον ορισμό.

Ορισμός 1.16: Ένα **θεώρημα** είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται (με βάση ορισμούς, αξιώματα και άλλα θεωρήματα) αληθής.

Ειδικοί τύποι θεωρημάτων είναι τα **λήμματα** και οι **προτάσεις**. Τα λήμματα δεν έχουν μεγάλη σπουδαιότητα από μόνα τους, αλλά χρησιμοποιούνται ως ενδιάμεσα αποτελέσματα για την απόδειξη θεωρημάτων. Οι προτάσεις είναι χρήσιμα συμπεράσματα που απορρέουν από ένα θεώρημα.

Παραδείγματα θεωρημάτων είναι τα εξής:

— Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε και οι γωνίες απέναντι των πλευρών αυτών είναι ίσες.

— Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους. (Είναι πρόταση που απορρέει από το παραπάνω θεώρημα).

— Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να διαχωρίζετε και να δίνετε παραδείγματα για τις έννοιες «θεώρημα», «αξίωμα», «ορισμός».

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.12

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ θεωρήματος και αξιώματος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.13

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ αξιώματος και ορισμού.

Ορισμός 1.17: Μια διαδικασία (ή επιχειρηματολογία) που δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής (επαληθεύει την πρόταση) καλείται **αποδεικτική διαδικασία**.

Η μαθηματική λογική αποτελεί τη βάση για την ανάλυση των αποδεικτικών διαδικασιών.

Τα θεωρήματα έχουν συνήθως την εξής μορφή:

Για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, *εάν* $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ *τότε* $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ (π)

Για την απόδειξη της έκφρασης αυτής θα πρέπει να δειχθεί ότι η υποθετική πρόταση

«εάν $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ τότε $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$» είναι αληθής για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ στο πεδίο αναφοράς .

Για την απόδειξη θεωρούμε τα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μέλη του πεδίου αναφοράς και υποθέτουμε ότι για αυτά ισχύει η $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$. Αν η $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ είναι ψευδής, τότε από τον ορισμό της υποθετικής πρότασης, η π είναι αληθής.

Η **άμεση αποδεικτική διαδικασία** υποθέτει την αλήθεια της $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ και χρησιμοποιώντας ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα αποδεικνύει ενδιάμεσα αποτελέσματα έως ότου δειχθεί η αλήθεια της πρότασης $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$.

Παράδειγμα 1.19

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς δ_1, δ_2, δ, και x ότι:

Αν $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ και $x \leq \delta$, τότε $x \leq \delta_1$ και $x \leq \delta_2$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, θα πρέπει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς δ_1, δ_2, δ, και x για τους οποίους ισχύει ότι ($\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ και $x \leq \delta$) να δειχθεί ότι $x \leq \delta_1$ και $x \leq \delta_2$.

Από τον ορισμό του min ισχύει ότι $\delta \leq \delta_1(1)$ και $\delta \leq \delta_2(2)$. Εφόσον ισχύει η ($x \leq \delta$), και η (1) παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x \leq \delta_1$ είναι αληθές. Επίσης, αφού $x \leq \delta$, και ισχύει η (2) παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x \leq \delta_2$. Επομένως, $x \leq \delta_1$ και $x \leq \delta_2$.

Άλλος τρόπος απόδειξης είναι η **απαγωγή σε άτοπο**. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρούμε ότι η υπόθεση $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ του θεωρήματος είναι αληθής και το $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ψευδές. Η χρήση των $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $\urcorner P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, θεωρημάτων, αξιωμάτων και ορισμών οδηγεί σε πρόταση της μορφής $(\sigma \wedge \urcorner\sigma)$, δηλαδή σε άτοπο. Το άτοπο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αρχικές μας υποθέσεις ήταν ψευδείς. Δηλαδή:

(α) είτε η $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ είναι ψευδής

(β) είτε η $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ αληθής.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η υποθετική πρόταση (π) του γενικευμένου θεωρήματος που διατυπώθηκε παραπάνω είναι αληθής.

Η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο μπορεί να αιτιολογηθεί από το γεγονός ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\Pi \to P$$

$$\Pi \wedge \urcorner P \to (\sigma \wedge \urcorner\sigma)$$

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των προτάσεων αυτών σας δίνεται σαν άσκηση δραστηριότητας.

Παράδειγμα 1.20

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς δ_1, δ_2, ισχύει ότι:

Αν $(\delta_1 + \delta_2) \geq 2$ τότε $\delta_1 \geq 1$ ή $\delta_2 \geq 1$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών ισχύει η υπόθεση $((\delta_1 + \delta_2) \geq 2$ και δεν ισχύει το συμπέρασμα $(\delta_1 \geq 1$ ή $\delta_2 \geq 1)$. Δηλαδή, $(\delta_1 < 1$ και $\delta_2 < 1)$. Τότε, $(\delta_1 + \delta_2) < 2$. Αυτό όμως είναι σε αντίφαση με την υπόθεση $((\delta_1 + \delta_2) \geq 2)$ και επομένως η αποδεικτική διαδικασία έχει φτάσει σε άτοπο. Συνεπώς, η υποθετική πρόταση

Αν $(\delta_1 + \delta_2) \geq 2$ τότε $\delta_1 \geq 1$ ή $\delta_2 \geq 1$.

για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών δ_1, δ_2 είναι αληθής.

Άλλη τεχνική απόδειξης βασίζεται στη χρήση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής:

Ορισμός 1.18: Αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Έστω ότι για κάθε θετικό ακέραιο v η έκφραση $\Pi(v)$ είναι αληθής ή ψευδής.

Αν ισχύουν τα εξής:

(α) η $\Pi(1)$ είναι αληθής, και
(β) αν η $\Pi(\kappa)$ είναι αληθής για κάθε $\kappa < (v + 1)$, τότε η $\Pi(v + 1)$ είναι αληθής,

τότε ισχύει ότι
η $\Pi(v)$ είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο v.

Η υπόθεση (α) καλείται **βασικό βήμα** και η υπόθεση (β) καλείται **επαγωγικό βήμα**.

Παράδειγμα 1.21

Να δειχθεί ότι για $v = 1, 2, \ldots, \quad v! \geq 2^{v-1}$.

Απόδειξη

Βασικό βήμα: Για $v = 1$, ισχύει ότι $1! \geq 2^{1-1}$, δηλαδή $1 \geq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δειχθεί ότι αν ισχύει η $(\kappa! \geq 2^{\kappa-1})$, $\kappa = 1, 2, \ldots, v$, τότε η $((v + 1)! \geq 2^{v})$ είναι αληθής.

Πράγματι,

$$(v + 1)! = (v + 1)v! \tag{1}$$

Δεδομένου ότι $v! \geq 2^{v-1}$, από την (1) προκύπτει ότι

$(v + 1)! = (v + 1)v! \geq (v + 1)\, 2^{v-1} . \geq 2 \cdot 2^{v-1}$ (αφού $v = 1, 2, \ldots, v + 1 \geq 2$)

Επομένως, $(v + 1)! \geq 2^{v}$.

Με την ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος, αποδείξαμε ότι $v! \geq 2^{v-1}$, για $v = 1, 2, \ldots, .$

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να χρησιμοποιείτε αποδεικτικές μεθόδους για την επαλήθευση προτάσεων.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.14

Να δειχθεί ότι αν 100 μπάλες τοποθετηθούν σε 9 κουτιά, τουλάχιστον ένα κουτί θα περιέχει 12 ή περισσότερες μπάλες.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.15

Να δειχθεί ότι αν $\alpha\beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι για κάθε τριάδα α, β, γ πραγματικών αριθμών ισχύει ότι: αν $\alpha\beta = \alpha\gamma$ και $\alpha \neq 0$, τότε $\beta = \gamma$.

Οι παρακάτω ασκήσεις σας βοηθούν να εφαρμόσετε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.16

Να δειχθεί ότι αν $r \neq 1$,

$$a + ar^1 + ar^2 + \dots, + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$

Το παραπάνω άθροισμα καλείται γεωμετρικό άθροισμα με λόγο r.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.17

Οι **κώδικες Gray** έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορα πλαίσια εφαρμογής, όπως για τη μετατροπή αναλογικής σε ψηφιακή πληροφορία. Ένας κώδικας Gray ορίζεται ως μια ακολουθία

$$S_1, S_2, \dots, S_2n,$$

για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Ο κάθε S_κ είναι ένας δυαδικός αριθμός n ψηφίων
- Κάθε δυαδικός αριθμός n ψηφίων εμφανίζεται στην ακολουθία στοιχείων
- S_κ, $S_{\kappa+1}$, διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο, $\kappa = 1, \dots, 2^n - 1$.
- S_2n, S_1 διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Η κατασκευή των κωδικών Gray γίνεται ως εξής:

Έστω G_1 να είναι η ακολουθία 0, 1. Η ακολουθία G_ν κατασκευάζεται από την ακολουθία $G_{\nu-1}$ σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία:

(α) Έστω $G^R{}_{\nu-1}$ η ακολουθία $G_{\nu-1}$ ανεστραμμένη.

(β) Έστω $G'_{\nu-1}$ η ακολουθία στην οποία κάθε δυαδικός αριθμός της $G_{\nu-1}$ εμφανίζεται με ένα 0 στην αρχή.

(γ) Έστω $G''_{\nu-1}$ η ακολουθία στην οποία κάθε δυαδικός αριθμός της $G^R{}_{\nu-1}$ εμφανίζεται με ένα 1 στην αρχή.

(δ) Η ακολουθία G_ν είναι η ακολουθία αριθμών της $G'_{\nu-1}$ ακολουθούμενη από την ακολουθία $G''_{\nu-1}$.

Να δειχθεί ότι η G_ν είναι κώδικας Gray, για κάθε ν.

Παράδειγμα 1.22

Κατασκευή κωδικών Gray.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι ακολουθίες G_2 και G_3 κατασκευάζονται ως εξής:

G_1	:	0	1						
$G^R{}_1$	:	1	0						
G'_1	:	00	01						
G''_1	:	11	10						
G_2	:	00	01	11	10				
$G^R{}_2$	:	10	11	01	00				
G'_2	:	000	001	011	010				
G''_2	:	110	111	101	100				
G_3	:	000	001	011	010	110	111	101	100

Σύνοψη ενότητας

Η ενότητα 1.2 παρουσιάζει τις βασικές έννοιες ενός μαθηματικού συστήματος και συζητά την έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας. Παρουσιάζει αποδεικτικές διαδικασίες δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης της ενότητας σας βοηθούν στην κατανόηση της χρήσης αποδεικτικών μεθόδων για την επαλήθευση προτάσεων.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στην ενότητα 1.1 ορίζεται η έννοια της πρότασης και καθορίζεται πώς από απλές προτάσεις προκύπτουν οι σύνθετες με τη χρήση των λογικών συνδετικών/τελεστών σύζευξης, διάζευξης, άρνησης, «αν...τότε...» και «ανν». Για τις σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν με τη χρήση των παραπάνω συνδετικών παρουσιάζονται οι πίνακες αληθείας τους. Παρουσιάζεται ο τρόπος κατασκευής του πίνακα αληθείας οποιασδήποτε σύνθετης πρότασης και ο τρόπος εκτίμησης της τιμής αληθείας σύνθετων προτάσεων, δεδομένων των τιμών αληθείας των επιμέρους προτάσεών τους. Στην υποενότητα 1.1.2 ορίζεται η έννοια της προτασιακής συνάρτησης και παρουσιάζεται η χρήση των ποσοδεικτών. Στο τέλος της υπο–ενότητας παρουσιάζονται οι γενικευμένοι κανόνες De Morgan.

Η ενότητα 1.2 παρουσιάζει τις βασικές έννοιες ενός μαθηματικού συστήματος και την έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας. Παρουσιάζει αποδεικτικές διαδικασίες, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής που χρησιμοποιείται εκτενέστατα στα μαθηματικά και κυρίως στα διακριτά μαθηματικά, καθώς επίσης και στην επιστήμη των υπολογιστών.

Δραστηριότητα 1.6

Να διατυπώσετε 2 ορισμούς, 2 αξιώματα και 2 θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Υπόδειξη

Με βάση τους ορισμούς των εννοιών «ορισμός», «αξίωμα» και «θεώρημα», όπως αυτοί έχουν διατυπωθεί παραπάνω, διατυπώστε τα ζητούμενα.

Δραστηριότητα 1.7

Να διατυπώσετε ένα θεώρημα των ακέραιων αριθμών που αποδεικνύεται με εφαρμογή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής και να το αποδείξετε.

Υπόδειξη

Διατυπώστε μια αληθή πρόταση που αναφέρεται σε θετικό ακέραιο αριθμό ν. Δείξτε ότι η πρόταση αυτή ισχύει για $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Δραστηριότητα 1.7

Να διατυπώσετε ένα θεώρημα των ακέραιων αριθμών που αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο και να το αποδείξετε.

Υπόδειξη

Διατυπώστε μια υποθετική πρόταση $\Pi \rightarrow P$, όπου, αν η Π είναι αληθής σε ένα υποσύνολο των ακεραίων, τότε και η P θα είναι αληθής στο σύνολο αυτό.

Βιβλιογραφία

[1] Liu C.L., «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών», Απόδοση στα ελληνικά Κ. Μπους, Δ. Γραμμένος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

[2] Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.

Προαιρετική βιβλιογραφία

[1] J.H. Gallier, «Logic for Computer Science. Foundations of Automatic Theorem Proving», John Willey & Sons, 1987.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Σκοπός

Η έννοια της σχέσης αποτελεί θεμελιώδη μαθηματική έννοια στην οποία βασίζονται ευρέως διαδεδομένα μοντέλα δεδομένων, όπως για παράδειγμα το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων που προτάθηκε για πρώτη φορά από τον E.F.Codd το 1970.

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται οι ιδιότητες σχέσεων και σχέσεις ιδιαίτερου τύπου, όπως για παράδειγμα οι σχέσεις ισοδυναμίας και οι συναρτήσεις. Το κεφάλαιο αποτελεί επίσης μια εισαγωγή στην έννοια του γραφήματος και στον τρόπο παράστασης γραφημάτων για την αξιοποίησή τους από υπολογιστικές μεθόδους.

Συγκεκριμένα, η ενότητα 2.1 του κεφαλαίου αυτού ορίζει την έννοια της σχέσης, δίνοντας έμφαση στις διμελείς σχέσεις. Η ενότητα ορίζει ιδιότητες των σχέσεων και εισάγει την έννοια του κατευθυνόμενου γραφήματος ως τρόπου παράστασης των σχέσεων. Η ενότητα 2.2 αναφέρεται σε ν–μελείς σχέσεις και παρουσιάζει το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και παραδείγματα τελεστών για το χειρισμό των δεδομένων σε μια σχεσιακή βάση δεδομένων. Η ενότητα 2.3 αναφέρεται σε σχέσεις μερικής και ολικής διάταξης επί ενός συνόλου X και στις σχέσεις ισοδυναμίας. Τέλος, στην ενότητα 2.4 ορίζεται η έννοια της συνάρτησης και αναφέρονται ιδιότητες συναρτήσεων.

Γενικά, οι έννοιες που ορίζονται στο παρόν κεφάλαιο αποτελούν βασική ορολογία για τον ορισμό συνθετότερων εννοιών σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου και για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούν στις έννοιες αυτές.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη του παρόντος κεφαλαίου και η αποσαφήνιση των εννοιών που ορίζονται σε αυτό θα σας επιτρέψει να:

- *ορίζετε σχέσεις μεταξύ συνόλων διακριτών οντοτήτων,*
- *χαρακτηρίζετε τις σχέσεις με βάση τις ιδιότητές τους,*
- *ορίζετε σχέσεις με συγκεκριμένες ιδιότητες και με βάση άλλες (απλούστερες) σχέσεις,*
- *παριστάνετε σχέσεις με τη χρήση κατευθυνόμενων γραφημάτων και πινάκων,*
- *προσεγγίζετε κατ' αρχάς το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και τις σχεσιακές βάσεις,*
- *συνδέετε την έννοια της σχέσης με την έννοια της χρήσης και διαχείρισης δεδομένων σε βάσεις δεδομένων,*
- *έχετε τη δυνατότητα χαρακτηρισμού συναρτήσεων με βάση τις ιδιότητές τους.*

Έννοιες κλειδιά

- *διμελής σχέση από σύνολο X σε σύνολο Y*
- *πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών σχέσης*
- *ανακλαστική*
- *συμμετρική*
- *αντισυμμετρική και μεταβατική σχέση*
- *αντίστροφη σχέσης*
- *σύνθεση σχέσεων*
- *κατευθυνόμενα γραφήματα (ακμές, κορυφές, ανακύκλωση)*
- *πίνακας σχέσης*
- *σύστημα διαχείρισης βάσεων δεδομένων*
- *σχεσιακή βάση δεδομένων*
- *τελεστής επιλογής*
- *τελεστής προβολής*
- *τελεστής σύνθεσης*
- *συνάρτηση*
- *συνάρτηση ένα – προς – ένα*
- *συνάρτηση «επί»*
- *αντίστροφη συνάρτησης*
- *σύνθεση συναρτήσεων*
- *διαμέριση συνόλου*
- *σχέση μερικής διάταξης*
- *σχέση ολικής διάταξης*
- *σχέση ισοδυναμίας*
- *κλάσεις ισοδυναμίας*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η κατανόηση του παρόντος κεφαλαίου απαιτεί τη γνώση βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων: Σύνολο, στοιχείο (μέλος) συνόλου, ισότητα συνόλων, (γνήσιο) υποσύνολο συνόλου, ένωση συνόλων, τομή συνόλων, ξένα μεταξύ τους σύνολα, καρτεσιανό γινόμενο συνόλων, διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων. Στη ροή του κειμένου, όπου θεωρώ ότι απαιτείται και είναι χρήσιμο, θα αναφέρω ορισμούς κάποιων εννοιών από τις παραπάνω.

2.1 Διμελείς σχέσεις και ιδιότητές τους

Σκοπός

Στην ενότητα αυτή ορίζεται η έννοια της σχέσης, ενώ έμφαση δίνεται στις διμελείς σχέσεις. Η ενότητα ορίζει ιδιότητες των σχέσεων και εισάγει την έννοια του κατευθυνόμενου γραφήματος και του πίνακα σχέσεων ως τρόπων παράστασης των σχέσεων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

- *Η αποσαφήνιση των εννοιών που ορίζονται στην τρέχουσα ενότητα θα σας επιτρέψει να:*
- *ορίζετε σχέσεις μεταξύ συνόλων διακριτών οντοτήτων,*
- *χαρακτηρίζετε τις σχέσεις με βάση τις ιδιότητές τους,*
- *ορίζετε σχέσεις με συγκεκριμένες ιδιότητες και με βάση άλλες (απλούστερες) σχέσεις,*
- *παριστάνετε σχέσεις με τη χρήση κατευθυνόμενων γραφημάτων και πινάκων.*

Έννοιες κλειδιά

- *διμελής σχέση από σύνολο X σε σύνολο Y*
- *πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών σχέσης*
- *ανακλαστική*
- *συμμετρική*
- *αντισυμμετρική και μεταβατική σχέση*
- *αντίστροφη σχέσης*
- *σύνθεση σχέσεων*
- *κατευθυνόμενα γραφήματα (ακμές, κορυφές, ανακύκλωση)*
- *πίνακας σχέσης.*

2.1.1 Σχέσεις

Συνήθως, στον πραγματικό κόσμο ορίζουμε σχέσεις μεταξύ διακριτών οντοτήτων. Για παράδειγμα ορίζουμε σχέσεις μεταξύ φοιτητών και μαθημάτων, μαθημάτων και διδασκόντων, υποκαταστημάτων ενός τραπεζικού οργανισμού και δανείων, μεταξύ ακεραίων, κοκ.

Παράδειγμα 2.1

Αν θεωρήσουμε το σύνολο των ακεραίων, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι δύο ακέραιοι σχετίζονται μεταξύ τους αν το άθροισμά τους είναι άρτιος αριθμός. Έτσι, οι ακέραιοι 2 και 4 σχετίζονται με την παραπάνω σχέση, ενώ οι ακέραιοι 2 και 3 δεν σχετίζονται.

Παράδειγμα 2.2

Η σχέση μεταξύ φοιτητών και μαθημάτων μπορεί να ειδωθεί με τη μορφή ενός πίνακα. Ο πίνακας 2.1 περιγράφει τα μαθήματα που έχουν δηλώσει οι φοιτητές ενός τμήματος. Κάθε γραμμή αυτού του πίνακα είναι μια διατεταγμένη δυάδα (Φ, M) στοιχείων των συνόλων Φοιτητής και Μάθημα, αντίστοιχα:

Πίνακας 2.1

Πίνακας της σχέσης «Δήλωση»

Φοιτητής	Μάθημα
Γιάννης	Μαθηματικά
Μαίρη	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα
Νίκος	Λειτουργικά Συστήματα
Κώστας	Δίκτυα
Γιάννης	Δίκτυα

Μια διμελής σχέση είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

Ορισμός 2.1: **Διμελής (binary)** σχέση Σ από σύνολο X σε σύνολο Y είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$[1]. Αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$, λέμε ότι το χ σχετίζεται με το ψ και σημειώνουμε $\chi\Sigma\psi$. Στην περίπτωση όπου $X = Y$, λέμε ότι η Σ είναι διμελής σχέση επί του συνόλου X.

Το σύνολο $\{\chi \in X \mid (\chi, \psi) \in \Sigma$ για κάποιο ψ στο $Y\}$ καλείται **πεδίο ορισμού** της Σ, ενώ το σύνολο $\{\psi \in Y \mid (\chi, \psi) \in \Sigma$ για κάποιο χ στο $X\}$ καλείται **πεδίο τιμών** της Σ.

[1] Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων $X \times Y$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων δυάδων (χ, ψ), όπου $\chi \in X$ και $\psi \in \Psi$, δηλ. $X \times Y = \{(\chi, \psi) \mid \chi \in X$ και $\psi \in \Psi\}$

Παράδειγμα 2.3

Στο παράδειγμα του πίνακα 2.1, η σχέση «Δήλωση» είναι υποσύνολο του συνόλου Φοιτητής × Μάθημα. Η δυάδα (Γιάννης, Μαθηματικά) είναι στοιχείο της σχέσης αυτής, δηλαδή «Γιάννης Δήλωση Μαθηματικά» ή ο Γιάννης σχετίζεται με το μάθημα Μαθηματικά (μέσω της σχέσης «Δήλωση»). Το σύνολο των στοιχείων της πρώτης στήλης του εν λόγω πίνακα αποτελεί το πεδίο ορισμού της σχέσης «Δήλωση», και τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, το πεδίο τιμών της.

Παράδειγμα 2.4

Αν $X = \{2, 3, 4\}$ και $Y = \{3, 4, 5\}$, ορίζουμε τη σχέση Σ από το X στο Y ως εξής:

$\chi \Sigma \psi$, αν $(\chi + \psi)$ είναι άρτιος αριθμός.

Τότε $\Sigma = \{(2, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 4)\}$. Το πεδίο τιμών της Σ είναι το $\{4, 3, 5\}$ και το πεδίο ορισμού είναι $\{2, 3, 4\}$.

Παράδειγμα 2.5

Αν $X = \{1, 2, 3, 4\}$, ορίζουμε τη σχέση Σ στο X ως εξής

$(\chi, \psi) \in \Sigma$, αν $\chi \leq \psi$,

όπου χ, ψ στοιχεία του X.

Τότε $\Sigma = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

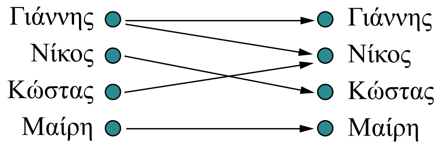
Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της Σ είναι το X.

Για την περιγραφή μιας διμελούς σχέσης μπορείτε να παραθέσετε τα ζεύγη των στοιχείων που σχετίζονται ή να την περιγράψετε με τη μορφή ενός πίνακα, όπως ο πίνακας 2.1. Εναλλακτικός τρόπος παράστασης μιας σχέσης είναι με τη χρήση ενός **κατευθυνόμενου γραφήματος**. Τα κατευθυνόμενα γραφήματα ορίζονται και περιγράφονται με περισσότερη λεπτομέρεια στο κεφάλαιο 4. Εδώ τα αναφέρουμε μόνο σε σχέση με την περιγραφή σχέσεων. Για την κατασκευή ενός γραφήματος που παριστά μια σχέση Σ από σύνολο X σε σύνολο Y, αρχικά σημειώνουμε με τελείες (κορυφές ή κόμβους) τα στοιχεία των συνόλων X και Y. Κατόπιν, για κάθε ζεύγος (χ, ψ) στην Σ, σημειώνουμε μια κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή χ στην κορυφή ψ.

Παράδειγμα 2.6

Η σχέση «Δήλωση» του παραδείγματος 2.2, όπως αυτή περιγράφεται με τον πίνακα 2.1, μπορεί να περιγραφεί και με το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2.1:

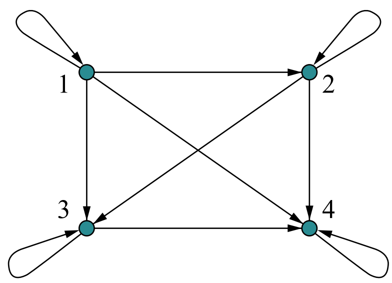
Σχήμα 2.1
Περιγραφή της σχέσης του πίνακα 2.1 με τη μορφή κατευθυνόμενου γραφήματος.



Παράδειγμα 2.7

Η περιγραφή της σχέσης Σ του παραδείγματος 2.5 με τη μορφή κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ως εξής:

Σχήμα 2.2
Περιγραφή της σχέσης του παραδείγματος 2.5 με τη μορφή κατευθυνόμενου γραφήματος.



Σημειώστε ότι στοιχεία της μορφής (χ, χ) στη σχέση Σ αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενες ακμές από την κορυφή χ στην κορυφή χ. Τέτοιες ακμές καλούνται *ανακυκλώσεις*.

Για την περιγραφή μιας σχέσης μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν πίνακες, οι οποίοι ουσιαστικά αποτελούν εναλλακτική παράσταση των κατευθυνόμενων γραφημάτων που περιέγραψα παραπάνω. Η παράσταση γραφημάτων με πίνακες θα περιγραφεί με λεπτομέρεια στο κεφάλαιο 4.

Για την περιγραφή μιας σχέσης Σ από σύνολο X σε σύνολο Y, όπως αυτής του σχήματος 2.1 στο παράδειγμα 2.6, πέρα από τους πίνακες για την παράθεση των δυάδων μιας σχέσης που προαναφέραμε, μπορεί να δημιουργηθεί πίνακας, κάθε γραμμή του οποίου αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του X και κάθε στήλη του οποίου αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Y. Επομένως, κάθε στοιχείο (χ, ψ) του πίνακα αυτού αντιστοιχεί σε στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. Αν (χ, ψ) στοιχείο της σχέσης Σ, τότε το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα έχει την τιμή 1. Σε αντίθετη περίπτωση, έχει την τιμή 0.

Παράδειγμα 2.8

Το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2.1, που περιγράφει τη σχέση «Δήλωση», μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή πίνακα ως εξής:

Πίνακας 2.2

Πίνακας για την περιγραφή της σχέσης του σχήματος 2.1.

	Μαθηματικά	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα	Δίκτυα	Λειτουργικά Συστήματα
Γιάννης	1	0	1	0
Νίκος	0	0	0	1
Μαίρη	0	1	0	0
Κώστας	0	0	1	0

Παράδειγμα 2.9

Το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2.2, που περιγράφει τη σχέση «μικρότερο ή ίσο» στο σύνολο {1, 2, 3, 4}, μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή πίνακα ως εξής:

Πίνακας 2.3

Πίνακας για την περιγραφή της σχέσης του σχήματος 2.2.

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

Ορισμός 2.2: Μια ν–μελής σχέση Σ μεταξύ των συνόλων $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ορίζεται ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X_1 \times X_2 \times \ldots, \times X_\nu$. Η σχέση Σ έχει ως στοιχεία διετεταγμένες ν – άδες, η i – οστή συντεταγμένη των οποίων, $1 \leq i \leq \nu$, είναι στοιχείο του συνόλου X_i.

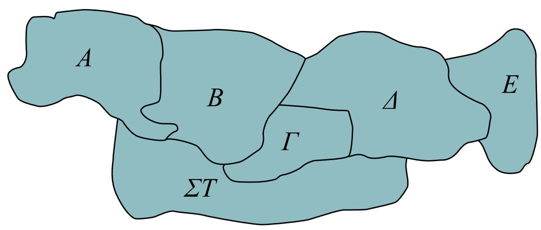
Παράδειγμα 2.10

Έστω Πελάτης = $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ το σύνολο πελατών σε ένα τραπεζικό οργανισμό, Δάνειο = $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$ το σύνολο των δανείων και Υποκατάστημα = $\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4\}$ το σύνολο των υποκαταστημάτων. Η σχέση «Δανειζόμενος» περιγράφει τη σχέση μεταξύ πελατών, δανείων και των υποκαταστημάτων που παρακολουθούν τα εν λόγω δάνεια. Επομένως, η τριμελής σχέση «Δανειζόμενος» είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου (Πελάτης × Δάνειο × Υποκατάστημα).

Δανειζόμενος = $\{(\pi_1, \delta_2, \upsilon_1), (\pi_2, \delta_2, \upsilon_1), (\pi_3, \delta_3, \upsilon_2), (\pi_3, \delta_4, \upsilon_2)\}$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.1

Θεωρείστε το χάρτη του σχήματος 2.3 και θεωρείστε το σύνολο των περιοχών που ορίζονται σε αυτόν, έστω X. Ορίστε τη σχέση «συνορεύουν» επί του συνόλου X και κατασκευάστε το κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα που παριστούν τη σχέση αυτή.



Σχήμα 2.3

Χάρτης περιοχών

Δραστηριότητα 2.1

Οι ακόλουθες σχέσεις να γραφούν με τη μορφή διατεταγμένων ζευγών, πινάκων και κατευθυνόμενων γραφημάτων:

Α. Σχέση Σ επί του $\{1, 2, 3, 4\}$ τέτοια ώστε $x\Sigma y$, αν $x^2 \geq y$.

Β. Σχέση Σ επί του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ τέτοια ώστε $x\Sigma y$, αν το $(x - y)$ είναι περιττός θετικός ακέραιος.

Υπόδειξη

Για τη διατύπωση της κάθε σχέσης ως συνόλου διατεταγμένων ζευγών, ακολουθείστε τα παραδείγματα 2.4 και 2.5. Για κάθε χ του εκάστοτε συνόλου, ελέγξτε αν υπάρχει στοιχείο y του ίδιου συνόλου τέτοιο ώστε $\chi\Sigma y$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση A, για το στοιχείο 1, το μοναδικό y για το οποίο $1^2 \geq y$ είναι το $y = 1$. Συνεπώς $(1, 1) \in \Sigma$.

Για τη δημιουργία των αντίστοιχων πινάκων και των κατευθυνόμενων γραφημάτων, ακολουθείστε τη μεθοδολογία που αναφέρεται στη θεωρία και τα παραδείγματα 2.7 και 2.9.

2.1.2 Ιδιότητες σχέσεων, αντίστροφη σχέσης και σύνθεση σχέσεων

Στη συνέχεια ορίζουμε ιδιότητες διμελών σχέσεων επί συνόλου X.

Ορισμός 2.3: Μια σχέση Σ καλείται ανακλαστική (reflexive) αν $(\chi, \chi) \in \Sigma$, για κάθε χ στο X.

Παράδειγμα 2.11

Η σχέση «≤» του παραδείγματος 2.5 επί του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ είναι ανακλαστική, εφόσον για κάθε χ στο X ισχύει ότι $\chi \leq \chi$. Αυτό φαίνεται από το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2.2, όπως επίσης και από τον πίνακα 2.3. Στο κατευθυνόμενο γράφημα παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ανακύκλωση σε κάθε κορυφή του γραφήματος. Στον πίνακα μπορείτε να δείτε ότι η κύρια διαγώνιος του πίνακα έχει το σημείο 1 σε όλα τα στοιχεία της.

Παράδειγμα 2.12

Η σχέση $\Sigma = \{(\alpha, \alpha), (\delta, \delta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ επί του συνόλου $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ δεν είναι ανακλαστική, διότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα στοιχείο του X, το β, για το οποίο $(\beta, \beta) \notin \Sigma$. Αν κατασκευάσετε το κατευθυνόμενο γράφημα της Σ, θα διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχει ανακύκλωση σε κάθε κορυφή, ενώ στον αντίστοιχο πίνακα της Σ το στοιχείο της κυρίας διαγωνίου που αντιστοιχεί στο στοιχείο (β, β) είναι ίσο με 0.

Ορισμός 2.4: Μια σχέση Σ καλείται συμμετρική (symmetric) αν για κάθε χ, ψ στο X, αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$, τότε και $(\psi, \chi) \in \Sigma$.

Παράδειγμα 2.13

Η σχέση «≤» του παραδείγματος 2.5 επί του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ δεν είναι ανακλαστική, εφόσον υπάρχει ζεύγος στοιχείων, π.χ. το $(2, 3)$, για το οποίο ισχύει ότι $2 \leq 3$, δίχως να ισχύει ότι $3 \leq 2$.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα μιας συμμετρικής ιδιότητας, αν υπάρχει μια κατευθυνόμενη ακμή από το χ στο ψ, θα πρέπει να υπάρχει και κατευθυνόμενη ακμή από το ψ στο χ. Αυτό δεν συμβαίνει στο κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 2.2. που αποτελεί παράσταση της σχέσης « ≤ ».

Κατ’ αντιστοιχία, ο πίνακας μιας συμμετρικής ιδιότητας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο. Αυτό δεν συμβαίνει για τον πίνακα 2.3 που αποτελεί παράσταση της σχέσης « ≤ ».

Παράδειγμα 2.14

Η σχέση $\Sigma = \{(\alpha, \alpha), (\delta, \delta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ επί του συνόλου $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι συμμετρική, εφόσον για κάθε χ, ψ στο X, αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$, τότε και $(\psi, \chi) \in \Sigma$.

Δραστηριότητα 2.2

Σχηματίστε το κατευθυνόμενο γράφημα και τον πίνακα της σχέσης Σ του παραδείγματος 2.14. Παρατηρήστε ότι για κάθε κατευθυνόμενη ακμή από το χ στο ψ υπάρχει κατευθυνόμενη ακμή από το ψ στο χ. Αντίστοιχα, σχηματίστε τον πίνακα της σχέσης Σ και παρατηρήστε ότι είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο.

Υπόδειξη

Για τη δημιουργία του κατευθυνόμενου γραφήματος ακολουθείστε τη μεθοδολογία που αναφέρεται στη θεωρία και το παράδειγμα 2.7.

Αντίστοιχα, για τη δημιουργία του πίνακα της σχέσης ακολουθείστε τη μεθοδολογία που αναφέρεται στη θεωρία και στο παράδειγμα 2.9.

Ορισμός 2.5: Μια σχέση Σ καλείται αντισυμμετρική (antisymmetric) αν για κάθε χ, ψ στο X, αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$ και $\chi \neq \psi$, τότε $(\psi, \chi) \notin \Sigma$.

Παράδειγμα 2.15

Η σχέση «≤» του παραδείγματος 2.5 επί του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ είναι αντισυμμετρική, διότι πληροί τον ορισμό. Για παράδειγμα, $(1 \leq 2)$, $1 \neq 2$ και $(2, 1)$ δεν ανήκει στη σχέση.

Παρατηρήστε ότι η ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας απαιτεί στο κατευθυνόμενο γράφημα της σχέσης να υπάρχει το πολύ μια κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ οποιωνδήποτε κορυφών χ και ψ.

Παράδειγμα 2.16

Η σχέση $\Sigma = \{(\alpha, \alpha), (\delta, \delta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ επί του συνόλου $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ δεν είναι αντισυμμετρική. Το ζεύγος (β, γ) αποτελεί αντιπαράδειγμα για τον ορισμό της αντισυμμετρικότητας.

Δραστηριότητα 2.3

Σχηματίστε το κατευθυνόμενο γράφημα της σχέσης Σ του παραδείγματος 2.16 και παρατηρήστε ότι μεταξύ των κορυφών β και γ υπάρχουν δύο κατευθυνόμενες ακμές.

Υπόδειξη

Για τη δημιουργία του κατευθυνόμενου γραφήματος ακολουθείστε τη μεθοδολογία που αναφέρεται στη θεωρία και στο παράδειγμα 2.17.

Ορισμός 2.6: Μια σχέση Σ καλείται μεταβατική (transitive) αν για κάθε χ, ψ, φ στο X, αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$ και $(\psi, \varphi) \in \Sigma$, τότε $(\chi, \varphi) \in \Sigma$.

Παράδειγμα 2.17

Η σχέση «≤» του παραδείγματος 2.5 επί του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ είναι μεταβατική, διότι πληροί τον ορισμό. Για την επαλήθευση της ισχύος της ιδιότητας αυτής, θα πρέπει να ελεγχθούν όλα τα δυνατά ζεύγη σύμφωνα με τον ορισμό της μεταβατικότητας.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα μιας μεταβατικής σχέσης θα πρέπει για κάθε ζεύγος κατευθυνόμενων ακμών (χ, ψ) και (ψ, φ) να υπάρχει και η ακμή (χ, φ).Παρατηρήστε ότι αυτό ισχύει για το γράφημα της σχέσης « ≤ », όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.2.

Παράδειγμα 2.18

Η σχέση $\Sigma = \{(\alpha, \alpha), (\delta, \delta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ επί του συνόλου $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ δεν είναι μεταβατική. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε τα ζεύγη (β, γ) και (γ, β) της σχέσης Σ. Το ζεύγος (β, β) δεν αποτελεί στοιχείο της Σ, όπως θα έπρεπε, αν η Σ ήταν μεταβατική ιδιότητα.

Ορισμός 2.7: Αν Σ σχέση από σύνολο X σε σύνολο Y, η αντίστροφη (inverse) της Σ, συμβολίζεται Σ^{-1}, είναι η εξής σχέση από το Y στο X:

$$\Sigma^{-1} = \{(\psi, \chi) \mid (\chi, \psi) \in \Sigma\}.$$

Παράδειγμα 2.19

Η αντίστροφη της σχέσης « ≤ » στο $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ορίζεται ως εξής:

$$(\psi, \chi) \in \leq^{-1} \text{ αν } \chi \leq \psi,$$

όπου χ, ψ στοιχεία του X.

Τότε $\leq^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

Επομένως, η αντίστροφη της σχέσης «μικρότερο ή ίσο» είναι η σχέση «μεγαλύτερο ή ίσο».

Ορισμός 2.8: Αν Σ_1 σχέση από σύνολο X σε σύνολο Y και Σ_2 σχέση από το σύνολο Y σε σύνολο Z, η σύνθεση (composition) των Σ_1 και Σ_2, συμβολίζεται $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, είναι σχέση από το X στο Z που ορίζεται ως εξής:

$$\Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \{(\chi, \varphi) \mid (\chi, \psi) \in \Sigma_1 \text{ και } (\psi, \varphi) \in \Sigma_2, \text{ για κάποιο } \psi \text{ στο } Y\}\ .$$

Παράδειγμα 2.20

Η σύνθεση των σχέσεων

Σ_1 = {(Γιάννης, Μαθηματικά), (Γιάννης, Δίκτυα), (Κώστας, Δίκτυα), (Νίκος, Λειτουργικά Συστήματα), (Μαίρη, Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα)} και

Σ_2 = {(Μαθηματικά, 02/02 | 17:00), (Δίκτυα, 03/02 | 12:00), (Λειτουργικά Συστήματα, 04/02 | 17:00), (Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα, 05/02 | 12:00)},

όπου Σ_1 ή σχέση «Δήλωση» και Σ_2 η σχέση «Εξέταση» (σχετίζει μαθήματα με την ημερομηνία και ώρα εξέτασης), είναι η σχέση

$\Sigma 1 \circ \Sigma 2$ = {(Γιάννης, 02/02 | 17:00), (Γιάννης, 03/02 | 12:00), (Κώστας, 03/02 | 12:00), (Νίκος, 04/02 | 17:00), (Μαίρη, 05/02 | 12:00) }

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.2

Για τη σχέση $\boldsymbol{\Sigma}$ «συνορεύουν» της άσκησης αυτοαξιολόγησης 2.1 συμπληρώστε τη δεύτερη στήλη του ακόλουθου πίνακα, ανάλογα με τις ιδιότητες που πληροί η εν λόγω σχέση. Σε περίπτωση αρνητικής απάντησης, δώστε αντιπαράδειγμα.

Ιδιότητα	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**
Συμμετρική	❑	❑
Αντισυμμετρική	❑	❑
Μεταβατική	❑	❑
Ανακλαστική	❑	❑

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.3

Για τη σχέση Σ = «συνορεύουν» της άσκησης αυτοαξιολόγησης 2.1, να οριστούν οι εξής σχέσεις:

Α) Η αντίστροφη σχέση της Σ^{-1} και

Β) Η σύνθεσή της Σ με τη σχέση Σ' = «πλήθος κατοίκων» που συσχετίζει την κάθε περιοχή του συνόλου X με τον πληθυσμό της. Ποια σχέση παράγεται με τη σύνθεση;

(Υπόδειξη: Αν θέλετε, μπορείτε να καθορίσετε ζεύγη για την Σ' και κατόπιν να σχηματίσετε τη σύνθεση των Σ και Σ').

Δραστηριότητα 2.4

Αντισυμμετρικότητα σημαίνει μη – συμμετρικότητα; Αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

Υπόδειξη

Δείξτε ότι μια αντισυμμετρική σχέση είναι μη – συμμετρική.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να δείξετε ότι κάθε μη – συμμετρική σχέση δεν είναι αντισυμμετρική.

Ένας τρόπος είναι να διατυπώσετε τις συνθήκες για να είναι μια σχέση συμμετρική ως λογική πρόταση. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τους γενικευμένους κανόνες De – Morgan, να υπολογίσετε την άρνηση της πρότασης αυτής. Δείξτε ότι η νέα πρόταση δεν ικανοποιεί τις συνθήκες της αντισυμμετικότητας.

Αλλιώς, μπορείτε να σκεφτείτε πώς αναγνωρίζετε μια μη – συμμετρική σχέση και μια αντισυμμετρική σχέση από τα κατευθυνόμενα γραφήματά τους. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να δώσετε παράδειγμα μη – συμμετρικής σχέσης που δεν είναι αντισυμμετρική.

Δραστηριότητα 2.5

Έστω Σ και ρ σχέσεις επί συνόλου X. Αποφασίστε αν τα παρακάτω είναι αληθή για όλους τους συνδυασμούς των x και y, όπου x = {μεταβατική, ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική}, $y = \{ \cup, \cap, \circ \}$.

α. Αν ρ και Σ είναι x, τότε και $\Sigma y P$ είναι x

β. Αν ρ είναι x, τότε και P^{-1} είναι x

Στην περίπτωση που μια πρόταση δεν αληθεύει, δώστε αντιπαράδειγμα.

Υπόδειξη

Αντικαθιστώντας x = μεταβατική και $y = \cup$, η (α) παραπάνω γίνεται

«Αν ρ και Σ είναι μεταβατικές σχέσεις, τότε και $\Sigma \cup P$ είναι μεταβατική σχέση».

Για το ίδιο x η (β) γίνεται

«Αν η ρ είναι μεταβατική, τότε και η P^{-1} είναι μεταβατική».

Κάνετε το ίδιο για όλες τις τιμές της x και y.

Χρησιμοποιείστε τους ορισμούς των ιδιοτήτων, της αντίστροφης σχέσης και της σύνθεσης σχέσεων.

Σύνοψη Ενότητας

Στην ενότητα αυτή ορίστηκε η έννοια της ν–μελούς σχέσης με ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια της διμελούς σχέσης από σύνολο X σε σύνολο Y. Για διμελή σχέση Σ ορίσθηκε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της σχέσης. Καθορίστηκαν οι συνθήκες που θα πρέπει να ισχύουν για να είναι μια σχέση ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική ή μεταβατική, ενώ ορίσθηκε η έννοια της αντίστροφης σχέσης και η σύνθεση σχέσεων. Τέλος, δόθηκε επίσης έμφαση στους τρόπους περιγραφής των σχέσεων με τη χρήση των κατευθυνόμενων γραφημάτων και πινάκων.

2.2 Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Σκοπός

Η παρούσα ενότητα αναφέρεται σε ν–μελείς σχέσεις, παρουσιάζει το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και παραδείγματα τελεστών για το χειρισμό των δεδομένων σε μια σχεσιακή βάση δεδομένων.

Οι έννοιες που εισάγονται στην παρούσα ενότητα αναφέρονται ως παραδείγματα της έννοιας της σχέσης. Ο γενικότερος στόχος της ενότητας είναι να δείξει πως θεωρητικές έννοιες, όπως αυτή της ν–μελούς σχέσης, αποτελούν τη βάση για την υλοποίηση ευρέως διαδεδομένων συστημάτων διαχείρισης δεδομένων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας επιτρέψει να

- *προσεγγίσετε κατ' αρχάς το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και τις σχεσιακές βάσεις,*
- *να συνδέσετε την έννοια της σχέσης με την έννοια της χρήσης και διαχείρισης δεδομένων.*

Έννοιες κλειδιά

- *σύστημα διαχείρισης βάσεων δεδομένων*
- *σχεσιακή βάση δεδομένων*
- *τελεστής επιλογής*
- *τελεστής προβολής*
- *τελεστής σύνθεσης*

2.2.1 Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

Μια βάση δεδομένων είναι μια συλλογή εγγραφών που αφορούν οντότητες και σχέσεις μεταξύ αυτών. Για παράδειγμα, μπορεί να περιέχει εγγραφές για πελάτες ενός τραπεζικού οργανισμού, εγγραφές για λογαριασμούς που διατηρούνται στα υποκαταστήματα του οργανισμού, δάνεια, πληρωμές δανείων κλπ. Ένα σύστημα διαχείρισης βάσεων δεδομένων επιτρέπει την περιγραφή των δεδομένων μιας βάσης δεδομένων, την αποθήκευση και προσπέλαση των δεδομένων για την αποτελεσματική απάντηση ερωτήσεων.

Για τη διαχείριση των λειτουργικών δεδομένων ενός οργανισμού, αυτά πρέπει να είναι οργανωμένα με τρόπο ώστε να καθίσταται η χρήση τους από ένα υπολογιστικό σύστημα αποτελεσματική, αλλά και διαισθητική για τους χρήστες του συστήματος. Για τους λόγους αυτούς εισάγονται τα μοντέλα δεδομένων, το πιο διαδεδομένο από τα οποία είναι το σχεσιακό μοντέλο που προτάθηκε από τον E.F.Codd το 1970. Βάσεις δεδομένων που υπακούουν στους κανόνες και στις μεθόδους του σχεσιακού μοντέλου δεδομένων καλούνται σχεσιακές βάσεις δεδομένων.

Στο σχεσιακό μοντέλο τα δεδομένα εισάγονται με τη μορφή πίνακα. Για παράδειγμα, ο πίνακας του σχήματος 2.1 έχει δύο στήλες και επομένως μοντελοποιεί μια διμελή σχέση. Γενικά, ένας πίνακας έχει v στήλες και μοντελοποιεί μια v – μελή σχέση μεταξύ v συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_v$. Οι στήλες του πίνακα καλούνται ιδιώματα της σχέσης και το πεδίο τιμών του i – οστού ιδιώματος είναι το σύνολο A_i, $1 \le i \le$ ν.

Παράδειγμα 2.21

Για παράδειγμα, οι πελάτες ενός τραπεζικού οργανισμού παρίστανται ως v–άδες σε έναν πίνακα ΠΕΛΑΤΗΣ με ιδιώματα ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ. Τα ιδιώματα αυτά έχουν πεδία τιμών A_1 = char(20), A_2 = char(20), A_3 = char(10) και A_4 = int(10)[2] αντίστοιχα. Επομένως, η σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$:

Πίνακας 2.4

Σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ ως πίνακας σε σχεσιακή βάση δεδομένων.

ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ	ΤΗΛΕΦΩΝΟ
Μάρκος	Ελευθερίου	ΧΥ23456	1234567
Νίκος	Μάρκου	ΧΩ12345	2345677
Ελευθέριος	Μάρκου	ΓΗ56789	9876543

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και ο πίνακας ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ με ιδιώματα ΑΡΙΘΜΟΣ και ΠΟΣΟ. Τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων είναι char(20) και int(10) αντίστοιχα. Η σχέση ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ έχει ως εξής:

[2] Όπου char(ν) είναι συμβολοσειρά το πολύ ν χαρακτήρων και int(ν) είναι ακέραιος το πολύ ν ψηφίων.

Πίνακας 2.5

Σχέση ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ως πίνακας σε σχεσιακή βάση δεδομένων.

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΠΟΣΟ
0987 – 7653543	500.000
0765 – 1234569	200.000
0911 – 9876543	20.000

Κλειδί μιας σχέσης στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων καλείται ένα σύνολο ιδιωμάτων που καθορίζει μονοσήμαντα την κάθε *ν*–άδα της σχέσης (δηλαδή, δεν υπάρχουν δύο *ν*–άδες με τις ίδιες τιμές στα ιδιώματα αυτά). Για παράδειγμα, στη σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ του παραδείγματος 2.21, το ιδίωμα ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ μπορεί να θεωρηθεί ως κλειδί της εν λόγω σχέσης, εφόσον δεν μπορούν να υπάρξουν δύο πελάτες με την ίδια τιμή στο πεδίο αυτό. Με ανάλογο τρόπο, κλειδί της σχέσης ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ του ίδιου παραδείγματος μπορεί να θεωρηθεί το ιδίωμα ΑΡΙΘΜΟΣ.

Παράδειγμα 2.22

Η σχέση ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ είναι μια διμελής σχέση με ιδιώματα ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ και ΑΡΙΘΜΟΣ. Τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων αυτών είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα ιδιώματα των σχέσεων ΠΕΛΑΤΗΣ και ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ. Επομένως,

ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ $\subseteq$ char(10) $\times$ char(20)

Κλειδί για τη σχέση ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ ορίζεται το σύνολο των ιδιωμάτων της σχέσης.

Πίνακας 2.6

Σχέση ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ
ΧΥ23456	0987 – 7653543
ΧΩ12345	0765 – 1234569
ΓΗ56789	0911 – 9876543

2.2.2 Τελεστές Χειρισμού Δεδομένων

Ένα σύστημα διαχείρισης βάσεων δεδομένων, μεταξύ άλλων, χειρίζεται τα δεδομένα μιας βάσης και απαντά σε ερωτήσεις. Μια τέτοια ερώτηση είναι, για παράδειγμα, η εξής: «Να βρεθούν όλοι οι πελάτες που έχουν λογαριασμό με ποσό μεγαλύτερο από

100.000». Για το χειρισμό των πινάκων και την απάντηση ερωτήσεων στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων χρησιμοποιούνται τελεστές χειρισμού σχέσεων. Σκοπός της υπο – ενότητας αυτής, δεν είναι η λεπτομερής παρουσίαση των τελεστών για το χειρισμό των δεδομένων. Ως παραδείγματα, θα αναφέρουμε τους τελεστές επιλογής, προβολής και σύνθεσης, δίχως να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αυστηρή διατύπωση αυτών και στους περιορισμούς που πρέπει να ισχύουν για την εφαρμογή τους.

Παράδειγμα 2.23

Ο τελεστής επιλογής συμβολίζεται σ, εφαρμόζεται σε μια σχέση Σ για την επιλογή ν–άδων που πληρούν ένα κριτήριο επιλογής κ.

Συμβολίζεται με $\boldsymbol{\sigma_\kappa(\Sigma)}$.

Για παράδειγμα, για την επιλογή των λογαριασμών με ποσό μεγαλύτερο των 100.000, θα πρέπει να εφαρμοστεί στη σχέση ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ η επιλογή

$\boldsymbol{\sigma_{(\text{ΠΟΣΟ}>100.000)}(\text{ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ})}$

Το αποτέλεσμα θα είναι μια νέα σχέση (πίνακας), έστω T, υποσύνολο της σχέσης ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ . Η νέα αυτή σχέση καθορίζεται στον πίνακα 2.7:

Πίνακας 2.7

Σχέση $T = \sigma_{(\text{ΠΟΣΟ}>100.000)}(\text{ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ})$.

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΠΟΣΟ
0987 – 7653543	500.000
0765 – 1234569	200.000

Παράδειγμα 2.24

τελεστής προβολής συμβολίζεται π, εφαρμόζεται σε μια σχέση Σ, για την επιλογή ιδιωμάτων της σχέσης αυτής.

Συμβολίζεται με $\boldsymbol{\pi_{A\iota1, A\iota2, \ldots, A\iota\kappa}(\Sigma)}$, όπου $\{A_{\iota1}, A_{\iota2}\ldots, A_{\iota\kappa}\}$ υποσύνολο των ιδιωμάτων της σχέσης Σ.

Για παράδειγμα, για την προβολή του ονοματεπώνυμου και του τηλεφώνου των πελατών, θα πρέπει να εφαρμοστεί στη σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ η προβολή

$\boldsymbol{\pi_{(\text{ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ})}(\text{ΠΕΛΑΤΗΣ})}$

το αποτέλεσμα της προβολής θα είναι η σχέση (πίνακας) που φαίνεται στον πίνακα 2.8, με ιδιώματα ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ:

Πίνακας 2.8

Σχέση P = π(ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ)(ΠΕΛΑΤΗΣ).

ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΤΗΛΕΦΩΝΟ
Μάρκος	Ελευθερίου	1234567
Νίκος	Μάρκου	2345677
Ελευθέριος	Μάρκου	9876543

Παράδειγμα 2.25

Ο τελεστής σύνθεσης συμβολίζεται τ, σε αντίθεση με τους τελεστές επιλογής και προβολής, συνδυάζει τα δεδομένα από δύο σχέσεις, Σ_1 και Σ_2. Ο συνδυασμός γίνεται βάσει μιας συνθήκης *κ*, μεταξύ ενός ιδιώματος της Σ_1 και ενός ιδιώματος της Σ_2.

$$\tau_\kappa(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2)$$

Ουσιαστικά ελέγχονται όλα τα δυνατά ζεύγη ν – άδων των δύο σχέσεων. Τα ζεύγη τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη συνδυάζονται και δημιουργούν μια νέα ν – άδα στο αποτέλεσμα της σύνθεσης.Για παράδειγμα, για την εύρεση των αριθμών λογαριασμών του κάθε πελάτη, θα πρέπει να γίνει σύνθεση των σχέσεων ΠΕΛΑΤΗΣ και ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ με συνθήκη ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ = ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ως εξής:

Πίνακας 2.9

Αποτέλεσμα σύνθεσης των σχέσεων ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ και ΠΕΛΑΤΗΣ ως προς το κοινό τους ιδίωμα.

$\tau_{\text{ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}$ **(ΠΕΛΑΤΗΣ·ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ)**

ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ	ΤΗΛΕΦΩΝΟ	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ
Μάρκος	Ελευθερίου	ΧΥ23456	1234567	ΧΥ23456	0987 – 7653543
Νίκος	Μάρκου	ΧΩ12345	2345677	ΧΩ12345	0765 – 1234569
Ελευθέριος	Μάρκου	ΓΗ56789	9876543	ΓΗ56789	0911 – 9876543

Οι παραπάνω τελεστές, όπως και όλοι οι τελεστές για το χειρισμό δεδομένων σε μια σχεσιακή βάση, μπορούν να συνδυαστούν σε σύνθετες εκφράσεις, όπως ακριβώς και οι αριθμητικοί τελεστές ή τα λογικά συνδετικά/τελεστές που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1.

Για παράδειγμα, για την εύρεση των ονοματεπώνυμων των πελατών και των αριθμών λογαριασμών τους, θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον τελεστή προβολής στη σχέση του πίνακα 2.9. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, η έκφραση η οποία ουσιαστικά προκύπτει είναι η εξής:

$\Pi_{\text{ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΑΡΙΘΜΟΣ}}($

$\tau_{\text{ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}$ **(ΠΕΛΑΤΗΣ·ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ)**

$)$

Το αποτέλεσμα εφαρμογής της παραπάνω έκφρασης στους πίνακες των σχέσεων ΠΕΛΑΤΗΣ και ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ θα είναι η σχέση του πίνακα 2.10:

Πίνακας 2.10

Το αποτέλεσμα προβολής του πίνακα 2.9.

ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΑΡΙΘΜΟΣ
Μάρκος	Ελευθερίου	0987 – 7653543
Νίκος	Μάρκου	0765 – 1234569
Ελευθέριος	Μάρκου	0911 – 9876543

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.4

Θεωρείστε τη σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ όπως ορίζεται παραπάνω και ορίστε τη σχέση ΔΑΝΕΙΟ με ιδιώματα ΑΡΙΘΜΟΣ και ΠΟΣΟ. Χρησιμοποιείστε 4 – 5 παραδειγματικές τιμές των ιδιωμάτων για τη σχέση αυτή. Ως κλειδί της σχέσης μπορείτε να θεωρήσετε το ιδίωμα ΑΡΙΘΜΟΣ. Ανάλογα επίσης με τη σχέση ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ παραπάνω, ορίστε τη σχέση ΔΑΝΕΙΟΠΛΗΠΤΗΣ που συσχετίζει πελάτες με δάνεια. Ιδιώματα της σχέσης αυτής θα είναι τα κλειδιά των ΠΕΛΑΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟ.

Εφόσον οι διμελείς σχέσεις ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ είναι σύνολα ζευγών, οι έννοιες της διαφοράς, τομής και ένωσης συνόλων μπορούν να εφαρμοστούν στις σχέσεις αυτές. Να δώσετε τη φυσική ερμηνεία των σχέσεων (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ – ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ), (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ $\cup$ ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ), (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ $\cap$ ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ).

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.5

Δεδομένων των σχέσεων ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ της άσκησης αυτοαξιολόγησης 2.4και με τη χρήση των τελεστών χειρισμού δεδομένων που ορίσθηκαν παραπάνω, να δοθεί η έκφραση της ερώτησης

«Ποιοι πελάτες έχουν δάνειο μεγαλύτερο των 50.000 και κατάθεση μικρότερη των 10.000».

(Υπόδειξη: Σταδιακά ξεκινήστε από τον υπολογισμό των δανείων και των λογαριασμών που μας ενδιαφέρουν, συνδυάστε αυτά με τους αντίστοιχους πελάτες και βρείτε τους αριθμούς λογαριασμών των πελατών που μας ενδιαφέρουν)

Δραστηριότητα 2.6

Έστω η σχέση ΦΟΙΤΗΤΕΣ με ιδιώματα ΟΝΟΜΑ, ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ και κλειδί ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ, η σχέση ΜΑΘΗΜΑΤΑ με ιδιώματα ΤΙΤΛΟΣ, ΒΑΘΜΟΣ με κλειδί ΤΙΤΛΟΣ και η μεταξύ τους σχέση ΕΞΕΤΑΣΗ. Με παραδειγματικές τιμές να δημιουργηθούν οι πίνακες των παραπάνω σχέσεων και να διατυπώσετε ερωτήσεις επί των δεδομένων, χρησιμοποιώντας όλους τους τελεστές χειρισμού δεδομένων (και συνδυασμούς αυτών) που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Υπόδειξη

Διατυπώστε ερωτήσεις που εμπλέκουν έναν ή περισσότερους τελεστές από αυτούς που αναφέρθηκαν, σε φυσικό λόγο, π.χ. «Να βρεθούν τα μητρώα των φοιτητών που κατά την εξέταση ενός μαθήματος πήραν βαθμό μεγαλύτερο του 8» και «να βρεθούν τα ονόματα των παραπάνω φοιτητών».

Σύνοψη Ενότητας

Όπως αναφέρθηκε και στους στόχους της ενότητας, η παρούσα ενότητα αναφέρεται σε ν–μελείς σχέσεις, παρουσιάζει το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και παραδείγματα τελεστών για το χειρισμό των δεδομένων σε μια σχεσιακή βάση δεδομένων.

Συγκεκριμένα, γίνεται κατ'αρχάς μια εισαγωγή στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και ορίζονται τελεστές χειρισμού δεδομένων: τελεστής επιλογής, τελεστής προβολής και τελεστής σύνθεσης.

2.3 Σχέσεις μερικής διαταξης, ολικής διάταξης και ισοδυναμίας

Σκοπός

Η ενότητα 2.3 αναφέρεται σε σχέσεις μερικής και ολικής διάταξης επί ενός συνόλου Χ και στις σχέσεις ισοδυναμίας.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η τρέχουσα ενότητα θα σας βοηθήσει να χειρίζεστε έννοιες όπως:

- *σχέση μερικής διάταξης επί συνόλου,*
- *σχέση ολικής διάταξης επί συνόλου,*
- *σχέση ισοδυναμίας.*

Έννοιες κλειδιά

- *διαμέριση συνόλου*
- *σχέση μερικής διάταξης*
- *σχέση ολικής διάταξης*
- *σχέση ισοδυναμίας*
- *κλάσεις ισοδυναμίας*

2.3.1 Σχέσεις μερικής και ολικής διάταξης

Μια σχέση επί ενός συνόλου X μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταξινόμηση των στοιχείων του X.

Παράδειγμα 2.26

Θεωρείστε τη σχέση Σ = «$\subseteq$ » επί του συνόλου ρ των υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, 4\}$:

$(\chi, \psi) \in \Sigma$ αν $\chi \subseteq \psi$

Η Σ είναι μια σχέση ταξινόμησης στο P. Για παράδειγμα, το $\{1, 2\}$ θεωρείται «μικρότερο» του $\{1, 2, 4\}$, εφόσον $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 4\}$. Παρατηρήστε ότι σε μια τέτοια σχέση υπάρχουν στοιχεία που δεν σχετίζονται μεταξύ τους, επειδή αυτά δεν μπορούν να συγκριθούν. Τέτοια στοιχεία είναι για παράδειγμα τα $\{1, 2\}$ και $\{3, 4\}$, εφόσον δεν ισχύει ότι $\{1, 2\} \subseteq \{3.4\}$ ούτε και ότι $\{3, 4\} \subseteq \{1, 2\}$. Μια τέτοια σχέση καλείται σχέση μερικής διάταξης.

Ορισμός 2.9: Μια σχέση Σ επί συνόλου X καλείται **σχέση μερικής διάταξης (partial order relation)**, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Το σύνολο X με τη σχέση μερικής διάταξης Σ καλείται μερικώς διατεταγμένο σύνολο και συμβολίζεται (X, Σ).

Συχνά τέτοιες σχέσεις διάταξης τις συμβολίζουμε ως « $\leq$ », δηλαδή συμβολίζουμε με $\chi \leq \psi$ την περίπτωση όπου $(\chi, \psi) \in \Sigma$. Στην περίπτωση αυτή, το μερικώς διατεταγμένο σύνολο X συμβολίζεται ως $(X, \leq)$.

Παράδειγμα 2.27

Η σχέση Σ επί του συνόλου των θετικών ακεραίων

$(\chi, \psi) \in \Sigma$, αν το χ διαιρεί το ψ,

είναι σχέση μερικής διάταξης, εφόσον είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Για παράδειγμα, αν ο χ διαιρεί τον ψ, τότε ο ψ δεν διαιρεί τον χ, παρά μόνο αν $\chi = \psi$. Συνεπώς, η σχέση Σ είναι αντισυμμετρική. Επίσης, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι που δεν σχετίζονται, όπως για παράδειγμα το 5 και το 6.

Παράδειγμα 2.28

Η σχέση Σ επί του συνόλου των θετικών ακεραίων

$(\chi, \psi) \in \Sigma$, αν το $\chi \leq \psi$,

είναι σχέση μερικής διάταξης, για την οποία ισχύει το εξής: Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων χ, ψ, οι αριθμοί αυτοί είναι συγκρίσιμοι. Μια τέτοια σχέση καλείται σχέση ολικής διάταξης και το ζεύγος (X, Σ) καλείται ολικώς διατεταγμένο ζεύγος.

Ορισμός 2.10: Μια σχέση Σ επί συνόλου X καλείται **σχέση ολικής διάταξης (total order relation)**, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική, και κάθε δύο στοιχεία του X συγκρίνονται μέσω της Σ. Το σύνολο X με τη διάταξη Σ, (X, Σ) καλείται ολικώς διατεταγμένο σύνολο, αν η Σ είναι σχέση ολικής διάταξης στο X.

Παράδειγμα 2.29

Θεωρείστε το σύνολο E των ενεργειών που μπορείτε να κάνετε για την αγορά φρούτων και γάλατος από ένα σούπερ – μάρκετ.

1. Εισέρχεστε στο κατάστημα
2. Παίρνετε τα φρούτα
3. Παίρνετε το γάλα
4. Πληρώνετε στο ταμείο
5. Εξέρχεστε από το κατάστημα.

Επί του συνόλου E ορίζεται η σχέση Σ ως εξής:

$\chi\Sigma\psi$, αν η ενέργεια χ πρέπει να εκτελεστεί πριν την ενέργεια ψ.

Προφανώς το σύνολο E είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο, αν στη σχέση Σ προσθέσουμε τα ζεύγη (χ, χ), όπου $\chi \in$ Ε.

Παρατηρήστε ότι, ενώ στο σύνολο E υπάρχουν ενέργειες που πρέπει να γίνουν πριν από άλλες, υπάρχουν και ενέργειες, όπως οι 2 και 3, που μπορούν να γίνουν με οποιαδήποτε σειρά. Το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού ενεργειών απαιτεί την εύρεση μιας ολικής διάταξης στο σύνολο E, με σεβασμό στη μερική διάταξη Σ.

Δηλαδή, ζητούμε μια ολική διάταξη ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, τέτοια ώστε αν $\varepsilon_\kappa\Sigma\varepsilon_\lambda$, τότε το ε_κ βρίσκεται πριν το ε_λ στη διάταξη αυτή.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.6

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω σχέσεις

1. Ο χ είναι αδερφός του ψ επί του συνόλου π των προσώπων
2. Ο χ και ο ψ έχουν τους ίδιους γονείς επί του συνόλου π των προσώπων
3. Ο χ συμπαθεί τον ψ επί του συνόλου π των προσώπων
4. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των χ και ψ είναι ο 1 επί του συνόλου των θετικών ακεραίων.

είναι σχέσεις μερικής διάταξης ή όχι. Αν όχι, αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας με αντιπαραδείγματα. Αν ναι, εξηγήστε με λεπτομέρεια.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.7

Έστω ότι η σχέση Σ_i είναι σχέση μερικής διάταξης στο X_i, $i = 1, 2$. Να δειχτεί ότι η σχέση Σ στο $X_1 \times X_2$, όπως αυτή ορίζεται παρακάτω, είναι σχέση μερικής διάταξης.

$((x_1, x_2)\Sigma(x'_1, x'_2))$ αν $(x_1\Sigma_1x'_1)$ και $(x_2\Sigma_2x'_2)$

Δραστηριότητα 2.7

Έστω $Σ$ διμελής σχέση επί του συνόλου των θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $xΣy$, αν το $(x – y)$ είναι περιττός θετικός ακέραιος . Είναι σχέση μερικής διάταξης;

Κάνετε το ίδιο και για τις σχέσεις (α) «3 διαιρεί το $x – y$», (β) $x = y^2$, (γ) $x = y$ (επί του συνόλου των θετικών ακεραίων).

Υπόδειξη.

Ελέγξτε αν η κάθε σχέση από τις παραπάνω πληροί τον ορισμό της μερικής διάταξης επί του συνόλου των θετικών ακεραίων.

2.3.2 Σχέσεις ισοδυναμίας

Έστω X το σύνολο των φοιτητών ενός πανεπιστημιακού τμήματος. Κάθε φοιτητής βρίσκεται στο 1ο, 2ο, 3ο, στο 4ο ή στο 5ο έτος σπουδών. Αν διαμερίσουμε το σύνολο των φοιτητών σε πέντε σύνολα A, B, $Γ$, $Δ$, E σε αντιστοιχία με τα έτη σπουδών τους, τότε η συλλογή συνόλων φοιτητών $\{A, B, Γ, Δ, E\}$ είναι μια διαμέριση του X.

Ορισμός 2.11: Διαμέριση (partition): ενός συνόλου X καλείται μια συλλογή $\mathcal{L}$ μη κενών υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε από την ένωση των συνόλων του $\mathcal{L}$ προκύπτει το X και ανά δύο τα σύνολα στο $\mathcal{L}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Δεδομένης μιας διαμέρισης $\mathcal{L}$ του X, κάθε στοιχείο του X ανήκει ακριβώς σε ένα σύνολο της $\mathcal{L}$.

Δεδομένης μιας διαμέρισης $\mathcal{L}$ ενός συνόλου X, μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση $Σ$ επί του συνόλου X ως εξής:

$χΣψ$ αν υπάρχει σύνολο A στην $\mathcal{L}$ τέτοιο ώστε και τα δύο στοιχεία $χ$, $ψ$ να ανήκουν στο A.

Για παράδειγμα, με βάση την παραπάνω διαμέριση $\{A, B, Γ, Δ, E\}$, δύο φοιτητές σχετίζονται με μια τέτοια σχέση $Σ$, αν αυτοί βρίσκονται στο ίδιο έτος σπουδών. Υπό το πρίσμα λοιπόν της σχέσης $Σ$, δύο φοιτητές θεωρούνται «ισοδύναμοι», αν βρίσκονται στο ίδιο έτος σπουδών.

Ορισμός 2.12: Σχέση επί συνόλου X καλείται **σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation),** αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Θεώρημα 2.1

Έστω $\mathcal{L}$ διαμέριση ενός συνόλου X. Ορίζουμε σχέση Σ επί του X ως εξής: $\chi\Sigma\psi$, αν υπάρχει σύνολο A στην $\mathcal{L}$ που να περιέχει και τα δύο στοιχεία χ και ψ. Η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X.

Απόδειξη

Για να δείξετε ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, θα πρέπει να δείξετε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση.

Έστω χ στο X. Από τον ορισμό της διαμέρισης, υπάρχει ένα και μοναδικό A στην $\mathcal{L}$ που περιέχει το χ. Συνεπώς $\chi\Sigma\chi$, για κάθε χ στο X. Άρα η Σ είναι ανακλαστική σχέση.

Αν $\chi\Sigma\psi$, τότε από τον ορισμό της Σ, υπάρχει A στην $\mathcal{L}$ που να περιέχει τα στοιχεία χ και ψ. Συνεπώς, $\psi\Sigma\chi$. Δηλαδή, η Σ είναι σχέση συμμετρική.

Έστω $\chi\Sigma\psi$ και $\psi\Sigma\varphi$. Τότε, από τον ορισμό της Σ, υπάρχουν A_1 και A_2 στην $\mathcal{L}$ που περιέχουν τα χ, ψ και ψ, φ αντιστοίχως. Από τον ορισμό της διαμέρισης, το ψ θα πρέπει να ανήκει ακριβώς σε ένα στοιχείο της $\mathcal{L}$. Επομένως, $A_1 = A_2$. Δηλαδή τα στοιχεία χ, ψ, φ ανήκουν στο ίδιο σύνολο $A = A_1 = A_2$. Συνεπώς, $\chi\Sigma\varphi$. Άρα, η σχέση Σ είναι μεταβατική.

Από τα παραπάνω, μπορείτε να συνάγετε ότι η σχέση Σ, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Αντίθετα, δεδομένης μιας σχέσης ισοδυναμίας στο X, μπορούμε να ορίσουμε μια διαμέριση του X ομαδοποιώντας τα στοιχεία που σχετίζονται μεταξύ τους. Αυτό αποδεικνύεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2

Εστω Σ σχέση ισοδυναμίας επί του X. Για κάθε χ στο X ορίσατε το σύνολο $[\chi] = \{\varphi \in X \mid \chi\Sigma\varphi\}$. Να δειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{L} = \{[\chi] \mid \chi \in X\}$ αποτελεί διαμέριση του συνόλου X.

Απόδειξη

Για την απόδειξη του παραπάνω θα πρέπει να δείξετε ότι (α) για κάθε α στο X υπάρχει $[\chi]$ τέτοιο ώστε $\alpha \in [\chi]$ και (β) αν $[\chi] \cap [\varphi] \neq \varnothing$ τότε $[\chi] = [\varphi]$.

Όσον αφορά στο (α), εφόσον η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, για κάθε α στο X ισχύει ότι $\alpha\Sigma\alpha$. Συνεπώς, $\alpha \in [\alpha]$.

Αν χ, φ στοιχεία του X με $[\chi] \cap [\varphi] \neq \varnothing$ και $\alpha \in [\chi] \cap [\varphi]$, τότε $\chi\Sigma\alpha$ και $\alpha\Sigma\varphi$. Εφόσον η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, είναι μεταβατική σχέση. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, ισχύει ότι $\chi\Sigma\varphi$. Δηλαδή, $\chi \in [\varphi]$, και συνεπώς (ως δραστηριότητα, να αποδείξετε τη συνεπαγωγή αυτή), $[\chi]\subseteq [\varphi]$. Με παρόμοιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι $[\varphi]\subseteq [\chi]$. Συνεπώς, $[\chi] = [\varphi]$.

Ορισμός 2.13: Κάθε σύνολο $[\chi]$ καλείται κλάση ισοδυναμίας (equivalence class containing x) της Σ, και το στοιχείο χ καλείται αντιπρόσωπος της κλάσης $[\chi]$.

Δραστηριότητα 2.8

Εστω Σ σχέση ισοδυναμίας επί του X. Για κάθε χ στο X ορίσατε το σύνολο $[\chi] = \{\varphi \in X \mid \chi\Sigma\varphi\}$. Να δειχθεί ότι αν $\chi \in [\varphi]$, τότε $[\chi]\subseteq [\varphi]$.

Υπόδειξη

Χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες που έχει μια σχέση ισοδυναμίας για να δείξετε ότι κάθε στοιχείο του $[\chi]$ (επομένως το φ και το χ) ανήκουν στο $[\varphi]$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.8

Έστω ένας οδικός χάρτης. Ορίζουμε επί ενός συνόλου σημείων Σ του χάρτη τη σχέση P = «υπάρχει δρόμος που τις ενώνει». Να δειχθεί ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου Σ.

Υπόδειξη

Θεωρείστε ότι κάθε σημείο ενώνεται με τον εαυτό του.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.9

Έστω Σ_1 και Σ_2 σχέσεις ισοδυναμίας επί συνόλου X.

1. Να δειχθεί ότι η σχέση $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X
2. Να περιγραφούν οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ σε σχέση με τις σχέσεις ισοδυναμίας των Σ_1 και Σ_2.

Δραστηριότητα 2.9

Έστω π το σύνολο των πόλεων της Ελλάδας. Δύο πόλεις x και y σχετίζονται μέσω σχέσης Σ, αν και οι δύο ανήκουν στον ίδιο νομό. Να δειχθεί ότι η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας. Να δείξετε ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας σε αυτήν την περίπτωση.

Υπόδειξη

Δείξτε ότι η σχέση « η πόλη x βρίσκεται στον ίδιο νομό με την πόλη y» ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού της σχέσης ισοδυναμίας.

Δραστηριότητα 2.10

Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.Ορίζουμε τη σχέση Σ επί του $X \times X$ τέτοια ώστε $(\alpha, \beta)\ \Sigma\ (\gamma, \delta)$ αν $(\alpha \cdot \delta) = (\beta \cdot \gamma)$.

(α) Να δειχθεί ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $X \times X$

(β) Να δοθεί ένα μέλος από κάθε κλάση ισοδυναμίας της Σ

Υπόδειξη

Χρησιμοποιείστε τη σχέση $(\alpha/\beta) = (\gamma/\delta)$.

Σύνοψη Ενότητας

Η ενότητα αυτή παρουσίασε σχέσεις ειδικού ενδιαφέροντος, όπως είναι οι σχέσεις μερικής διάταξης, οι σχέσεις ολικής διάταξης και σχέσεις ισοδυναμίας επί συνόλου X.

Η ενότητα δείχνει τη σχέση μεταξύ διαμέρισης συνόλου X και σχέσης ισοδυναμίας επί του X.

2.4 Συναρτήσεις

Σκοπός

Στην τρέχουσα ενότητα ορίζεται η έννοια της συνάρτησης. Ορίζονται ιδιότητες των συναρτήσεων, η αντίστροφη συνάρτησης και η σύνθεση συναρτήσεων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η τρέχουσα ενότητα σας βοηθά να

- *χειρίζεστε την έννοια της συνάρτησης,*
- *έχετε τη δυνατότητα χαρακτηρισμού συναρτήσεων με βάση τις ιδιότητές τους.*

Έννοιες κλειδιά

- *συνάρτηση*
- *συνάρτηση ένα – προς – ένα*
- *συνάρτηση «επί» συνόλου*
- *αντίστροφη συνάρτησης*
- *σύνθεση συναρτήσεων*

Μια συνάρτηση είναι μια ιδιαίτερου τύπου σχέση από σύνολο X σε σύνολο Y:

Ορισμός 2.14: **Συνάρτηση (function)** f από σύνολο X σε σύνολο Y, συμβολίζεται και ως f:$X \to Y$, είναι μια σχέση από το X στο Y με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο X
2. Αν $(\chi, \psi) \in f$ και $(\chi, \psi') \in f$, τότε $\psi = \psi'$.

Παράδειγμα 2.30

Η σχέση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$ από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι μια συνάρτηση από το X στο Y, εφόσον το πεδίο ορισμού της f είναι το X και για κάθε χ στο X υπάρχει ένα και μοναδικό ψ με $(\chi, \psi) \in f$. Το πεδίων τιμών της f είναι το {α, β}.

Παράδειγμα 2.31

Η σχέση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$ από το $X = \{1, 2, 3, 4\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν είναι συνάρτηση από το X στο Y, αφού το πεδίο ορισμού της είναι το $\{1, 2, 3\}$, που είναι υποσύνολο του X.

Παράδειγμα 2.32

Επίσης, η σχέση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (1, \gamma)\}$, από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν είναι συνάρτηση, διότι $(1, \alpha)$ και $(1, \gamma)$ είναι στοιχεία της f, με $\alpha \neq \gamma$.

Δεδομένης μιας συνάρτησης f από το X στο Y, για κάθε στοιχείο χ του X υπάρχει ακριβώς ένα ψ στο Y με $(\chi, \psi) \in f$. Το συγκεκριμένο ψ συμβολίζεται και ως $f(\chi)$, δηλαδή $\psi = f(\chi)$.

> **Ορισμός 2.15:** Μια συνάρτηση f από το X στο Y καλείται **ένα–πρός–ένα** (one – to – one) (συμβολίζεται και ως $1 - 1$), αν για κάθε ψ στο Y υπάρχει το πολύ ένα χ στο X τέτοιο ώστε $f(\chi) = \psi$.

Η συνθήκη του παραπάνω ορισμού είναι ισοδύναμη με την πρόταση: Αν $f(\chi) = f(\chi')$, τότε $\chi = \chi'$.

Παράδειγμα 2.33

Η συνάρτηση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$ από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι $1 - 1$.

Αντίθετα, η συνάρτηση $f = \{(2, \beta), (3, \alpha), (1, \beta)\}$ από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν είναι $1 - 1$, διότι $f(1) = f(2) = \beta$, αλλά $1 \neq 2$.

> **Ορισμός 2.16:** Μια συνάρτηση f από το X στο Y καλείται **επί (onto)** του Y, αν το πεδίο τιμών της είναι το Y.

Παράδειγμα 2.34

Η συνάρτηση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$ από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν είναι επί του Y, εφόσον το πεδίο τιμών της είναι το $\{\alpha, \beta\}$.

Αντίθετα, η συνάρτηση $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma)\}$ από το $X = \{1, 2, 3\}$ στο $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, είναι επί του Y. Παρατηρήστε ότι είναι και $1 - 1$.

> **Ορισμός 2.17:** Αν μια συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι $1 - 1$ και επί, τότε η αντίστροφη σχέση f^{-1} είναι επίσης συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή καλείται **αντίστροφη συνάρτηση (inverse)** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Θεωρώντας τις συναρτήσεις ως σχέσεις, μπορούμε να συνθέσουμε δύο συναρτήσεις f, g. Συγκεκριμένα, αν f είναι συνάρτηση από το Y στο Z και g είναι συνάρτηση από το X στο Y, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι συνάρτηση από το X στο Z. Πράγματι, αν χ στοιχείο του X, τότε το μοναδικό στοιχείο $\psi = g(\chi)$ ανήκει στο σύνολο Y. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση f στο ψ, το αποτέλεσμα είναι το μοναδικό στοιχείο $\varphi = f(\psi) = f(g(x))$ του συνόλου Z.

Παράδειγμα 2.35

Ορίζουμε τη συνάρτηση g:$X \rightarrow Y$, όπου $X = \{1, 2, 3\}$ και Y το σύνολο των θετικών ακεραίων ως εξής: $g(\chi) = \chi^2$, και τη συνάρτηση f από το Y στο Z, όπου Z υποσύνολο του συνόλου των ακεραίων ως εξής: $f(\psi) = \psi - 4$.

Από τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων f και g, προκύπτει η συνάρτηση $(f \circ g)$: Χ$\rightarrow Z$, όπου $(f \circ g)(\chi) = \chi^2 - 4$.

Σύνοψη Ενότητας

Η παρούσα ενότητα αναφέρεται στην έννοια της συνάρτησης ως ειδικού τύπου διμελούς σχέσης. Ορίζονται συνθήκες που ικανοποιούν συναρτήσεις ειδικού τύπου, όπως οι συναρτήσεις ένα–προς–ένα και οι συναρτήσεις «επί» συνόλου, ενώ ορίζεται η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και της σύνθεσης συναρτήσεων.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.10

Έστω ότι η f συνάρτηση από το σύνολο $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ στο X ορίζεται ως εξής:

$f(x) = ((4 \cdot x) \bmod 5)$

Να καθοριστεί η f ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Είναι η f 1 – 1 και επί;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.11

Έστω f συνάρτηση από το X στο Y και Σ σχέση επί του X που ορίζεται ως εξής:

$x \Sigma y$ αν $f(x) = f(y)$

Να δειχθεί ότι η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.12

Έστω f συνάρτηση από το X στο Y. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε συνάρτηση g $1 - 1$ από σύνολο A στο X η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι $1 - 1$.

Δραστηριότητα 2.11

Αν f συνάρτηση $1 - 1$ και επί από σύνολο X σε σύνολο Y, τότε να δείξετε ότι και η συνάρτηση $\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ είναι $1 - 1$ και επί από το Y στο X

***Υπόδειξη*:**

Αρχικά δείξτε ότι και η νέα σχέση (έστω g) είναι συνάρτηση.

Για να δείξετε ότι είναι $1 - 1$, θεωρείστε y_1 και y_2 τέτοια ώστε $g(y_1) = g(y_2) = x$. Τότε (y_1, x) και (y_2, x) ανήκουν στην g. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι συνάρτηση, μπορείτε να δείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

Για να δείξετε ότι η g είναι επί, θεωρείστε ένα στοιχείο x του X. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι συνάρτηση, δείξτε ότι υπάρχει y στο Y, τέτοιο ώστε $g(y) = x$.

Σύνοψη κεφαλαίου

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τη θεμελιώδη μαθηματική έννοια της σχέσης. Στην ενότητα 2.1 ορίστηκε η έννοια της ν–μελούς σχέσης με ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια της διμελούς σχέσης από σύνολο Χ σε σύνολο Υ. Για διμελή σχέση Σ ορίσθηκε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της σχέσης. Καθορίστηκαν οι συνθήκες που θα πρέπει να ισχύουν για να είναι μια σχέση ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική ή μεταβατική, ενώ ορίσθηκε η έννοια της αντίστροφης σχέσης και η σύνθεση σχέσεων. Τέλος, δόθηκε έμφαση στους τρόπους περιγραφής των σχέσεων με τη χρήση των κατευθυνόμενων γραφημάτων και πινάκων.

Η ενότητα 2.2 αναφέρεται σε ν–μελείς σχέσεις, παρουσιάζει το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και παραδείγματα τελεστών για το χειρισμό των δεδομένων σε μια σχεσιακή βάση δεδομένων. Η ενότητα αυτή παρουσιάζει το σχεσιακό μοντέλο ως «δείγμα» εφαρμογής της έννοιας της ν–μελούς σχέσης σε ευρέως διαδεδομένο μοντέλο διαχείρισης δεδομένων. Στην ενότητα 2.2 γίνεται μια κατ΄αρχάς εισαγωγή στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και ορίζονται τελεστές χειρισμού δεδομένων: τελεστής επιλογής, τελεστής προβολής και τελεστής σύνθεσης.

Στην ενότητα 2.3 ορίζονται οι σχέσεις μερικής διάταξης, οι σχέσεις ολικής διάταξης και σχέσεις ισοδυναμίας επί συνόλου Χ. Η ενότητα δείχνει τη σχέση μεταξύ της διαμέρισης συνόλου Χ και σχέσης ισοδυναμίας επί του Χ.

Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ενότητα 2.4 που πραγματεύεται την έννοια της συνάρτησης. Ορίζονται συνθήκες που ικανοποιούν συναρτήσεις ειδικού τύπου, όπως οι συναρτήσεις ένα–προς–ένα και οι συναρτήσεις «επί» συνόλου, ενώ ορίζεται η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και της σύνθεσης συναρτήσεων.

Βιβλιογραφία

Τα περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών αναφέρονται στα θέματα αυτού του κεφαλαίου.

[1] Halmos P.R., «Naïve Set Theory», Springer – Verlag, New York, 1974.

[2] Silberschatz A., Korth H.F., Sudarchan S., «Database System Concepts», McGraw – Hill International Editions, Computer Science Series, 3rd Edition, 1997.

[3] Liu C. L., «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών», Απόδοση στα Ελληνικά *Κ*.Μπούς, Δ.Γραμμένος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

Προαιρετική βιβλιογραφία

[1] Gallier, J.H., «Logic for Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving», John Wiley & Sons, 1987

[2] Date C. J., «An Introduction to Database Systems», 4th Edition Vol.1, Addison Wesley, Reading, Mass., 186.

[3] Elmasri R., Navathe S.B., «Θεμελιώδεις Αρχές Συστημάτων Βάσεων Δεδομένων», Τόμος Α’, Μετάφραση Επιμέλεια Μ. Χατζόπουλος, Δίαυλος, 1996.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλγόριθμοι

Σκοπός

Ένας αλγόριθμος περιγράφει με ακρίβεια τα βήματα μιας μεθόδου για την επίλυση μιας κλάσης προβλημάτων και τον υπολογισμό δεδομένων. Οι αλγόριθμοι παίζουν ιδιαίτερα σπουδαίο ρόλο τόσο στην επιστήμη των υπολογιστών, όσο και στα μαθηματικά. Όλοι μας γνωρίζουμε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο μη αρνητικών ακεραίων που και οι δύο δεν είναι ίσοι με μηδέν.

Ο όρος «αλγόριθμος» προέρχεται από το όνομα του Άραβα μαθηματικού Al – Khowarizmi, που έζησε τον 9ο αιώνα.

Το κεφάλαιο αυτό, στην πρώτη ενότητα περιγράφει την έννοια του αλγορίθμου και τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε στο τρέχον, αλλά κυρίως στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου για τη διατύπωση αλγορίθμων. Τέλος, στη δεύτερη ενότητα περιγράφεται η έννοια του αναδρομικού αλγόριθμου.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Έχοντας μελετήσει το κεφάλαιο αυτό, θα έχετε:

- *Εξοικειωθεί με την έννοια του αλγορίθμου, σε αντιπαράθεση με την απλή παράθεση βημάτων με στόχο την παραγωγή κάποιου αποτελέσματος,*
- *Γνωρίσει την έννοια και τον τρόπο λειτουργίας αναδρομικών αλγορίθμων,*
- *Αποκτήσει την ικανότητα να διατυπώνετε αλγόριθμους, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που θα εισάγουμε.*

Έννοιες κλειδιά

- *αλγόριθμος*
- *ψευδοκώδικας*
- *Ευκλείδιος αλγόριθμος*
- *αναδρομικός αλγόριθμος*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η μελέτη και η κατανόηση των εννοιών του παρόντος κεφαλαίου θα σας βοηθήσει αφενός μεν να «παρακολουθήσετε» αλγόριθμους που διατυπώνονται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου, αλλά κυρίως να διατυπώσετε αλγόριθμους για την επίλυση προβλημάτων. Τέτοιοι αλγόριθμοι θα σας ζητηθούν σε δραστηριότητες και ασκήσεις αυτοαξιολόγησης των επόμενων κεφαλαίων.

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία, ορισμός και Συμβολισμοί για τη διατύπωση αλγορίθμων

Σκοπός

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η έννοια του αλγορίθμου σε αντιπαράθεση με την απλή παράθεση βημάτων εκτέλεσης μιας εργασίας. Επειδή η σαφήνεια διατύπωσης των αλγορίθμων είναι κρίσιμη, η παρούσα ενότητα εισάγει συμβολισμούς και εντολές για τη συγγραφή ψευδοκώδικα. Οι συμβολισμοί αυτοί χρησιμοποιούνται στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου για τη διατύπωση αλγορίθμων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η ενότητα αυτή σας παρέχει τα βασικά στοιχεία που θα σας επιτρέψουν να:

- *εξοικειωθείτε με την έννοια του αλγορίθμου, σε αντιπαράθεση με την απλή παράθεση βημάτων με στόχο την παραγωγή κάποιου αποτελέσματος,*
- *αποκτήσετε την ικανότητα να διατυπώνετε αλγορίθμους σε φυσικό λόγο,*
- *διατυπώνετε αλγορίθμους με χρήση του συμβολισμού που εισάγουμε.*

Έννοιες κλειδιά

- *αλγόριθμος*
- *ψευδοκώδικας*
- *Ευκλείδιος αλγόριθμος*

Ένας αλγόριθμος είναι ένα πεπερασμένο σύνολο βημάτων (εντολών) με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- *Ακρίβεια*: Τα βήματα πρέπει να περιγράφονται με ακρίβεια ώστε να μην υπάρχει ασάφεια κατά την εκτέλεσή τους
- *Μοναδικότητα*: Τα ενδιάμεσα αποτελέσματα κάθε βήματος πρέπει να καθορίζονται με μοναδικό τρόπο και εξαρτώνται μόνο από τα δεδομένα εισόδου και τα αποτελέσματα των προηγούμενων (ήδη εκτελεσμένων) βημάτων.
- *Πεπερασμένος αριθμός βημάτων*: Ο αλγόριθμος πρέπει να τερματίζεται μετά από την εκτέλεση πεπερασμένων βημάτων.
- *Είσοδος*: Ο αλγόριθμος δέχεται δεδομένα εισόδου (χαρακτηρίζονται ως είσοδος του αλγορίθμου).

- *Γενικότητα:* Ένας αλγόριθμος λειτουργεί δεχόμενος συγκεκριμένη κλάση δεδομένων εισόδου με συγκεκριμένες προδιαγραφές και όχι για συγκεκριμένα δεδομένα εισόδου.
- *Έξοδος*: Ο αλγόριθμος κατά την έξοδό του παράγει δεδομένα που χαρακτηρίζονται ως έξοδος του αλγορίθμου.

Παράδειγμα 3.1

Αν θεωρήσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο, ο οποίος βρίσκει το μικρότερο αριθμό σε μια τριάδα αριθμών α, β, γ:

Αλγόριθμος 3.1: Εύρεση μικρότερου αριθμού σε τριάδα αριθμών

Είσοδος: Τρεις αριθμοί α, β, γ

Έξοδος: Ο μικρότερος αριθμός x από τους α, β, γ

```
1. x:=α
2. if x>β then x:=β
3. if x>γ then x:=γ
4. return(x)
```

Αρχικά, στο βήμα 1, χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή «x», ο αλγόριθμος αναθέτει στη «x» την τιμή της μεταβλητής εισόδου «α». Στο βήμα 2, συγκρίνει την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής «x» με την τιμή της μεταβλητής εισόδου «β» και, αν η τιμή της «β» είναι μικρότερη από την τρέχουσα τιμή της «x», αναθέτει την τιμή της «β» στην «x». Σε αντίθετη περίπτωση, η τιμή της «x» παραμένει ως έχει. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αλγόριθμος προχωράει στο βήμα 3, όπου επαναλαμβάνει τον παραπάνω έλεγχο μεταξύ της «x» και της μεταβλητής εισόδου γ. Στο βήμα 4, ο αλγόριθμος επιστρέφει το αποτέλεσμα ως τιμή της μεταβλητής «x».

Δεδομένης συγκεκριμένης τριάδας $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, τα βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου θα είναι ως εξής: Στο βήμα (1) $x = 5$. Η συνθήκη του βήματος (2) ισχύει ($5 > 4$) και επομένως η τιμή της «x» αλλάζει σε 4. Με παρόμοιο τρόπο, η συνθήκη του βήματος (3) ισχύει και η μεταβλητή «x» παίρνει την τιμή 2. Τελικά, ο αλγόριθμος επιστρέφει στη μεταβλητή εξόδου την τιμή 2.

Εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η παραπάνω μέθοδος πληροί τα χαρακτηριστικά ενός αλγόριθμου. Για παράδειγμα, κάθε βήμα είναι σαφώς διατυπωμένο. Ο αλγόριθμος τερματίζει πάντοτε, μετά από τρία ακριβώς βήματα και για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών.

Για τη σαφή διατύπωση των αλγορίθμων, αν και ο φυσικός λόγος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σαφήνεια, χρησιμοποιούμε ψευδοκώδικα. Με την έννοια «ψευδοκώδικα» εννοούμε μια γλώσσα που είναι παρόμοια με τις γνωστές μας γλώσσες προγραμματισμού όπως PASCAL ή C, δίχως όμως το εκτεταμένο λεξικό και τη λεπτομερή σύνταξη μιας γλώσσας προγραμματισμού και με αρκετή ελευθερία για τη μη αυστηρή διατύπωση ορισμένων πολύπλοκων διεργασιών, που η λεπτομέρειά τους δεν έχει ιδιαίτερη σημασία για έναν αλγόριθμο (π.χ. «ταξινόμησε τη λίστα στοιχείων x_1, x_2, … σε αύξουσα σειρά»). Επίσης, η διατύπωση αλγορίθμων με ψευδοκώδικα δεν απαιτεί το σαφή και αυστηρό ορισμό των δομών που απαιτούνται για την παράσταση των δεδομένων τα οποία επεξεργάζεται/παράγει ο αλγόριθμος.

Οι εντολές που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για τη συγγραφή αλγορίθμων σε ψευδοκώδικα είναι οι εξής (με έντονα γράμματα επισημαίνονται οι δεσμευμένες λέξεις, δηλαδή οι λέξεις που έχουν ιδιαίτερη σημασία για την ερμηνεία του αλγορίθμου και δεν μπορούν να χρησιμοποιούνται από τον προγραμματιστή ελεύθερα):

- **Procedure** *όνομα–διαδικασίας* (*λίστα ορισμάτων της διαδικασίας*)

  Η λίστα ορισμάτων περιγράφει τις μεταβλητές και σταθερές που αποτελούν τα δεδομένα εισόδου. Αυτή ακολουθεί το όνομα της διαδικασίας. Οι μεταβλητές και σταθερές εξόδου και εισόδου περιγράφονται με λεπτομέρεια στην αντίστοιχη περιγραφή (Είσοδος/Έξοδος) στην αρχή του αλγορίθμου. Η κάθε διαδικασία τελειώνει με

- **end** *όνομα–διαδικασίας*

  Μεταξύ της *procedure* και του *end* βρίσκεται το σύνολο των εντολών της διαδικασίας. Οι δομές ελέγχου που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθες:

1. **if** *π* **then** *ενέργεια*
2. **if** *π* **then** *ενέργεια1* **else** *ενέργεια2*

   Στην 1η έκφραση, αν η πρόταση (συνθήκη) *π* αληθεύει, τότε εκτελείται η αντίστοιχη ενέργεια. Η συνθήκη *π* μπορεί να είναι μια απλή ή μια σύνθετη πρόταση, όπως αυτές που περιγράφθηκαν στο κεφάλαιο 1.

   Κατά την εκτέλεση της δεύτερης εντολής, αν η συνθήκη *π* αληθεύει, εκτελείται η ενέργεια1, στην αντίθετη περίπτωση εκτελείται η ενέργεια2.

3. **while** *π* **do** *ενέργεια*

   Κατά την εκτέλεση της εντολής αυτής ελέγχεται η συνθήκη *π* και, εφόσον αυτή είναι αληθής, εκτελείται η ενέργεια που ακολουθεί το «do».

4. **repeat** *ενέργεια* **until** *π*

Κατά την εκτέλεση της εντολής αυτής, η ενέργεια εκτελείται έως ότου η συνθήκη π γίνει αληθής. Η διαφορά με την (3) παραπάνω είναι ότι η ενέργεια εκτελείται τουλάχιστον μια φορά και συνεχίζει να εκτελείται εφόσον η π παραμένει ψευδής.

5. for *μεταβλητή:= αρχική–τιμή* **to** *τελική–τιμή* **do** *ενέργεια*

Κατά την εκτέλεση της εντολής αυτής, η ενέργεια εκτελείται για κάθε τιμή της μεταβλητής από την αρχική τιμή έως και την τελική τιμή.

Στις παραπάνω δομές ελέγχου, μια ενέργεια μπορεί να είναι απλή ή σύνθετη ενέργεια. Μια απλή ενέργεια μπορεί να είναι είτε μια από τις προαναφερθείσες δομές ελέγχου, μια εντολή ανάθεσης (συμβολίζεται με « : = »), ή η κλήση μιας άλλης διαδικασίας. Μια σύνθετη ενέργεια αποτελείται από ένα σύνολο βημάτων που βρίσκεται μεταξύ των λέξεων **begin** ... **end**.

Παράδειγμα 3.2

Ο ακόλουθος αλγόριθμος γενικεύει τον αλγόριθμο του παραδείγματος 1 και βρίσκει το μικρότερο αριθμό σε μια ν–άδα αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, $\nu > 1$:

Αλγόριθμος 3.2: Εύρεση Μικρότερου Αριθμού σε Ακολουθία

Είσοδος: Μια ακολουθία ν αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, $\nu > 1$.

Έξοδος: Ο μικρότερος αριθμός μ από τους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$

1. procedure min(ν, α_1, α_2, ..., α_ν)

2. μ:=α_1

3. κ:=1

4. repeat

begin

a. κ:= κ+1

b. if μ>α_κ then μ:=α_κ

end

5. until κ=ν

6. return(μ)

7. end min

Αρχικά, στο βήμα 1 ο αλγόριθμος θέτει στη μεταβλητή μ, όπου αποθηκεύεται ο μικρότερος γνωστός αριθμός της ακολουθίας, τον πρώτο αριθμό της ακολουθίας.

Ο μετρητής κ χρησιμεύει για τη μέτρηση και τον προσδιορισμό των στοιχείων της ακολουθίας. Η σύνθετη ενέργεια, της οποίας η επανάληψη ελέγχεται από την εντολή repeat ... until των εντολών 4 – 5, εκτελείται έως ότου ο μετρητής κ γίνει ίσως με ν.

Η σύνθετη ενέργεια 4, στο βήμα 4.α, αυξάνει το μετρητή κ ώστε να προσδιορίσει το επόμενο στοιχείο της ακολουθίας, και στην εντολή 4.β συγκρίνει το νέο στοιχείο με τον τρέχοντα γνωστό μικρότερο αριθμό της ακολουθίας. Αν προκύψει μικρότερο στοιχείο, τότε η τιμή της μεταβλητής μ μεταβάλλεται. Τέλος, με το πέρας της ανακύκλωσης, στην εντολή 6 η διαδικασία επιστρέφει την τιμή της μεταβλητής μ και τερματίζει.

Παράδειγμα 3.3 (Ευκλείδιος Αλγόριθμος)

Ο Ευκλείδιος αλγόριθμος, δεδομένων δυο μη αρνητικών ακεραίων κ, λ, όπου και οι δύο δεν είναι ίσοι με μηδέν, βρίσκει το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, ο οποίος συμβολίζεται με μκδ(κ, λ).

Η βασική λογική του αλγόριθμου είναι η αναγωγή του προβλήματος εύρεσης του μκδ μεταξύ ενός μη αρνητικού ακέραιου κ και ενός θετικού ακέραιου λ στο πρόβλημα εύρεσης του μκδ μικρότερων αριθμών. Τελικά, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του μκδ μεταξύ ενός αριθμού ν και του μηδενός (0). Εφόσον μκδ(ν, 0) = ν, το αρχικό πρόβλημα έχει λυθεί.

Μετά τη διατύπωση του αλγορίθμου, ακολουθεί αυστηρή απόδειξη της ορθότητάς του. Με άλλα λόγια, αποδεικνύουμε ότι ο αλγόριθμος βρίσκει πάντοτε το σωστό αποτέλεσμα.

Αλγόριθμος 3.3: Ευκλείδιος Αλγόριθμος

Είσοδος: κ και λ μη αρνητικοί ακέραιοι που δεν είναι και οι δύο μηδέν.

Έξοδος: Ο μκδ των κ, λ.

```
1. Procedure μκδ(κ, λ)
2. if λ<κ then
a.      while λ>0 do
b.      begin
c.      υπολόγισε το πηλίκο π και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης κ/λ. Δηλαδή,
        κ= λ*π +υ, με 0 ≤ υ < λ
d.      κ:= λ, λ :=υ
e.      end
3. return(κ)
4. end μκδ
```

Για να καταλάβετε τη λειτουργία του αλγόριθμου 3.3, θα δείξω τη σειρά των βημάτων του για $κ = 776$ και $λ = 384$.

Βήμα 2: Εφόσον $κ < λ$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 2(α), όπου μεταξύ των 2(α) και 2(e) πραγματοποιούνται τα εξής, ενόσω το $λ$ παραμένει διάφορο του μηδενός:

Βήμα 2(c): Διαιρώντας το $κ$ με το $λ$, προκύπτει ότι $776 = 384 \cdot 2 + 8$.

Βήμα 2(d): Το $κ$ παίρνει την τιμή 384 και το $λ$ την τιμή 8.

Βήμα 2(a): Εφόσον το $λ > 0$, $α$ αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2(c)

Βήμα 2(c): Διαιρεί το $κ = 384$ με το $λ = 8$. Τότε προκύπτει ότι $384 = 48 \cdot 8 + 0$.

Βήμα 2(d): Το $κ$ παίρνει την τιμή 8 και το $λ$ την τιμή 0.

Βήμα 2(a): Εφόσον $λ = 0$, η εντολή 2 τερματίζει

Βήμα 3: Επιστρέφεται ως αποτέλεσμα του αλγορίθμου η τιμή της $κ$, δηλαδή το 8. Συνεπώς, μκδ(776, 384) = 8.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, δοθέντων δύο μη αρνητικών ακεραίων κ, λ που δεν είναι και οι δύο ίσοι με μηδέν, υπολογίζει πάντοτε το μκδ τους: Για την απόδειξη της πρότασης αυτής, θα πρέπει να δείξουμε ότι, αν ο $κ$ είναι μη αρνητικός ακέραιος και ο $λ$ είναι θετικός ακέραιος, για τους οποίους ισχύει η σχέση $κ = λ \cdot π + υ$, $0 \le υ < λ$, τότε μκδ($κ$, $λ$) = μκδ($λ$, $υ$). Αυτή είναι και η «βασική» ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο και υλοποιείται στα βήματα 2(c) και 2(d) του αλγορίθμου που περιγράφθηκε παραπάνω.

Πράγματι, αν $μ$ κοινός διαιρέτης των $κ$ και $λ$, τότε εύκολα μπορείτε να δείξετε ότι ο $μ$ διαιρεί το $(π \cdot λ)$, για οποιοδήποτε ακέραιο $π$, και το $υ = (κ – (π \cdot λ))$, για $π$ ίσο με το πηλίκο της διαίρεσης του $κ$ με το $λ$. Άρα, ο $μ$ είναι κοινός διαιρέτης των $λ$ και $υ$. Συνεπώς, το σύνολο των κοινών διαιρετών των $κ$ και $λ$ είναι υποσύνολο των κοινών διαιρετών των $λ$ και $υ$. Από την άλλη πλευρά, αν $μ$ κοινός διαιρέτης των $λ$ και $υ = (κ – (π \cdot λ))$, τότε εύκολα μπορείτε να δείξετε ότι θα είναι και διαιρέτης του $(π \cdot λ + υ)$, δηλαδή του $κ$. Επομένως, το σύνολο των κοινών διαιρετών των $υ$ και $λ$ είναι υποσύνολο των κοινών διαιρετών των $λ$ και $κ$. Άρα, τα δύο σύνολα διαιρετών είναι ίσα, και επομένως μκδ($κ$, $λ$) = μκδ($λ$, $υ$).

Σύνοψη ενότητας

Η παρούσα ενότητα περιγράφει τα χαρακτηριστικά ενός αλγορίθμου, ενώ καθορίζει μια «γλώσσα» για την περιγραφή αλγορίθμων σε μορφή ψευδοκώδικα. Ως παράδειγμα αλγορίθμου δίνεται ο «διάσημος» Ευκλείδιος αλγόριθμος. Η ενότητα είναι ιδιαίτερα σημαντική για την ανάγνωση και κατανόηση των αλγορίθμων του κεφαλαίου 4.

3.2 Αναδρομικοί αλγόριθμοι

Σκοπός

Η ενότητα αυτή περιγράφει και δίνει παραδείγματα από μια ιδιαίτερη κατηγορία αλγορίθμων: Αυτή των αναδρομικών αλγορίθμων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η παρούσα ενότητα σας επιτρέπει να έχετε την ικανότητα να :

- *«ακολουθείτε» την εκτέλεση αναδρομικών αλγορίθμων,*
- *διατυπώνετε αναδρομικούς αλγορίθμους*

Έννοιες κλειδιά

- *αναδρομικός αλγόριθμος*

Μια αναδρομική διαδικασία είναι μια διαδικασία που κατά την εκτέλεσή της καλεί τον εαυτό της.

Παρατηρήστε ότι ο Ευκλείδιος αλγόριθμος του παραδείγματος 3.2 ακολουθεί την τακτική του «διαίρει και βασίλευε»: Ανάγει το αρχικό πρόβλημα σε ένα απλούστερο πρόβλημα του ίδιου τύπου με το αρχικό, το οποίο με τη σειρά του ανάγεται σε απλούστερο κ.ο.κ.

Γενικά, αναδρομικοί αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα τα οποία μπορούν να «σπάσουν» σε ένα σύνολο υπο – προβλημάτων του ίδιου τύπου με το αρχικό και κάθε τέτοιο υπο – πρόβλημα, με την ίδια μέθοδο, με τη σειρά του μπορεί να σπάσει σε απλούστερα υπο – προβλήματα, κο*κ*, έως ότου προκύψουν μια σειρά από προβλήματα, τα οποία επιλύονται άμεσα.

Παράδειγμα 3.4 (Ευκλείδιος Αλγόριθμος)

Παρατηρήστε ότι ο Ευκλείδιος αλγόριθμος, όπως αυτός διατυπώθηκε στο παράδειγμα 3.3, εφαρμόζεται σε δυάδα μη αρνητικών ακεραίων κ, λ και μόνο στην περίπτωση όπου $\lambda < \kappa$. Μια γενικότερη αναδρομική διατύπωση του ίδιου αλγορίθμου μπορεί να είναι η εξής:

Αλγόριθμος 3.4: Ευκλείδιος Αλγόριθμος

Είσοδος: κ και λ μη αρνητικοί ακέραιοι που δεν είναι και οι δύο μηδέν.

Έξοδος: Ο μκδ των κ, λ.

1. Procedure μκδ(κ, λ)
2. if λ=0 then return(κ)
3. if λ<κ then

a. begin

b. υπολόγισε το πηλίκο π και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης κ/λ. Δηλαδή,

κ= λ*π +υ, με 0 ≤ υ < λ

c. μ=μκδ(λ, υ), retutn(μ)

d. end

4. else μ=μκδ(λ, κ), return(μ)
5. end μκδ

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω διαδικασία μκδ είναι αναδρομική, εφόσον αυτή καλεί τον εαυτό της στα βήματα 3(c) και 4. Συγκεκριμένα, στο βήμα 3(c) η διαδικασία επιστρέφει ως μκδ των κ και λ τον μκδ των λ και υ, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του κ με τον λ. Ο μκδ(λ, υ) υπολογίζεται με την ίδια ακριβώς διαδικασία, αναδρομικά. Το βήμα 4 εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου το $\kappa \leq \lambda$, και επιστρέφει ως μκδ των κ και λ τον μκδ(λ, κ), καλώντας αναδρομικά τον εαυτό της.

Παρατηρήστε ότι η όλη διαδικασία τελικά τερματίζει στο βήμα 2, όπου $\lambda = 0$, και το πρόβλημα επιλύεται άμεσα. Το βήμα 2 καλείται βασικό βήμα. Ένα βασικό βήμα απαιτείται για τον τερματισμό κάθε αναδρομικής διαδικασίας.

Για την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω αλγόριθμου, ας τον εφαρμόσουμε στην περίπτωση όπου $\kappa = 776$ και $\lambda = 384$:

Βήμα 2: Εφόσον $\lambda > 0$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 3.

Βήμα 3: Εφόσον $\lambda < \kappa$, εκτελείται η σύνθετη ενέργεια 3(a) – 3(d).

Βήμα 3(b): Διαιρώντας το κ με το λ, προκύπτει ότι $776 = 384 \cdot 2 + 8$.

Βήμα 3(c): Καλείται η διαδικασία μκδ(384, 8).

Μια νέα διαδικασία μκδ ξεκινά με $\kappa = 384$ και $\lambda = 8$. Παρατηρήστε ότι στη νέα εκτέλεση της μκδ ο χώρος εργασίας της διαδικασίας είναι τελείως διαφορετικός από το χώρο εργασίας της διαδικασίας που την κάλεσε, και επομένως οι μεταβλητές κ και λ είναι διαφορετικές από τις προηγούμενες.

Βήμα 2: Εφόσον $\lambda > 0$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 3.

Βήμα 3: Εφόσον $\lambda < \kappa$, εκτελείται η σύνθετη ενέργεια 3(a) – 3(d).

Βήμα 3(b): Διαιρώντας το κ με το λ, προκύπτει ότι $384 = 48 \cdot 8 + 0$.

Βήμα 3(c): Καλείται η διαδικασία μκδ(8, 0).

Μια νέα διαδικασία μκδ ξεκινά με $\kappa = 8$ και $\lambda = 0$.

Βήμα 2: Η νέα μκδ τερματίζει στην εντολή 2 για $\lambda = 0$ και επιστρέφει τη μεταβλητή $\kappa = 8$ στη διαδικασία που την κάλεσε (δηλαδή στην προηγούμενη κλήση της μκδ).

Βήμα 3(c): (συνέχεια) Επιστρέφει την τιμή της μεταβλητής μ, δηλαδή 8, στη διαδικασία που την κάλεσε (δηλαδή στην πρώτη κλήση της μκδ).

Βήμα 3(c): (συνέχεια) Η αρχική διαδικασία επιστρέφει επίσης την τιμή 8 και ο αλγόριθμος τερματίζει.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.1

Να «τρέξετε» τον Ευκλείδιο Αλγόριθμο, όπως αυτός έχει διατυπωθεί παραπάνω, για το ακόλουθο ζεύγος ακεραίων: (60, 90). Να δείξετε με ακρίβεια τη σειρά των βημάτων και πώς αυτά εκτελούνται.

Παράδειγμα 3.5

Ένα κλασικό παράδειγμα αναδρομικής διαδικασίας είναι η διαδικασία υπολογισμού των αριθμών της ακολουθίας Fibonacci. Ο Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) ήταν Ιταλός έμπορος και μαθηματικός και στο πλέον διαδεδομένο έργο του Liber Abaci περιέγραφε την ακολουθία Fibonacci, όπου και χρησιμοποίησε τα Ινδο – Αραβικά ψηφία για την παράσταση των αριθμών.

Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται ως εξής:

$f_1 = 1$

$f_2 = 2$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$.

Ο υπολογισμός του n–οστού όρου της ακολουθίας αυτής μπορεί να υπολογιστεί με την ακόλουθη αναδρομική διαδικασία, που ανάγει το πρόβλημα εύρεσης του n–οστού όρου στα υπό – προβλήματα εύρεσης του (n–1) – οστού και (n–2) – οστού όρου:

Αλγόριθμος 3.5: Υπολογισμός n–οστού όρου της ακολουθίας Fibonacci

Είσοδος: Θετικός ακέραιος $n \geq 1$.

Έξοδος: f_n

```
1. Procedure fibonacci(n)
2. if (n=1 or n=2) then return(n)
3. κ= fibonacci(n–1)+fibonacci(n–2)
4. return(κ)
5. end fibonacci.
```

Η εκτέλεση του αλγορίθμου για $n = 5$ μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Διαδικασία		Βήματα	Βήμα/ Κλήση	Σχόλιο
1	fibonacci(5)	1, 2, 3	fibonacci(4), fibonacci(3)	
2	fibonacci(4)	1, 2, 3	fibonacci(3), fibonacci(2)	
3	fibonacci(3)	1, 2, 3	fibonacci(2), fibonacci(1)	
4	fibonacci(2)	1, 2	return(2)	
5	fibonacci(1)	1, 2	return(1)	
6	fibonacci(3)	3, 4	$\kappa = 2 + 1 = 3$, return(3)	Συνέχεια της (3)
7	fibonacci(4)	3, 4	$\kappa = 3 + 2 = 5$, return(5)	Συνέχεια της (2)
8	fibonacci(5)	3, 4	$\kappa = 5 + 3 = 8$, return(8)	Συνέχεια της (1)

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2

Να διατυπώσετε αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ν–οστού όρου της ακολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, 3\ldots$, όπου $\alpha_1 = 1$, και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + (2 \cdot \alpha_\nu)$

Δραστηριότητα 3.1

Να «τρέξετε» τον Ευκλείδιο Αλγόριθμο, όπως αυτός έχει διατυπωθεί παραπάνω, για τα ακόλουθα ζεύγη ακεραίων: (993, 331), (5, 25). Να δείξετε με ακρίβεια τη σειρά των βημάτων και πώς αυτά εκτελούνται.

Υπόδειξη

Ακολουθείστε τον τρόπο του παραδείγματος 3.4 και την άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.1

Δραστηριότητα 3.2

Να διατυπώσετε τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του $v!$, $v \geq 0$. Να δείξετε με ακρίβεια και λεπτομέρεια πώς εκτελείται ο αλγόριθμος για δύο τιμές του v.

Υπόδειξη

Ακολουθείστε τον τρόπο του παραδείγματος 3.4 και την άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.2

Σύνοψη ενότητας

Η ενότητα 3.2 παρουσιάζει την έννοια του αναδρομικού αλγόριθμου.

Σύνοψη κεφαλαίου

Το κεφάλαιο αυτό δεν αποσκοπεί στη σε βάθος παρουσίαση της έννοιας του αλγορίθμου, αλλά ουσιαστικά αποτελεί εισαγωγικό κεφάλαιο για το κεφάλαιο 4. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, στην ενότητα 3.1 καθορίζεται η έννοια του αλγορίθμου, ενώ περιγράφεται μια «γλώσσα» για την περιγραφή αλγορίθμων σε μορφή ψευδοκώδικα. Ως παράδειγμα αλγορίθμου δίνεται ο «διάσημος» Ευκλείδιος αλγόριθμος. Στην ενότητα 3.2 παρουσιάζεται η έννοια του αναδρομικού αλγόριθμου.

Βιβλιογραφία

[1] Knuth D.E., «The Art of Computer Programming», Vol 1: Fundamental Algorithms, 2nd Ed, Addison – Wesley, Reading Mass 1973.

[2] Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.

Προαιρετική βιβλιογραφία

[1] Albertson M.O, J. P. Hutchinson Discrete mathematics with algorithms, New York: Wiley, c1988

[2] Knuth D.E. «The Art of Computer Programming», Vol.3. Sorting and Searching» Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass, 1973.

[3] Aho A.V., J.E.Hopcroft and J.D.Ullman «The Design and Analysis of Computer Algorithms», Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass 1974.

[4] Aho A.V., J.E.Hopcroft and J.D.Ullman «Data Structures and Algorithms» Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass 1983.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θεωρία Γραφημάτων

Σκοπός

Αν και η πρώτη επιστημονική δημοσίευση που αναφέρεται στη θεωρία γραφημάτων χρονολογείται το 1736 και πολλά σημαντικά αποτελέσματα αποδείχθηκαν το δέκατο ένατο αιώνα, μέχρι το 1920 το γενικό ενδιαφέρον για τη θεωρία γραφημάτων, ως ιδιαίτερο αντικείμενο μελέτης, ήταν περιορισμένο. Πράγματι, το πρώτο κείμενο με αναφορά στη θεωρία γραφημάτων εμφανίσθηκε το 1736 από τον L. Euler στον οποίο θα αναφερθούμε στις ενότητες του κεφαλαίου αυτού.

Αναμφίβολα, ένας από τους λόγους για το πρόσφατο αυξημένο ενδιαφέρον για τη θεωρία γραφημάτων είναι οι δυνατότητες εφαρμογής της σε πολλά γνωστικά πεδία, όπως στην επιστήμη των υπολογιστών, στη χημεία, στην επιχειρησιακή έρευνα, στη γλωσσολογία και στα οικονομικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθεί η βασική ορολογία της θεωρίας γραφημάτων και παραδείγματα από τη χρήση των γραφημάτων για τη μοντελοποίηση και επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Το κεφάλαιο αυτό έχει ως στόχο να σας εξοικειώσει κατ΄αρχήν με μια ιδιαίτερα χρήσιμη κατασκευή, με τους τρόπους χρήσης της σε διάφορα πλαίσια και με διάφορες μεθόδους, καθώς επίσης και να σας δώσει τη δυνατότητα απόδειξης υπολογιστικών και άλλων τυπικών ιδιοτήτων των γραφημάτων, τη δυνατότητα διατύπωσης γενικευμένων αλγορίθμων που εφαρμόζονται σε αυτά και απόδειξης της ορθότητας των αλγορίθμων αυτών.

Η ενότητα 1 του κεφαλαίου αυτού αναφέρεται σε βασική ορολογία των γραφημάτων και καθορίζει ιδιότητες και τύπους γραφημάτων. Στην ενότητα 2 καθορίζεται η έννοια του κύκλου Euler σε γράφημα και δίνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη τέτοιου κύκλου. Η ενότητα 3 καθορίζει την έννοια του κύκλου Hamilton σε γράφημα και δείχνει τη σχέση μεταξύ των προβλημάτων ύπαρξης κύκλων Euler και Hamilton σε γράφημα μέσω της παρουσίασης της έννοιας του γραφήματος ακμών. Η ίδια ενότητα, τέλος, παρουσιάζει το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και τον αλγόριθμο του πλησιέστερου γείτονα για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης στο πρόβλημα αυτό. Στην ενότητα 4 παρουσιάζονται δύο βασικοί τρόποι παράστασης γραφημάτων για το χειρισμό και αξιοποίηση των γραφημάτων από υπολογιστικές μεθόδους: Τα μητρώα σύνδεσης και τα μητρώα εφαπτόμενων ακμών. Εξετάζονται οι ιδιότητες των αναπαραστάσεων και ελέγχεται για ποιες κατηγορίες γραφημάτων οι αναπαραστάσεις αυτές είναι «πιστές». Η ενότητα 5 παρουσιάζει την έννοια της ισομορφίας γραφημάτων και αποδεικνύει ότι η χρήση μητρώων σύνδεσης για την αναπα-

ράσταση των γραφημάτων βοηθά στον έλεγχο της ισομορφίας γραφημάτων. Η έννοια όμως της ισομορφίας γραφημάτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον έλεγχο του κατά πόσο ένα γράφημα μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο με τρόπο τέτοιο που οι ακμές του να μη διασταυρώνονται. Γραφήματα με αυτή την ιδιότητα καλούνται επίπεδα γραφήματα, και η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη του παρόντος κεφαλαίου θα σας:

- *εξοικειώσει με τις βασικές έννοιες των γραφημάτων και με βασικές ιδιότητές τους,*
- *βοηθήσει να χειρίζεστε τα γραφήματα ως μαθηματικά κατασκευάσματα,*
- *επιτρέψει να χρησιμοποιείτε γραφήματα για τη μοντελοποίηση καταστάσεων του πραγματικού κόσμου και να εξετάζετε τη δυνατότητα επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων,*
- *βοηθήσει στην εφαρμογή βασικών αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων με γραφήματα,*
- *καταστήσει ικανούς/ες να εφαρμόζετε αποδεικτικές διαδικασίες, και κύρια αυτή της μαθηματικής επαγωγής, για την απόδειξη της ορθότητας αλγορίθμων,*
- *βοηθήσει να προσεγγίσετε την έννοια του προσεγγιστικού αλγόριθμου, μέσω της παρουσίασης του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή.*

Έννοιες κλειδιά

- *γράφημα, κορυφή (ή κόμβος)*
- *ακμή*
- *μονοπάτι*
- *κατευθυνόμενο γράφημα*
- *γειτονικές κορυφές*
- *μεμονωμένη κορυφή*
- *απλό γράφημα*
- *παράλληλες ακμές*
- *ανακύκλωση*
- *γράφημα με βάρη*
- *πλήρες γράφημα*
- *διχοτομίσιμο γράφημα*
- *πλήρες διχοτομίσιμο γράφημα*
- *συνδεόμενο γράφημα*
- *υπό – γράφημα*
- *τμήμα γραφήματος*
- *μονοπάτι, απλό μονοπάτι*
- *κύκλος*
- *απλός κύκλος*
- *κύκλος Euler*

- *βαθμός κορυφής*
- *κύκλος Hamilton*
- *γράφημα ακμών*
- *περιοδεύων πωλητής*
- *αλγόριθμος πλησιέστερου γείτονα*
- *αλγόριθμος Dijkstra*
- *προσεγγιστικός αλγόριθμος*
- *μητρώο σύνδεσης*
- *μητρώο εφαπτόμενων ακμών*
- *ισομορφισμός γραφημάτων*
- *ισόμορφα γραφήματα*
- *αναλλοίωτη ιδιότητα*
- *επίπεδο γράφημα*
- *αποτύπωση γραφήματος*
- *όψη επιπέδου*
- *βαθμός όψεως*
- *τύπος Euler*
- *θεώρημα Kuratowski*
- *ομοιομορφικά γραφήματα απλοποίηση σειράς*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η θεωρία γραφημάτων εισάγει έννοιες που είναι βασικές για την κατανόηση πολύπλοκων δομών δεδομένων, την ανάλυση και την απόδειξη της ύπαρξης ιδιοτήτων αυτών των δομών και τη χρήση αυτών των ιδιοτήτων για την απόδειξη της ορθότητας αλγορίθμων που εφαρμόζονται σε αυτές.

4.1 Βασική ορολογία: Μονοπάτια και κύκλοι

Σκοπός

Η ενότητα αυτή περιέχει τη βασική ορολογία της θεωρίας γραφημάτων και παραδείγματα από τη χρήση των γραφημάτων για τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων σε διάφορα πλαίσια.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας:

- *εξοικειώσει με τις βασικές έννοιες των γραφημάτων και με βασικές ιδιότητές τους,*
- *βοηθήσει να χειρίζεστε τα γραφήματα ως μαθηματικά κατασκευάσματα,*
- *βοηθήσει να αναγνωρίζετε και κατασκευάζετε γραφήματα ειδικών κατηγοριών, όπως τα διχοτομίσιμα, τα πλήρη και τα συνδεόμενα.*

Έννοιες κλειδιά

- *γράφημα*
- *κορυφή (ή κόμβος)*
- *ακμή*
- *μονοπάτι*
- *κατευθυνόμενο γράφημα*
- *γειτονικές κορυφές*
- *μεμονωμένη κορυφή*
- *απλό γράφημα*
- *παράλληλες ακμές*
- *ανακύκλωση*
- *γράφημα με βάρη*
- *πλήρες γράφημα*
- *διχοτομίσιμο γράφημα*
- *πλήρες διχοτομίσιμο γράφημα*
- *συνδεόμενο γράφημα*
- *υπό – γράφημα*
- *τμήμα γραφήματος*
- *μονοπάτι*
- *απλό μονοπάτι*
- *κύκλος*
- *απλός κύκλος*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

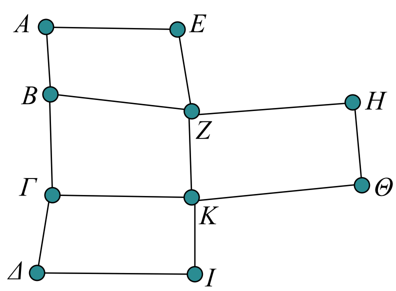
Η ορολογία που καθορίζεται στην παρούσα ενότητα είναι βασική για τον ορισμό και την κατανόηση συνθετότερων εννοιών που εισάγονται σε παρακάτω ενότητες, καθώς επίσης και για την κατανόηση και την ορθή εφαρμογή αλγορίθμων που διατυπώνονται.

4.1.1 Εισαγωγή

Ένα σύστημα δρόμων σε ένα χάρτη μπορεί να μοντελοποιηθεί με ένα γράφημα. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται ένα τέτοιο γράφημα. Οι τελείες του σχήματος 4.1 αντιστοιχούν σε κομβικά σημεία του χάρτη που το γράφημα μοντελοποιεί και καλούνται **κορυφές.** Οι γραμμές αντιστοιχούν σε τμήματα των δρόμων μεταξύ των κομβικών σημείων και καλούνται **ακμές**. Κάθε κορυφή έχει μια ετικέτα που είναι ακριβώς το όνομα της πόλης στην οποία αντιστοιχεί.

Εάν ξεκινήσουμε από τη κορυφή A, διασχίσουμε μια ακμή προς τη κορυφή B και εν συνεχεία κινηθούμε προς την κορυφή K μέσω της κορυφής Z, τη διαδρομή που διανύσαμε την καλούμε ένα **μονοπάτι** από την A στη K.

Ορισμός 4.1: Ένα (μη κατευθυνόμενο) **γράφημα (non–directed graph)** $Γ$ είναι μία δυάδα από σύνολα E και V και συμβολίζεται με $Γ = (E, V)$. Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος και E το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή $ε$ του γραφήματος ($ε \in E$) συνδέει δύο κορυφές v_1 και v_2 του συνόλου V. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $ε = (v_1, v_2)$ ή $ε = (v_2, v_1)$.



Σχήμα 4.1
Γράφημα

Στην περίπτωση όπου τα τμήματα των δρόμων έχουν συγκεκριμένη κατεύθυνση, τότε ο παραπάνω ορισμός του γραφήματος δεν παριστά το σύστημα δρόμων με ακρίβεια. Σε μια τέτοια περίπτωση οι ακμές του γραφήματος πρέπει να χαρακτηρίζονται και από την κατεύθυνσή τους.

Ορισμός 4.2: Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph)** $Γ$ αποτελείται από δύο σύνολα, E και V και συμβολίζεται με $Γ = (E, V)$. Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος και E το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή $ε$ στο E σχετίζεται με ένα διατεταγμένο σύνολο κορυφών v_1, v_2. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $ε = (v_1, v_2)$ και συμβολίζει μία ακμή από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_2.

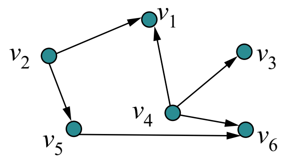
Εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο, σε ένα γράφημα $\Gamma = (V, E)$ τα σύνολα E και V θεωρούνται πεπερασμένα και το σύνολο V διάφορο του κενού συνόλου.

Παράδειγμα κατευθυνόμενου γραφήματος φαίνεται στο σχήμα 4.2. Η κατεύθυνση των ακμών φαίνεται στο σχήμα με βέλος.

Ορισμός 4.3: Μία ακμή $\varepsilon = (v_1, v_2)$ σε κατευθυνόμενο ή μη γράφημα λέγεται ότι **εφάπτεται (incident on)** των κορυφών v_1 και v_2. Οι κορυφές v_1 και v_2 λέγονται **γειτονικές ή διαδοχικές (adjacent)**.

Σχήμα 4.2

Κατευθυνόμενο γράφημα



Ο ορισμός του γραφήματος επιτρέπει την ύπαρξη διαφορετικών ακμών που συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών.

Ορισμός 4.4: Εάν σε ένα *μη κατευθυνόμενο* γράφημα Γ υπάρχουν περισσότερες από μια ακμές που συνδέουν δύο κορυφές v_1 και v_2, τότε οι ακμές αυτές καλούνται **παράλληλες (parallel edges).**

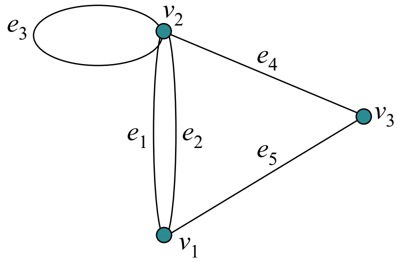
Οι ακμές ε_1 και ε_2 στο σχήμα 4.1 είναι παράλληλες.

Ορισμός 4.5: Μία ακμή που εφάπτεται σε μια και μοναδική κορυφή, δηλαδή $\varepsilon = (v, v)$, καλείται **ανακύκλωση (loop).**

Η ακμή ε_3 στο σχήμα 4.3 είναι μία ανακύκλωση.

Σχήμα 4.3

Μη απλό γράφημα με παράλληλες ακμές και ανακύκλωση



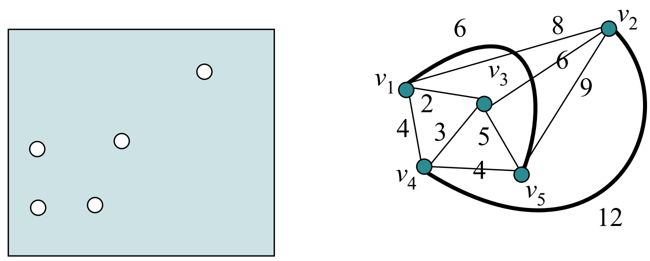
Ορισμός 4.6: Ένα γράφημα Γ δίχως ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές καλείται **απλό γράφημα (simple graph).**

Μία κορυφή στην οποία δεν εφάπτεται καμία ακμή καλείται **μεμονωμένη κορυφή (isolated vertex).**

Παράδειγμα 4.1

Κατά την παραγωγή ενός προϊόντος, είναι αναγκαίο να δημιουργηθούν τρύπες σε συγκεκριμένα σημεία μιας μεταλλικής πλάκας. Οι τρύπες αυτές δημιουργούνται από ρομποτικό βραχίονα που ελέγχεται από υπολογιστή. Για την αύξηση της παραγωγής, ο βραχίονας θα πρέπει να μετακινείται και να ολοκληρώνει την εργασία του στο μικρότερο δυνατό χρόνο.

Την υπάρχουσα κατάσταση τη μοντελοποιούμε με ένα γράφημα, του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις θέσεις που πρέπει να γίνουν οι τρύπες:



(α) (β)

Σχήμα 4.4
Παράδειγμα γραφήματος με βάρη

Κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με μία ακμή. Σε κάθε ακμή αντιστοιχούμε έναν αριθμό που είναι ο χρόνος που απαιτεί ο βραχίονας για να μετακινηθεί από τη μια θέση στην άλλη. Ένα γράφημα καλείται **γράφημα με βάρη,** εάν κάθε ακμή του έχει συσχετιστεί με έναν αριθμό. Ο αριθμός αυτός καλείται βάρος της ακμής. Το γράφημα με βάρη λοιπόν που προκύπτει για τη μοντελοποίηση της συγκεκριμένης κατάστασης είναι αυτό του σχήματος 4.4(β). Σε ένα γράφημα με βάρη, το μήκος μιας διαδρομής (*ενός μονοπατιού*) είναι ίσο με το άθροισμα των βαρών των ακμών που σχηματίζουν τη διαδρομή. Για παράδειγμα, το μήκος της διαδρομής που ξεκινάει από την v_1, επισκέπτεται τη v_3 και σταματάει στη v_2 είναι 8.

Στο εν λόγω πρόβλημα, το μήκος μιας διαδρομής από μια κορυφή v_i σε μια κορυφή v_j παριστά το χρόνο που απαιτείται από το βραχίονα για να μετακινηθεί από τη θέση v_i, να δημιουργήσει τρύπες σε όλες τις θέσεις που αντιστοιχούν σε κορυφές στη διαδρομή και να σταματήσει στην v_j. Η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει ο βραχίονας είναι αυτή που επισκέπτεται κάθε κορυφή του γραφήματος και έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. Ας υποθέσουμε ότι ο βραχίονας θα πρέπει να ξεκινάει από την τρύπα v_1 και να σταματάει στη τρύπα v_1. Μπορείτε να βρείτε τη διαδρομή από την v_1 στην v_5 με το μικρότερο μήκος, αν βρείτε όλες τις διαδρομές και επιλέξετε αυτή με το μικρότερο μήκος.

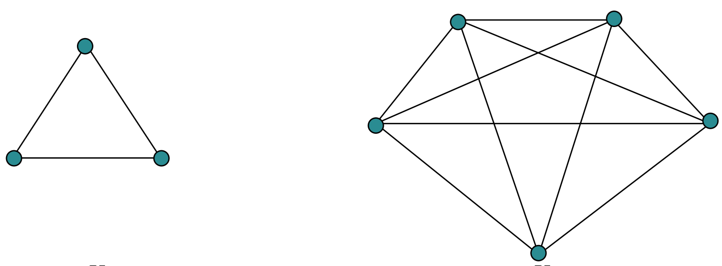
Η μέθοδος αυτή για την εύρεση του μονοπατιού (διαδρομής) με το μικρότερο μήκος είναι υπολογιστικά δαπανηρή. Το παραπάνω πρόβλημα αναφέρεται και ως *πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή* και θα συζητηθεί σε παρακάτω ενότητα.

4.1.2 Ειδικές κατηγορίες γραφημάτων

Ορισμός 4.7: Ένα γράφημα Γ καλείται **πλήρες με ν κορυφές (complete with ν vertices)** και συμβολίζεται K_ν, εάν είναι απλό με ν κορυφές και για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $v_1, v_2 \in V$ υπάρχει μία ακμή στο E με $e = (v_1, v_2)$.

Παράδειγμα 4.2

Στο σχήμα 4.5 φαίνονται τα πλήρη γραφήματα 3 και 5 κορυφών, K_3, K_5 αντίστοιχα.



K_3 K_5

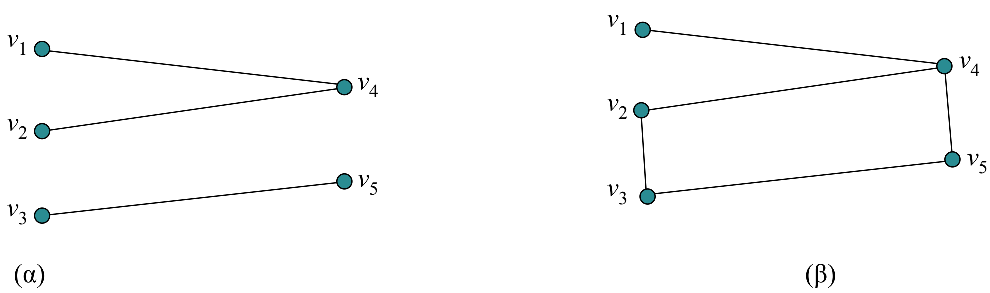
Σχήμα 4.5 *Παραδείγματα πλήρων γραφημάτων ν κορυφών: K_3, K_5*

Ορισμός 4.8: Ένα γράφημα $\Gamma = (V, E)$ καλείται **διχοτομίσιμο (bipartite graph),** εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε κάθε ακμή e στο E να εφάπτεται σε μία κορυφή του V_1 και σε μια του V_2.

Σημειώστε ότι ο παραπάνω ορισμός δεν απαιτεί ότι για κάθε ζεύγος κορυφών (v_1, v_2), v_1 του V_1 και v_2 του V_2 να υπάρχει μια ακμή e στο E ώστε $e = (v_1, v_2)$.

Παράδειγμα 4.3

(α) Παράδειγμα διχοτομίσιμου γραφήματος με $V_1 = (v_1, v_2, v_3)$ και $V_2 = (v_4, v_5)$ είναι αυτό του σχήματος 4.6(α). Σημειώστε ότι η ακμή (v_1, v_5) δεν υπάρχει.



Σχήμα 4.6 *Παραδείγματα διχοτομίσιμων γραφημάτων*

(β) Να δειχθεί αν το γράφημα του σχήματος 4.6(β) είναι διχοτομίσιμο ή όχι.

Για να βρείτε διαμέριση του συνόλου των κορυφών ενός γραφήματος, ώστε να δείξετε ότι αυτό είναι διχοτομίσιμο ή για να δείξετε ότι ένα γράφημα δεν είναι διχοτομίσιμο, μπορείτε, ξεκινώντας από μια κορυφή, να θεωρήσετε ότι αυτή ανήκει σε ένα από τα δύο σύνολα της διαμέρισης, να υποθέσετε ότι οι γειτονικές της βρίσκονται στο άλλο σύνολο κοκ. Αν τελικά φτάσετε σε άτοπο (δηλ. στο συμπέρασμα ότι μια κορυφή ανήκει και στα δύο σύνολα), το γράφημα δεν είναι διχοτομίσιμο. Στην αντίθετη περίπτωση, θα έχετε βρει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του.

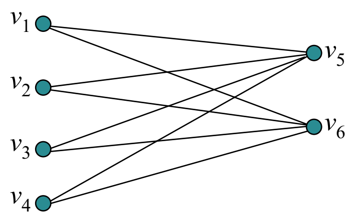
Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, στο παραπάνω γράφημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η v_1 ανήκει στο V_1, και επομένως η v_4 ανήκει στο V_2. Κατά συνέπεια, οι v_2 και v_5 θα πρέπει να ανήκουν στο V_1 και τέλος η $v3$ ανήκει στο V_2. Συνεπώς, το γράφημα είναι διχοτομίσιμο.

Προσέξτε ότι σε ένα διχοτομίσιμο γράφημα δεν απαιτείται να υπάρχει μια ακμή για κάθε ζεύγος κορυφών (v_1, v_2), με v_1 στο V_1 και v_2 στο V_2. Η απαίτηση αυτή μας οδηγεί στην έννοια του πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος.

Ορισμός 4.9: Πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα με v και μ κορυφές (**complete and bipartite** with v and μ vertices), συμβολίζεται ως $K_{v,\mu}$, είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα, το σύνολο κορυφών του οποίου διαμερίζεται σε δύο σύνολα κορυφών: V_1 με v κορυφές και V_2 με μ κορυφές, τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών (v_1, v_2), με $v_1 \in V_1$ και $v_2 \in V_2$, υπάρχει μία ακμή που εφάπτεται σε αυτές.

Παράδειγμα 4.4

Παράδειγμα πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος $K_{2,4}$ με δύο και τέσσερις κορυφές φαίνεται στο σχήμα 4.7:



Σχήμα 4.7
Παράδειγμα πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος 2 και 4 κορυφών

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.1

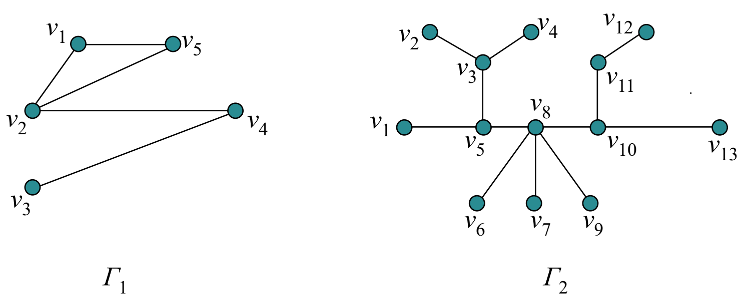
Να βρεθεί ο γενικός τύπος για τον αριθμό των ακμών του K_ν.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.2

Να βρεθεί ο γενικός τύπος για τον αριθμό των ακμών του $K_{\nu,\mu}$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.3

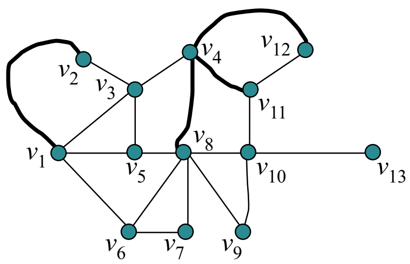
Να καθοριστεί ποια από τα γραφήματα του σχήματος 4.8 είναι διχοτομίσιμα. Σε περίπτωση που είναι διχοτομίσιμα, να ορίσετε τη διαμέριση του συνόλου των κορυφών.



Σχήμα 4.8
Γραφήματα

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.4

Έστω το γράφημα του σχήματος 4.9 που παριστά ένα οδικό δίκτυο. Να δειχθεί ότι, ακόμη και αν παραληφθούν κάποιες ακμές, τα κομβικά σημεία που παριστά το γράφημα θα επικοινωνούν μεταξύ τους. Να καθοριστεί ο μέγιστος αριθμός των δρόμων που μπορεί να παραληφθεί.



Σχήμα 4.9
Οδικό δίκτυο

Υπόδειξη

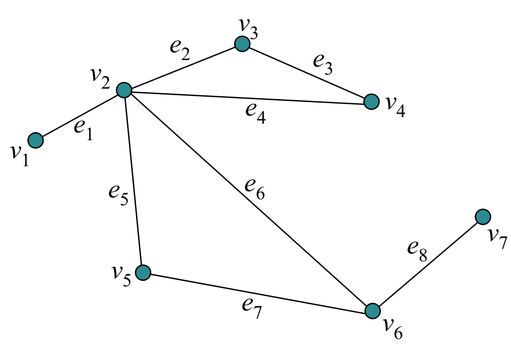
Ακμές που συμμετέχουν στο σχηματισμό κύκλων μπορούν να παραληφθούν (αιτιολογήστε).

4.1.3 Μονοπάτια και κύκλοι

Ορισμός 4.10 Μονοπάτι (path): P μήκους v από μία κορυφή v_0 σε μια κορυφή v_n σε γράφημα $\Gamma = (V, E)$, $v_0, v_n \in V$, καλείται μία ακολουθία από $v + 1$ κορυφές και v ακμές, όπου οι ακμές εναλλάσσονται των κορυφών, ξεκινώντας από την κορυφή v_0 και καταλήγοντας στην κορυφή v_n. Δηλαδή, $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$, όπου κάθε ακμή e_i εφάπτεται των κορυφών v_{i-1}, v_i, με $1 \leq i \leq n$.

Παράδειγμα 4.5

Το μονοπάτι $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$ στο Σχήμα 4.10 είναι ένα μονοπάτι μήκους 4 από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_2.



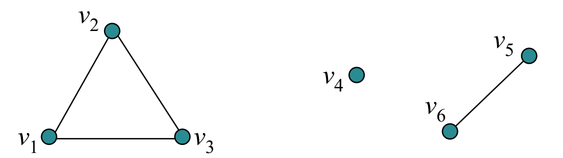
Σχήμα 4.10
Γράφημα

Ορισμός 4.11: Ένα γράφημα $\Gamma = (V, E)$ καλείται **συνδεόμενο (connected graph),** εάν για κάθε ζευγάρι κορυφών v_1, v_2 στο V υπάρχει ένα μονοπάτι από τη v_1 στη v_2.

Παράδειγμα 4.6

Το γράφημα του σχήματος 4.10 είναι συνδεόμενο, ενώ το γράφημα του σχήματος 4.11 είναι μη – συνδεόμενο, διότι δεν υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v_2 στη κορυφή v_5.

Σχήμα 4.11
Μη συνδεόμενο γράφημα



Όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.11, κάθε μη συνδεόμενο γράφημα αποτελείται από «ασύνδετα τμήματα», το καθένα από τα οποία αποτελεί μέρος του όλου γραφήματος. Για το χαρακτηρισμό των τμημάτων αυτών παρακάτω εισάγω την έννοια του υπογραφήματος.

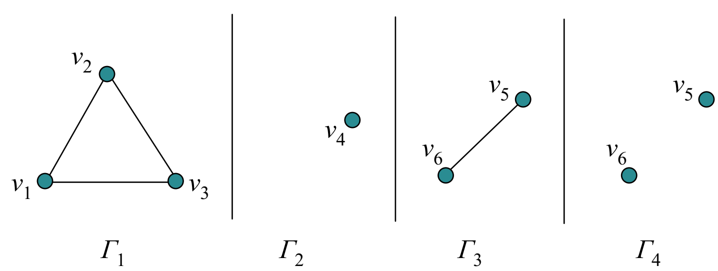
Ορισμός 4.12: Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα γράφημα. Το γράφημα $\Gamma' = (V', E')$ καλείται **υπό–γράφημα (sub–graph)** του Γ, εάν

- $V' \subseteq V$,
- $E' \subseteq E$ και
- για κάθε $e \in E'$, η e εφάπτεται σε δύο κορυφές που ανήκουν στο V'.

Παράδειγμα 4.7

Τα γραφήματα που απεικονίζονται στο σχήμα 4.12 είναι υπογραφήματα του γραφήματος στο σχήμα 4.11.

Σχήμα 4.12
Υπογραφήματα του γραφήματος του σχήματος 4.11.



Ορισμός 4.13: Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα γράφημα, και v μία κορυφή του Γ. Το υπο γράφημα του Γ που αποτελείται από όλες τις ακμές και κορυφές που ανήκουν σε οποιοδήποτε μονοπάτι που ξεκινάει από την v καλείται **τμήμα του γραφήματος (part of the graph) *Γ* που περιέχει τη *v***.

Παράδειγμα 4.8

Έστω το γράφημα του σχήματος 4.11. Το τμήμα του γραφήματος που περιέχει τη v_3 είναι το υπογράφημα $\Gamma_1 = (V_1, \mathrm{E}_1)$ του σχήματος 4.12 με $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Το τμήμα του Γ που περιέχει τη v_4 είναι το υπογράφημα $\Gamma_2 = (V_2, \mathrm{E}_2)$ του σχήματος 4.12 με $V_2 = \{v_4\}$, $E_2 = \{\}$.

Η έννοια του μονοπατιού, όπως αυτή παρουσιάζεται στον ορισμό 4.9, είναι ιδιαίτερα γενική και δεν θέτει περιορισμούς στην εμφάνιση των κορυφών ή/και των ακμών που συμμετέχουν στο σχηματισμό του. Παρακάτω αναφέρονται ειδικές κατηγορίες μονοπατιών που θα μας βοηθήσουν αργότερα στην εισαγωγή συνθετότερων εννοιών

Ορισμός 4.14 Απλό μονοπάτι (**simple path**) σε γράφημα Γ καλείται μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Ορισμός 4.15 Κύκλος (cycle) σε γράφημα Γ είναι μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες ακμές, όπου η αρχική και η τελική κορυφές συμπίπτουν.

Ορισμός 4.16 Απλός κύκλος (simple cycle) σε γράφημα Γ είναι κύκλος δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές (εκτός βέβαια της αρχικής και τελικής κορυφής).

Παράδειγμα 4.9

Το μονοπάτι $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$ του γραφήματος του σχήματος 4.10 δεν είναι απλό, εφόσον σε αυτό επαναλαμβάνεται η κορυφή v_2. Αντίθετα, το μονοπάτι $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4)$ είναι απλό.

Επίσης, το μονοπάτι $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1)$ δεν είναι κύκλος στο ίδιο γράφημα, εφόσον η ακμή e_1 επαναλαμβάνεται σε αυτό. Αντίθετα το $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2)$ είναι κύκλος και μάλιστα απλός.

Αντίθετα, ο κύκλος $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_5, v_5, e_7, v_6, e_7, v_2)$ δεν είναι απλός κύκλος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.5

Εάν ένα γράφημα Γ περιέχει έναν κύκλο από την κορυφή v στη v, τότε το γράφημα αυτό περιέχει έναν απλό κύκλο από την v στη v.

Υπόδειξη

Ένας κύκλος μπορεί να περιέχει μια κορυφή περισσότερες από μια φορά. Περιορίστε τον κύκλο μεταξύ δύο επαναλήψεων της ίδιας κορυφής, έως ότου προκύψει απλός κύκλος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.6

(α) Έστω συνδεόμενο γράφημα $\Gamma = (V, E)$. Να δειχθεί ότι, αν e ακμή του Γ που περιέχεται σε κύκλο, τότε η διαγραφή της e δεν καθιστά το γράφημα μη συνδεόμενο.

(β) Να δοθεί γράφημα που η αφαίρεση μιας ακμής δεν καθιστά το γράφημα μη συνδεόμενο.

Δραστηριότητα 4.1

Έστω γράφημα $\Gamma = (V, E)$. Επί του συνόλου V των κορυφών του Γ ορίζουμε τη σχέση Σ τέτοια ώστε $v\Sigma w$, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι από τη v στη w.

Να δειχθεί ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας και να χαρακτηρίσετε τις κλάσεις ισοδυναμίας που προκύπτουν με βάση τη Σ.

Υπόδειξη

Δείξτε ότι η Σ πληροί τις συνθήκες του ορισμού σχέσης ισοδυναμίας.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα σύνολα κορυφών των τμημάτων του γραφήματος.

Δραστηριότητα 4.2

Να δειχθεί ότι ο μέγιστος αριθμός ακμών σε ένα απλό, μη συνδεόμενο γράφημα με v κορυφές είναι $(v–1)(v–2)/2$.

Υπόδειξη

Ένα μη συνδεόμενο γράφημα, για να έχει το μέγιστο αριθμό ακμών, δεν μπορεί να έχει περισσότερα των δύο τμημάτων. Αν κ ο αριθμός ακμών του ενός τμήματος και

μ ο αριθμός του άλλου, τότε ο αριθμός των ακμών που απουσιάζουν είναι τουλάχιστον ($\kappa\mu$). Για την ελαχιστοποίηση του αριθμού αυτού σε μη συνδεόμενο γράφημα θα πρέπει $\mu = 1$.

Δραστηριότητα 4.3

Η ακολουθία Fibonacci, όπως έχει αναφερθεί και στο παράδειγμα 3.5 ορίζεται ως εξής:

$f_1 = 1$

$f_2 = 2$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$.

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μονοπατιών από τη v_1 στη v_1 μήκους v στο γράφημα του σχήματος 4.13 είναι ίσος με τον v–οστό αριθμό Fibonacci f_v.

Σχήμα 4.13
Γράφημα

Υπόδειξη

Δείξτε ότι για $v = 1, 2$ ο αριθμός των μονοπατιών από τη v_1 στη v_1 μήκους v είναι ίσος με 1 και 2 αντίστοιχα. Κατόπιν δείξτε επαγωγικά ότι για $v \geq 3$ ο ζητούμενος αριθμός ακολουθεί τον αναδρομικό τύπο $f_v = f_{v-1} + f_{v-2}$ (για τη συμπλήρωση του μονοπατιού υπολείπεται είτε η ανακύκλωση – μήκους 1 – ή το μονοπάτι (v_1, v_2, v_1) – μήκους 2) .

Σύνοψη ενότητας

Στην παρούσα ενότητα ορίζονται βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων: Ορίζεται η έννοια του (κατευθυνόμενου και μη κατευθυνόμενου) γραφήματος και η έννοια του μονοπατιού σε γράφημα. Ως ειδικεύσεις της έννοιας του γραφήματος ορίζονται οι έννοιες του απλού γραφήματος, του γραφήματος με βάρη, του πλήρους γραφήματος, του διχοτομίσιμου γραφήματος, του πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος και του συνδεόμενου γραφήματος. Ως ειδικεύσεις της έννοιας του μονοπατιού ορίζονται οι έννοιες του απλού μονοπατιού, του κύκλου και του απλού κύκλου.

4.2 Κύκλοι Euler

Σκοπός

Στην παρούσα ενότητα καθορίζεται η έννοια του κύκλου Euler σε γράφημα και δίνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη τέτοιου κύκλου.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας βοηθήσει να:

- *εξοικειωθείτε με τις βασικές έννοιες που αναφέρθηκαν στην παραπάνω ενότητα,*
- *δείτε πώς έννοιες, όπως «κύκλος», «συνδεόμενο γράφημα» και «βαθμός κορυφής», μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη κύκλων ειδικής κατηγορίας (δηλαδή, κύκλων Euler) σε γράφημα,*
- *χρησιμοποιείτε την έννοια «κύκλος Euler» και να εξετάζετε την ύπαρξή τέτοιων κύκλων σε γραφήματα.*

Έννοιες κλειδιά

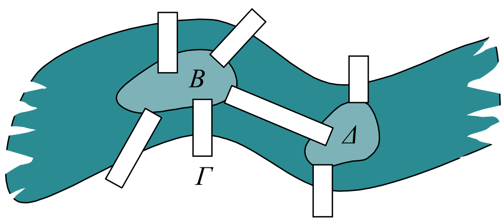
- *κύκλος Euler*
- *βαθμός κορυφής*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

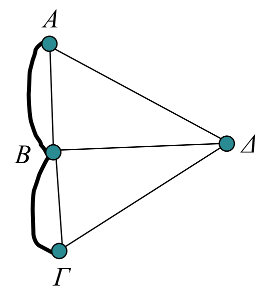
Στην ενότητα αυτή γίνεται η πρώτη σημαντική απόδειξη που αφορά στις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη κύκλων Euler σε γράφημα. Αν και η απόδειξη φαίνεται δύσκολη, η εξοικείωση με τις βασικές έννοιες της πρώτης ενότητας του παρόντος κεφαλαίου θα σας επιτρέψει να την κατακτήσετε ευκολότερα.

Στο σχήμα 4.14(α) απεικονίζονται οι γέφυρες του ποταμού Pregel στο Konigsberg (σημερινό Kaliningrand στη Ρωσία). Τα δύο νησιά του ποταμού συνδέονται τόσο μεταξύ τους, όσο και με τις όχθες του ποταμού με γέφυρες. Το πρόβλημα είναι να ξεκινήσει κάποιος από μια συγκεκριμένη τοποθεσία Α, Β, Γ, Δ, να διασχίσει την κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά και να φτάσει στη θέση που ξεκίνησε. Στο σχήμα 4.14(β) φαίνεται το γράφημα που μοντελοποιεί την κατάσταση του σχήματος 4.14(α). Το πρόβλημα, λοιπόν, με όρους θεωρίας γραφημάτων είναι να βρεθεί ένας κύκλος στο γρά-

φημα του σχήματος 4.14(β) που να περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος και όλες τις ακμές αυτού, την καθεμία ακριβώς μια φορά.



(α)



(β)

Σχήμα 4.14
Οι γέφυρες του ποταμού Pregel στο Konigsberg και η αποτύπωσή τους σε γράφημα.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτείται ο κύκλος να είναι απλός. Επομένως, σε αυτόν μπορεί να υπάρχει μια κορυφή η οποία επαναλαμβάνεται. Όμως, εφόσον πρόκειται για κύκλο, δεν πρέπει να επαναλαμβάνονται ακμές. Θα πρέπει όμως να περιέχονται όλες οι ακμές του γραφήματος στον εν λόγω κύκλο. Τέλος, εφόσον στο ζητούμενο κύκλο θα περιέχονται όλες οι ακμές του γραφήματος, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, για να περιέχονται και όλες οι κορυφές αυτού, ο γράφος θα πρέπει να είναι συνδεόμενος. Τέτοιος κύκλος σε γράφημα καλείται κύκλος Euler. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός του.

Μπορείτε να αποφανθείτε αν υπάρχει τέτοιος κύκλος στο γράφημα του σχήματος 4.14(β);

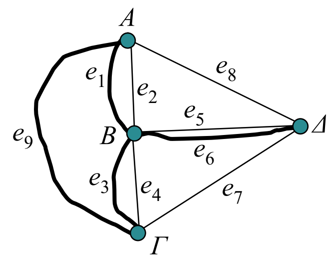
Ορισμός 4.17 Κύκλος του Euler (Euler cycle): είναι κύκλος σε γράφημα Γ που περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος, και κάθε ακμή αυτού ακριβώς μία φορά.

Για γράφημα $\Gamma = (\{v\}, \varnothing)$ υποθέτουμε ότι υπάρχει κύκλος Euler μηδενικού μήκους. Στην περίπτωση αυτή ο κύκλος C είναι ο (v).

Παράδειγμα 4.9

Το γράφημα του σχήματος 4.15 έχει κύκλο Euler. Ένας τέτοιος κύκλος είναι ο εξής:

$K = (A, e_1, B, e_3, \Gamma, e_7, \Delta, e_6, B, e_2, A, e_9, \Gamma, e_4, B, e_5, \Delta, e_8, A)$



Σχήμα 4.15
Γράφημα με κύκλο Euler

Το γράφημα αυτό έρχεται σε αντιπαράθεση με το γράφημα του σχήματος 4.14, για το οποίο δεν υπάρχει κύκλος Euler.

Η λύση στην ύπαρξη κύκλων Euler σε ένα γράφημα μπορεί να δοθεί με όμορφο τρόπο, εάν χρησιμοποιήσουμε την έννοια του βαθμού κορυφής.

Ορισμός 4.18 Βαθμός (degree) κορυφής v ενός γραφήματος $Γ = (V, E)$ καλείται ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που εφάπτονται στην v. Θεωρούμε ότι μια ανακύκλωση μετράει «2» στο βαθμό της κορυφής στην οποία εφάπτεται. Ο βαθμός της v συμβολίζεται $\delta(v)$.

Παράδειγμα 4.10

Για το γράφημα του σχήματος 4.14 ισχύει ότι

$$\delta(A) = 3,\ \delta(B) = 5,\ \delta(\Gamma) = 3,\ \delta(\Delta) = 3$$

Για το γράφημα του σχήματος 4.15 ισχύει ότι

$$\delta(A) = 4,\ \delta(B) = 6,\ \delta(\Gamma) = 4,\ \delta(\Delta) = 4$$

Τελικά, όπως ίσως και εσείς θα έχετε διαπιστώσει, για το γράφημα του σχήματος 4.14 δεν υπάρχει κύκλος Euler, διότι υπάρχει (τουλάχιστον) μια κορυφή με βαθμό ίσο με περιττό αριθμό. Η αιτιολόγηση είναι απλή και είναι ως εξής: Αν v κορυφή του γραφήματος, τότε για κάθε ακμή που χρησιμοποιείται για να φτάσουμε στη v κατά την κατασκευή του ζητούμενου κύκλου απαιτείται και μια άλλη ακμή για να φύγουμε από τη v. Συνεπώς, απαιτείται να υπάρχει άρτιο το πλήθος ακμών που εφάπτεται στη v. Όμως, στο γράφημα του σχήματος 4.14 υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή με περιττό βαθμό.

Το παρακάτω θεώρημα διατυπώνει την παραπάνω διαπίστωση ως αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη κύκλου Euler σε γράφημα.

Θεώρημα 4.1

Γράφημα Γ έχει κύκλο του Euler εάν και μόνο εάν το γράφημα είναι συνδεόμενο και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.

Απόδειξη

($\rightarrow$) Έστω γράφημα Γ με κύκλο Euler. Αφού το γράφημα Γ έχει κύκλο Euler, τότε κάθε κορυφή v του γραφήματος θα εμφανίζεται στον κύκλο αυτό. Επιπλέον, εφόσον κάθε ακμή του γραφήματος που εφάπτεται στη v, όπως και κάθε άλλη ακμή, περιέχεται στον κύκλο Euler ακριβώς μια φορά, η v θα έχει άρτιο βαθμό, διότι για κάθε ακμή *προς* τη κορυφή θα πρέπει να υπάρχει και μία ακμή *από* την κορυφή, δηλαδή οι ακμές που εφάπτονται στη v θα πρέπει να υπάρχουν σε ζεύγη.

Το γράφημα είναι συνδεόμενο, διότι για κάθε ζευγάρι κορυφών v_1, v_2 του γραφήματος, εάν περιορίσουμε τον κύκλο του Euler στη διαδρομή μεταξύ των v_1 και v_2, αυτό αποτελεί ένα μονοπάτι από την v_1 στην v_2. Επομένως, για κάθε ζεύγος κορυφών του γραφήματος υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει.

($\leftarrow$)Το αντίστροφο αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς τον αριθμό των ακμών v του γραφήματος.

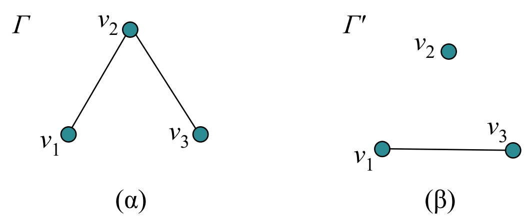
Βασικό βήμα: Εάν $v = 0$, τότε το γράφημα αποτελείται από μια κορυφή. Όπως έχω ήδη δεχτεί, ο κύκλος του Euler για αυτό το γράφημα αποτελείται από αυτή και μόνο την κορυφή.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι για γράφημα με κ ακμές, όπου $\kappa < v$, ισχύει ότι, αν το γράφημα είναι συνδεόμενο και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό, τότε υπάρχει ένας κύκλος του Euler σε αυτό.

Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει για v ακμές. Είναι εύκολο να δούμε ότι για γραφήματα των δύο και τριών κορυφών το θεώρημα ισχύει. (Θεωρήστε την απόδειξη της παραπάνω πρότασης ως δραστηριότητα). Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γράφημα Γ έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές. Έστω v_1, v_2, v_3 οι κορυφές αυτές και έστω $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$ ακμές που τις συνδέουν (φυσικά μπορούν να υπάρχουν και άλλες ακμές στο γράφημα εκτός από αυτές), όπως φαίνεται στο σχήμα 4.16(α). Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε τις ακμές e_1 και e_2 στο γράφημα με την ακμή $e = (v_1, v_3)$, όπως το σχήμα 4.16(β) δείχνει. Εύκολα μπορείτε να δείτε ότι όλες οι ακμές του νέου γραφήματος Γ' έχουν άρτιο βαθμό. Το Γ' έχει v–1 ακμές. Θα δείξουμε ότι το Γ' αποτελείται είτε από ένα ή από δύο το πολύ τμήματα.

Σχήμα 4.16

Υπογράφημα του αρχικού γραφήματος (α) και ο μετασχηματισμός του (β)



Έστω μία κορυφή v του $Γ'$ (και του $Γ$). Θα δείξουμε ότι αυτή ανήκει είτε στο τμήμα της κορυφής v_2 στον $Γ'$ είτε στο τμήμα των κορυφών v_1, v_3 του $Γ'$.

Πράγματι, εάν στο συνδεόμενο γράφημα $Γ$ υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή v_1, το οποίο φτάνει στη v_1 μέσω μονοπατιού που δεν περιέχει την ακμή $e_1 = (v_1, v_2)$ τότε το μονοπάτι αυτό υφίσταται στον $Γ'$ και μάλιστα επεκτείνεται μέσω της ακμής e προς την κορυφή v_3. Σε αυτή την περίπτωση, η v ανήκει στο τμήμα του γραφήματος στο οποίο ανήκουν οι v_1 και v_3. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου το μονοπάτι στον $Γ$ από την v στην v_1 περνάει *αναγκαστικά* στην κορυφή v_1 μέσω της ακμής $e_1 = (v_1, v_2)$ τότε το μονοπάτι αυτό δεν υφίσταται στον $Γ'$, και μάλιστα σταματάει στην κορυφή v_2. Σε αυτή την περίπτωση, η v ανήκει στο τμήμα του γραφήματος στο οποίο ανήκει η v_2.

Άρα το γράφημα $Γ'$ αποτελείται το πολύ από δύο τμήματα.

Στην περίπτωση όπου το $Γ'$ αποτελείται από ένα τμήμα, τότε είναι συνδεόμενο και κάθε ακμή αυτού έχει άρτιο βαθμό. Εφόσον το πλήθος των ακμών του $Γ'$ είναι v–1, από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος, το γράφημα $Γ'$ περιέχει κύκλο Euler. Στον κύκλο αυτό αντικαθιστούμε την ακμή e με τις ακμές e_1 και e_2, οπότε προκύπτει ένας κύκλος Euler για το αρχικό γράφημα $Γ$.

Στην περίπτωση όπου το $Γ'$ αποτελείται από δύο τμήματα, το καθένα από τα τμήματα αποτελεί ένα συνδεόμενο γράφημα, του οποίου οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Με δεδομένο ότι κάθε τμήμα έχει αριθμό ακμών μικρότερου του v, έπεται από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος ότι το κάθε τμήμα έχει κύκλο Euler. Έστω ότι οι κύκλοι αυτοί είναι οι K' και K''. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο K' είναι κύκλος από την κορυφή v_1, στη v_1. Τότε ένας κύκλος Euler στον $Γ$ μπορεί να κατασκευαστεί, εάν στον κύκλο K' αντικαταστήσουμε την ακμή $e = (v_1, v_3)$ με την $e_1 = (v_1, v_2)$, και τοποθετήσουμε στη συνέχεια τον κύκλο K'' από τη v_2 στη v_2, ακολουθούμενο από την ακμή $e_1 = (v_2, v_3)$. Άρα το συνδεόμενο γράφημα $Γ$ με v ακμές έχει κύκλο Euler. Το επαγωγικό βήμα, και συνεπώς το αντίστροφο του θεωρήματος αποδείχθηκε.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.7

Εάν Γ είναι ένα γράφημα με μ ακμές και ν κορυφές, τότε ισχύει η εξής σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2n$$

Δηλαδή, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι άρτιος αριθμός.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.8

Σε ένα γράφημα το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.9

Γράφημα έχει μονοπάτι με μη επαναλαμβανόμενες ακμές από μία κορυφή v σε μία κορυφή w ($v \neq w$), στο οποίο περιέχονται όλες οι ακμές και όλες οι κορυφές του γραφήματος, εάν και μόνο εάν το γράφημα είναι συνδεόμενο και οι κορυφές v και w είναι οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό.

Υπόδειξη

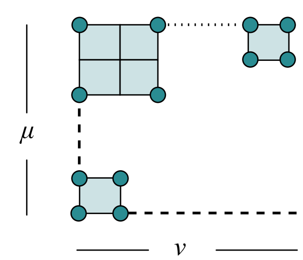
Χρησιμοποιείστε το θεώρημα 4.1

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.10

(α) Πότε το πλήρες γράφημα ν κορυφών K_ν περιέχει κύκλο Euler;

(β) Πότε το πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα ν και μ κορυφών $K_{\nu,\mu}$ περιέχει κύκλο Euler;

(γ) Για ποιες τιμές των μ και ν το γράφημα του σχήματος 4.17 περιέχει κύκλο Euler;



Σχήμα 4.17

Γράφημα

Σύνοψη ενότητας

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η έννοια του κύκλου του Euler. Χρησιμοποιείται δε η έννοια του βαθμού της κορυφής για να οριστούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης κύκλου Euler σε γράφημα.

4.3 Κυκλοι Hamilton, και το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Σκοπός

Η παρούσα ενότητα καθορίζει την έννοια του κύκλου Hamilton σε γράφημα και δείχνει τη σχέση μεταξύ των προβλημάτων ύπαρξης κύκλων Euler και Hamilton σε γράφημα μέσω της παρουσίασης του γραφήματος ακμών. Στην ίδια ενότητα παρουσιάζεται το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης στο πρόβλημα αυτό.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της ενότητας αυτής πρόκειται να σας:

- *εισαγάγει στο πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και στη σχέση του με το πρόβλημα ύπαρξης κύκλου Hamilton σε γράφημα,*
- *βοηθήσει να προσεγγίσετε την έννοια του προσεγγιστικού αλγόριθμου, μέσω της παρουσίασης του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή*

Έννοιες κλειδιά

- *κύκλος Hamilton*
- *περιοδεύων πωλητής*
- *αλγόριθμος πλησιέστερου γείτονα*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

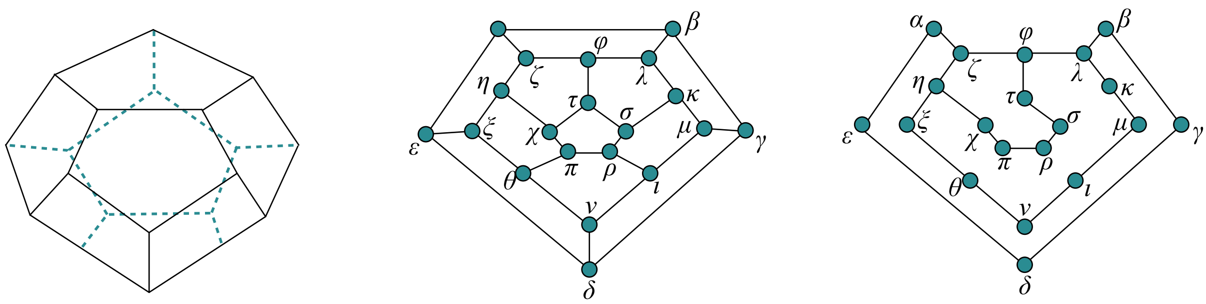
Το πρόβλημα ύπαρξης κύκλου Hamilton σε γράφημα ίσως από μόνο του να μην είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Σίγουρα όμως η σχέση του με το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και η σύνδεση με το πρόβλημα ύπαρξης κύκλου Euler σε γράφημα οδηγούν σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

4.3.1 Κύκλοι Hamilton

Το πρόβλημα του δωδεκάεδρου όπως το παρουσίασε ο Sir William Rowan Hamilton στα μέσα του 17ου αιώνα έχει ως εξής:Δεδομένου ενός δωδεκάεδρου (σχήμα 4.18(α)), εάν φανταστούμε ότι η κάθε κορυφή αυτού αντιστοιχεί σε μια πόλη και κάθε ακμή του σε ένα δρόμο, να βρεθεί μια κυκλική διαδρομή που να αρχίζει από οποιαδήποτε πόλη, να επισκέπτεται την κάθε πόλη ακριβώς μία φορά και να επιστρέφει στην αρχική.Στο σχήμα 4.18(β) απεικονίζεται το γράφημα που αντιστοιχεί στο δωδεκάεδρο. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα του Hamilton, αν βρούμε έναν κύκλο στο γράφημα του σχήματος 4.18(β) που να περιέχει κάθε κορυφή αυτού ακριβώς μια φορά (με εξαίρεση βέβαια την αρχική και την τελική που συμπίπτουν).

Στο σχήμα 4.18(γ) φαίνεται ένα μονοπάτι που δίνει τη λύση στο πρόβλημα.

Ορισμός 4.19: Προς τιμή του Hamilton, κύκλος σε γράφημα Γ καλείται **κύκλος του Hamilton (Hamilton cycle),** εάν περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά (με εξαίρεση βέβαια την αρχική και την τελική που συμπίπτουν).



(α) (β) (γ)

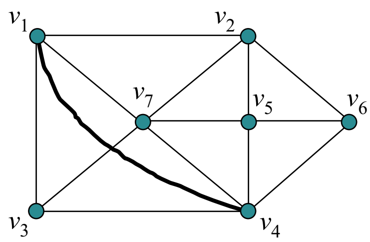
Σχήμα 4.18
Το δωδεκάεδρο (α), το αντίστοιχο γράφημα (β) και κύκλος Hamilton (γ)

Παρατηρήστε ότι κύκλος Hamilton ενός γραφήματος δεν περιέχει όλες τις ακμές του γραφήματος αυτού. Σύμφωνα και με τον ορισμό του κύκλου, κάθε ακμή που περιέχεται στον κύκλο Hamilton θα πρέπει να περιέχεται σε αυτόν ακριβώς μια φορά.

Παράδειγμα 4.11

Ο κύκλος $K = (v_1, v_2, v_6, v_4, v_5, v_7, v_3, v_1)$ στο γράφημα του σχήματος 4.19 είναι ένας κύκλος του Hamilton.

Παρατηρήστε ότι το γράφημα του σχήματος 4.19 δεν περιέχει κύκλο Euler, αφού υπάρχει (τουλάχιστον μια) κορυφή με περιττό βαθμό.



Σχήμα 4.19
Γράφημα δίχως κύκλο Euler αλλά με κύκλο Hamilton.

Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ ενός κύκλου Euler και ενός κύκλου Hamilton. Ο μεν πρώτος περιέχει την κάθε κορυφή και την κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά, ενώ ο δεύτερος περιέχει την κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά.

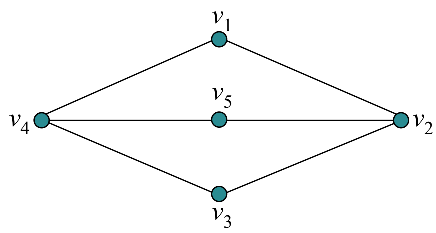
Δυστυχώς δεν είναι γνωστές οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα. Θα πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι, εάν ένα γράφημα περιέχει κύκλο του Hamilton, τότε στον κύκλο αυτό, που αποτελεί υπό – γράφημα του αρχικού γραφήματος, *κάθε κορυφή του αρχικού γραφήματος έχει βαθμό 2*. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να ακολουθήσουμε την ακόλουθη μέθοδο εύρεσης κύκλου του Hamilton σε ένα γράφημα με v κορυφές:

Αφαιρούμε τις ακμές που εφάπτονται στις κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο του 2. Αυτό γίνεται έως ότου (α) όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2 και σχηματιστεί κύκλος του Hamilton με v ακμές είτε (β) δειχτεί ότι σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό μικρότερο του 2, δίχως φυσικά τη δυνατότητα δημιουργίας κύκλου Hamilton.

Παράδειγμα 4.12

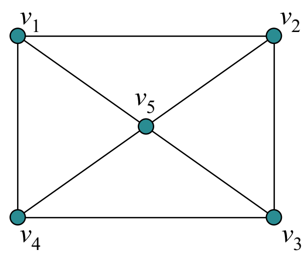
Για παράδειγμα, το γράφημα του σχήματος 4.20 δεν περιέχει κύκλο Hamilton, διότι μπορούμε να αφαιρέσουμε ακμές μόνο από τις κορυφές v_2 και v_4, οι οποίες έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 2. Όμως, αφαιρώντας ακμές από τις κορυφές αυτές, ελαττώνουμε το βαθμό των κορυφών με βαθμό 2.

Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τη δημιουργία κύκλου Hamilton στο γράφημα αυτό απαιτούνται 5 ακμές. Η αφαίρεση όμως των «μη αναγκαίων» ακμών από το γράφημα έχει ως αποτέλεσμα να μείνουν σε αυτό 4 ακμές. Επομένως, για το γράφημα αυτό δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος Hamilton.



Σχήμα 4.20
Γράφημα δίχως κύκλο Hamilton.

Αντίθετα, το γράφημα του σχήματος 4.21 έχει κύκλο Hamilton, αφού μπορούμε να αφαιρέσουμε ακμές από αυτόν έως ότου προκύψει υπό – γράφημα του αρχικού γραφήματος, όπου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2. Τέτοιες ακμές για παράδειγμα μπορεί να είναι οι (v_1, v_5), (v_5, v_2), (v_3, v_4). Κατ΄αυτό τον τρόπο στο υπό – γράφημα παραμένουν 5 ακμές, όσες δηλαδή απαιτούνται για τη δημιουργία κύκλου Hamilton σε γράφημα 5 κορυφών.



Σχήμα 4.21
Γράφημα με κύκλο Hamilton.

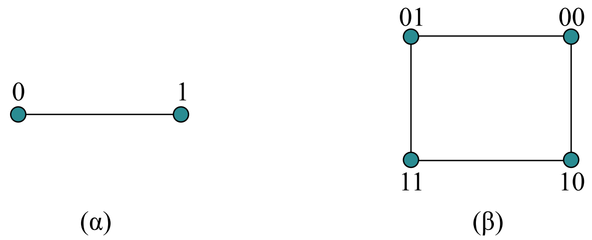
Παράδειγμα 4.13

Υπερ–κύβος ν–κύβος (*Hypercube*)Ένας ν–κύβος αναπαρίσταται με γράφημα $2^ν$ κορυφών, που αριθμούνται από 0 έως $(2^ν–1)$, όπου $ν \geq 1$. Εάν θεωρήσουμε ότι οι κορυφές αριθμούνται με το δυαδικό σύστημα αρίθμησης, τότε μία ακμή συνδέει δύο κορυφές, εάν οι δυαδικοί αριθμοί με τους οποίους αριθμούνται διαφέρουν σε ένα δυαδικό ψηφίο. Για παράδειγμα, ο 1–κύβος φαίνεται στο σχήμα 4.22(α) και ο 2–κύβος στο σχήμα 4.22(β).

Για την κατασκευή ενός ν–κύβου, $ν > 1$, μπορείτε να ακολουθήσετε την εξής μέθοδο:

1. Κατασκευάστε δύο (ν–1) – κύβους.
2. Ενώστε με ακμές τις κορυφές με την ίδια αρίθμηση.
3. Στην αρίθμηση των κορυφών του ενός (ν–1) – κύβου προσθέστε το ψηφίο 0 στην αρχή κάθε δυαδικού αριθμού.
4. Στην αρίθμηση των κορυφών του άλλου (ν–1) – κύβου προσθέστε το ψηφίο 1 στην αρχή κάθε δυαδικού αριθμού.

Το γράφημα που έχει προκύψει είναι ένας v–κύβος.



Σχήμα 4.22
1 – κύβος (α) και 2 – κύβος (β)

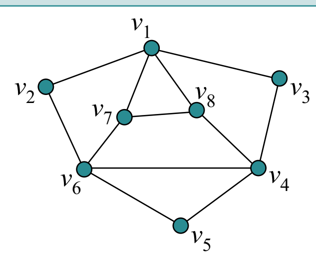
Τίθεται το εξής ερώτημα: Υπάρχει κύκλος του Hamilton σε ένα v–κύβο; Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για να υπάρχει κύκλος σε ένα v–κύβο θα πρέπει $v \geq 2$ αφού ο 1–κύβος έχει μόνο μία ακμή και επομένως δεν περιέχει κύκλους. Επομένως, ένας v–κύβος περιέχει κύκλο Hamilton, εάν και μόνο εάν $v \geq 2$ και υπάρχει μία ακολουθία σ_1, σ_2, σ_3, …, σ_{2^v}, όπου κάθε σ_i είναι ένας δυαδικός αριθμός με v δυαδικά ψηφία, και ικανοποιούνται τα εξής:

- κάθε δυαδικός αριθμός v δυαδικών ψηφίων εμφανίζεται μόνο μία φορά στην ακολουθία
- δύο διαδοχικοί δυαδικοί αριθμοί διαφέρουν σε ένα δυαδικό ψηφίο.
- ο σ_{2^v} και ο σ_1 διαφέρουν σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Μία τέτοια ακολουθία, όπως αναφέρθηκε και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.17 καλείται **κώδικας Gray**. Οταν $v \geq 2$, τότε η ακολουθία σ_1, σ_2, σ_3, …, σ_{2^v}, σ_1 αντιστοιχεί σε έναν κύκλο Hamilton του v–κύβου. Για να δείξουμε ότι κάθε v–κύβος έχει έναν κύκλο του Hamilton, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε v, άρα και για $v \geq 2$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κώδικα Gray. Αυτό έχει ήδη δειχθεί στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.17 Επομένως, **κάθε v–κύβος έχει έναν κύκλο Hamilton, για $v \geq 2$.**

Δραστηριότητα 4.4

Να δείξετε αν το γράφημα του σχήματος 4.23 έχει κύκλο Hamilton. Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.



Σχήμα 4.23
Γράφημα

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εξαλείψετε ακμές από κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο του 2.

4.3.2 Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Το **πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή** σχετίζεται με την εύρεση κύκλου Hamilton σε γράφημα με βάρη. Θεωρήστε ότι το γράφημα του σχήματος 4.18(β) αποτυπώνει ένα χάρτη δρόμων μεταξύ πόλεων. Ο πωλητής ξεκινάει από την πόλη α, θέλει να επισκεφθεί κάθε πόλη του χάρτη με τον οικονομικότερο τρόπο και να επιστρέψει στην πόλη α. Όπως είναι προφανές, το καλύτερο που θα μπορούσε να επιτύχει ο πωλητής είναι να επισκεφθεί την κάθε πόλη ακριβώς μια φορά, επιλέγοντας στο γράφημα που παριστά το χάρτη το μονοπάτι με το μικρότερο μήκος που περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος. Συνεπώς, ο πωλητής ζητά το μικρότερο κύκλο Hamilton στο υπάρχον γράφημα.

Γενικά, το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

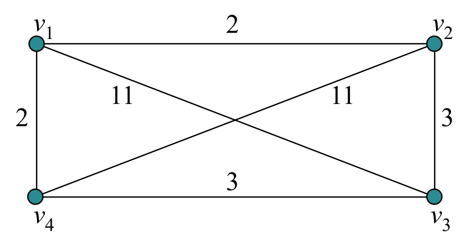
Δοθέντος ενός γραφήματος με βάρη Γ, να βρεθεί κύκλος του Hamilton στο Γ που να είναι ελαχίστου μήκους (ο μικρότερος κύκλος Hamilton). **Κυκλικό μονοπάτι** σε γράφημα $\Gamma = (V, E)$ καλείται κάθε μονοπάτι $(v_1, \ldots, v_n)$ με $v_1 = v_n$.

Φυσικά, μπορεί να υπάρχει κυκλικό μονοπάτι στο Γ που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος με μήκος μικρότερο του μικρότερου κύκλου Hamilton. Αργότερα θα δείξουμε ότι τα δύο αυτά προβλήματα (εύρεσης μικρότερου κύκλου Hamilton και εύρεσης μικρότερου κυκλικού μονοπατιού που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος) συμπίπτουν για ειδική κατηγορία γραφημάτων.

Παράδειγμα 4.14

Ο κύκλος $K = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ στο γράφημα του σχήματος 4.24 είναι ο μικρότερος κύκλος Hamilton για τον εν λόγω γράφημα.

Σχήμα 4.24
Γράφημα με βάρη: Να βρεθεί ο μικρότερος κύκλος Hamilton.



Ορισμός 4.20: Έστω $\Gamma = (E, V)$ απλό γράφημα για το οποίο ισχύει η εξής συνθήκη:

Για κάθε τριάδα διαφορετικών κορυφών v_1, v_2, v_3 του γραφήματος ισχύει ότι:

$$w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) \geq w(v_1, v_3).$$

Όπου $w(v_i, v_j)$ το βάρος της ακμής (v_i, v_j).

Το γράφημα Γ καλείται **Ευκλείδειο γράφημα (Euclidian graph).** Παρατηρήστε ότι ένα Ευκλείδειο γράφημα πρέπει να είναι πλήρες.

Θεώρημα 4.2

Εάν το Γ είναι Ευκλείδειο γράφημα και K κυκλικό μονοπάτι στο Γ με το μικρότερο δυνατό μήκος το οποίο περιέχει την κάθε κορυφή του γραφήματος, τότε υπάρχει κύκλος του Hamilton στο Γ με μήκος ίσο με αυτό του K.

Απόδειξη

Η ιδέα είναι απλή. Εάν το K έχει μία κορυφή u περισσότερες από μια φορές, τότε για να προκύψει κύκλος Hamilton θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το K τις επαναλήψεις της κορυφής αυτής.

Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η u είναι η πρώτη κορυφή στην κυκλική διαδρομή K. Επομένως, η διαδρομή K θα έχει την εξής μορφή $K = (\boldsymbol{u}, v_1, v_2, \ldots, v_k, \boldsymbol{u}, v'_1, v'_2, \ldots, \boldsymbol{u})$. Αφού το γράφημα είναι Ευκλείδειο, θα υπάρχει ακμή (v_k, v'_1) σε αυτό (ώστε να εξαλείψουμε την —όποια— ενδιάμεση εμφάνιση της u) και ισχύει ότι $u(v_k, u) + u(u, v'_1) \geq u(v_k, v'_1)$. Επομένως, το κυκλικό μονοπάτι $K' = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k, v'_1, v'_2, \ldots, u)$, που προκύπτει από το K με την αντικατάσταση των (v_k, u) και (u, v'_1) από την ακμή (v_k, v'_1), έχει μήκος ίσο ή μικρότερο της K. Από την υπόθεση όμως, το μονοπάτι K έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. Συνεπώς, το μήκος της K' θα πρέπει να είναι αναγκαστικά ίσο με το μήκος της K. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή για κάθε επαναλαμβανόμενη κορυφή στο K', τελικά καταλήγουμε σε έναν κύκλο του Hamilton για τον Γ.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, το *πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή* και το πρόβλημα εύρεσης της *μικρότερης κυκλικής διαδρομής* σε ένα πλήρες γράφημα με βάρη είναι το αυτό πρόβλημα, εάν το γράφημα είναι Ευκλείδειο. Στη γενική περίπτωση δεν είναι το ίδιο πρόβλημα.

Όπως προαναφέρθηκε, για την επίλυση του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή σε ένα οποιαδήποτε γράφημα, θα πρέπει να εφαρμοστεί ένας αλγόριθμος που απαριθμεί τις δυνατές λύσεις και μεταξύ αυτών επιλέγει τη βέλτιστη.

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος με αποδοτικότερο τρόπο, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε ένα προσεγγιστικό αλγόριθμο. Δηλαδή, έναν αλγόριθμο που θα θυσιάζει την *καλύτερη* δυνατή λύση με μια *καλή* λύση για χάρη της αποδοτικότητας.

Ένας τέτοιος αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος του **πλησιέστερου γείτονα** (nearest neighbor), που κατασκευάζει έναν κύκλο Hamilton σε γράφημα, «ταξιδεύοντας» κάθε φορά στην πλησιέστερη γειτονική κορυφή της τρέχουσας κορυφής στην οποία ευρίσκεται, εφόσον σε αυτή δεν έχει γίνει ακόμη επίσκεψη.

Αλγόριθμος 4.1.: Αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα.

Είσοδος: Γράφημα $\Gamma = (V, E)$, w συνάρτηση βάρους (σε κάθε ακμή προσδίδει ένα θετικό πραγματικό αριθμό που είναι το βάρος της ακμής), αρχική κορυφή v.

Έξοδος: Προσέγγιση του μικρότερου κύκλου Hamilton.

Procedure nearest–neighbor (Γ=(V, E), w, v)

Begin

1. For (x στο V) do L(x):=0

/*L(x) είναι ο αριθμός εμφάνισης της κορυφής x στο μονοπάτι που αποτελεί την προσέγγιση. $L(x) = 0$ σημαίνει ότι στη x δεν έχει γίνει ακόμη επίσκεψη.*/

1. L(v):=1

2. last_visited:=v

3. While (υπάρχει κορυφή x με L(x)=0) do

a. Begin

b. Για τις κορυφές με L(y)=0, επέλεξε την κορυφή με το μικρότερο w(last_visited, y).

c. last_visited:=y

d. L(y):=L(last_visited)+1

e. End

4. For i=1 to L(last_visited) do τύπωσε την κορυφή x με L(x)=i.

End nearest–neighbor

Μια εναλλακτική διατύπωση του αλγορίθμου του πλησιέστερου γείτονα είναι η παρακάτω:

Αλγόριθμος 4.2.: Αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα.

1. Άρχισε με την κορυφή v. $P_1 := (v)$.
2. Επανάλαβε το βήμα 3 έως ότου η προσέγγιση του πλησιέστερου γείτονα έχει προκύψει.
3. Δεδομένου ενός μονοπατιού $P^{\kappa} = (v, v_1, v_2, \ldots, v_{\kappa})$, εξέτασε το γράφημα για τυχόν κορυφές στις οποίες δεν έχει γίνει ακόμα επίσκεψη.

   Εάν δεν υπάρχουν, τότε το μονοπάτι $(v, v_1, v_2, \ldots, v_{\kappa}, v)$ είναι η προσέγγιση του πλησιέστερου γείτονα.

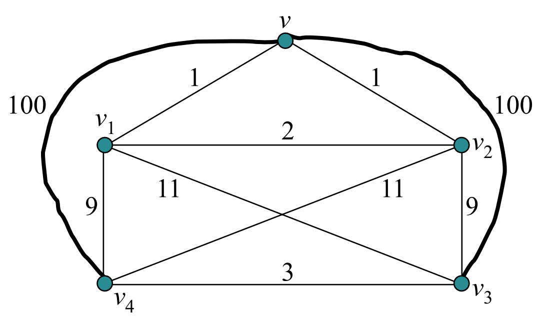
   Εάν υπάρχουν, επέλεξε την πλησιέστερη κορυφή $v_{\kappa+1}$ στη v_{κ} και θέσε $P_{\kappa+1} :=$ $(v, v_1, v_2, \ldots, v_{\kappa}, v_{\kappa+1})$.

Σημειώστε ότι η προσέγγιση μπορεί να εξαρτάται από την αρχική κορυφή v.

Η προσέγγιση μπορεί τελικά να είναι ο μικρότερος κύκλος του Hamilton, αλλά αυτό δεν συμβαίνει κατ΄ ανάγκη.

Παράδειγμα 4.15

Θα δείξω την εφαρμογή του αλγορίθμου του πλησιέστερου γείτονα στο γράφημα του σχήματος 4.25.



Σχήμα 4.2

Γράφημα με βάρη: Προσεγγίστε το μικρότερο κύκλο Hamilton.

Ως αρχική κορυφή δίνεται η κορυφή v.

Κατά το πρώτο βήμα του αλγορίθμου,

$P_1 = (v)$. Οι πλησιέστερες κορυφές στη v είναι οι v_1 και v_2 με απόσταση από τη v ίση με 1. Επιλέγουμε μια από τις δύο, έστω τη v_2.

$P_2 = (v, v_2)$. Η πλησιέστερη κορυφή στη v_2 στην οποία δεν έχει γίνει ακόμη επίσκεψη είναι η v_1. Εδώ ακριβώς φαίνεται και ο τρόπος που λειτουργεί ο προσεγγιστικός αλγόριθμος: Ενώ σε εμάς φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο μικρότερος κύκλος Hamilton στο εν λόγω γράφημα είναι ο $(v, v_2, v_3, v_4, v_1, v)$ με συνολικό μήκος ίσο με 23, ο αλγόριθμος δεν έχει μια συνολική άποψη της κατάστασης ώστε να κρίνει ποιο είναι το καλύτερο δυνατό βήμα, αλλά κρίνει με βάση την τρέχουσα κατάστασή του (δηλαδή ανάλογα με την κορυφή στην οποία βρίσκεται). Κατ' αυτό τον τρόπο επιλέγει ως επόμενη κορυφή τη v_1, η οποία θα οδηγήσει τελικά σε μια μη βέλτιστη λύση.

$P_3 = (v, v_2, v_1)$. Η επόμενη κορυφή που επιλέγεται είναι η v_4 και η μεθεπόμενη η v_3. Το μονοπάτι διαμορφώνεται ως εξής:

$P_3 = (v, v_2, v_1, v_4, v_3)$. Στο σημείο αυτό ο αλγόριθμος έχει επισκεφθεί όλες τις κορυφές του γραφήματος και «αναγκάζεται» να χρησιμοποιήσει μια ακμή πολύ μεγάλου κόστους για να επιστρέψει στη v. Τελικά το μονοπάτι που κατασκευάζεται ως προσέγγιση του πλησιέστερου γείτονα είναι το $P_3 = (v, v_2, v_1, v_4, v_3, v)$ με μήκος ίσο με 115!

Παρατηρήστε επίσης ότι η προσέγγιση που προκύπτει εξαρτάται από την αρχική κορυφή. Τρέξτε τον αλγόριθμο με αρχική κορυφή τη v_3 και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το μικρότερο κύκλο Hamilton στο εν λόγω γράφημα.

Δραστηριότητα 4.5

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο του πλησιέστερου γείτονα στο γράφημα του σχήματος 4.25, ξεκινώντας από την κορυφή v_1. Δείξτε τη σειρά εκτέλεσης των βημάτων και τον ακριβή τρόπο εκτέλεσής τους.

Υπόδειξη: $(v_1, v, v_2, v_3, v_4, v_1)$.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ορίζεται η έννοια του κύκλου Hamilton. Παρουσιάζεται μεθοδολογία ανίχνευσης ύπαρξης κύκλων Hamilton σε γραφήματα και συγκρίνεται το πρόβλημα ύπαρξης κύκλων Hamilton με το πρόβλημα ύπαρξης κύκλων Euler. Τέλος, παρουσιάζεται το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και επιχειρείται σύνδεση του προβλήματος αυτού με το πρόβλημα της εύρεσης του μικρότερου κύκλου Hamilton σε γράφημα με βάρη. Παρουσιάζεται ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα που προσεγγίζει το μικρότερο κύκλο Hamilton.

4.4 Εύρεση μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξυ κορυφων σε γράφημα με βάρη

Σκοπός

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ενός ακριβούς αλγορίθμου για την εύρεση του μήκους του μικρότερου μονοπατιού που συνδέει δύο κορυφές σε ένα γράφημα. Η ενότητα όχι μόνο παρουσιάζει τον αλγόριθμο, αλλά αποδεικνύει και την ορθότητά του.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα :

- *Σας βοηθήσει να αποκτήσετε την εμπειρία ενός από τους πλέον βασικούς αλγορίθμους σε γραφήματα,*
- *Σας εισαγάγει στη χρήση αποδεικτικών διαδικασιών, και κυρίως της μαθηματικής επαγωγής, για την απόδειξη της ορθότητας αλγορίθμων.*

Έννοιες κλειδιά

- *μικρότερο μήκος μονοπατιού μεταξύ κορυφών*
- *αλγόριθμος Dijkstra*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Σε γραφήματα με βάρη, συχνά ζητείται να βρεθεί το μονοπάτι με το μικρότερο μήκος που ενώνει δύο κορυφές. Η παρούσα ενότητα αποτελεί μάλλον ένα εκτεταμένο παράδειγμα ενός διάσημου αλγόριθμου, που μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα της εύρεσης του μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δεδομένων κορυφών ενός γραφήματος, και αποδεικνύει την ορθότητά του.

Ως γνωστό, το μήκος ενός μονοπατιού σε ένα γράφημα με βάρη είναι ίσο με το άθροισμα των βαρών των ακμών που αποτελούν το μονοπάτι.

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει τον αλγόριθμο του Dijkstra που λύνει το πρόβλημα εύρεσης του μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών σε γράφημα με βάρη.

Στη συνέχεια θεωρώ ότι τα γραφήματα στα οποία αναφέρομαι είναι συνδεόμενα γράφηματα με βάρη. Θεωρώ επίσης ότι τα βάρη είναι θετικοί αριθμοί και ότι θέλουμε να βρούμε το μικρότερο μονοπάτι από μια αρχική κορυφή που συμβολίζεται α σε μια τελική κορυφή που συμβολίζεται z.

Ο αλγόριθμος του Dijkstra λύνει το πρόβλημα εύρεσης του μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών α και z ενός συνδεόμενου γραφήματος Γ με βάρη, με την αποτίμηση κάποιων ετικετών για τις κορυφές του Γ. Έστω L(v) η ετικέτα της κορυφής v του Γ. Η τιμή της ετικέτας είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την αρχική κορυφή α στην κορυφή v, που είναι γνωστό από τον αλγόριθμο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου οι ετικέτες κάποιων κορυφών αλλάζουν (εφόσον ο αλγόριθμος βρίσκει μονοπάτια που έχουν μήκος μικρότερο του υποτιθέμενου μέχρι εκείνη τη στιγμή μικρότερου μήκους), ενώ κάποιες από τις κορυφές αποκτούν μόνιμες ετικέτες (εφόσον είναι βέβαιο ότι δεν υπάρχει μονοπάτι με μήκος μικρότερο από το γνωστό). Το σύνολο των προσωρινών ετικετών θα το συμβολίσουμε με T[1]. Στο τέλος του αλγόριθμου, η ετικέτα L(v) κάθε κορυφής είναι ίση με το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στην v.

Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 4.3.: Αλγόριθμος Dijkstra.

Είσοδος –Ενα συνδεόμενο γράφημα με θετικά βάρη.

Οι κορυφές α και z.

Εξοδος – $L(z)$ το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στη z.

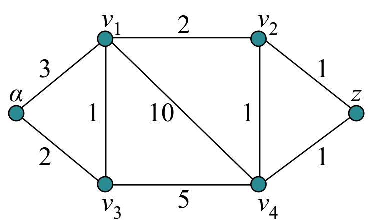
1. **procedure** dijkstra(a, z)
2. L(a) :=0
3. **for** all vertices x in V, **do**
4.   L(x) :=∞
5. T:= set of vertices
6. **while** z∈T **do**
7.   **begin**
8.   επέλεξε κορυφή v∈T με το μικρότερο L(v)
9.   T:=T–{v}
10.   **for** κάθε κορυφή x∈T γειτονική της v **do**

[1]Παρατηρήστε ότι $T=V-\Sigma$, όπου V το σύνολο κορυφών του γραφήματος και Σ το σύνολο των κορυφών με μόνιμες ετικέτες.

```
11.      L(x):=min{L(x), L(v)+w(v, x)}
12.      end
13.end dijkstra.
```

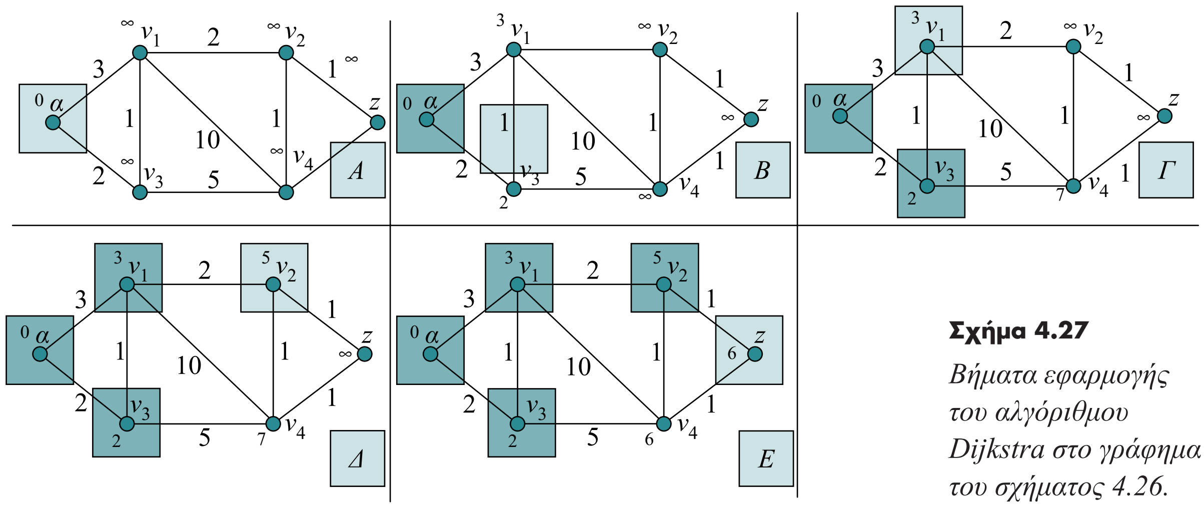
Παράδειγμα 4.16

Η εφαρμογή του αλγορίθμου Dijkstra στο γράφημα του παρακάτω σχήματος 4.26, με αρχική κορυφή την α και τελική τη z, φαίνεται στο σχήμα 4.27.



Σχήμα 4.26
Γράφημα με βάρη: Να βρεθεί το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στη z.

Κατά την πρώτη εκτέλεση των εντολών 7 – 11 επιλέγεται η αρχική κορυφή α, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.27(Α). Η ετικέτα της α γίνεται μόνιμη (η α αφαιρείται από το σύνολο τ στην εντολή 9 – αυτό φαίνεται με το σκούρο τετράγωνο του σχήματος 4.27(Β)) και ενημερώνονται οι ετικέτες των γειτονικών κορυφών της που ανήκουν στο T, δηλαδή των v_1 και v_3, σύμφωνα με τον τύπο της εντολής 11. Κατόπιν επιλέγεται η κορυφή με τη μικρότερη ετικέτα, δηλαδή η v_3, και με παρόμοιο τρόπο, όπως και προηγουμένως, ενημερώνεται η ετικέτα της γειτονικής της κορυφής που ανήκει στο T, δηλαδή της v_4. Η v_3 αφαιρείται από το T και επιλέγεται η κορυφή v_1 – όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.27(Γ). Κατά την ενημέρωση των γειτονικών κορυφών της v_1, που είναι οι v_2 και v_4, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αλλάζει μόνο η ετικέτα της v_2 σύμφωνα με τον τύπο της εντολής 11. Για την κορυφή v_4 ισχύει ότι $L(v_4) = \min(L(v_4), L(v_1) + w(v_1, v_4)) = \min(7, 13) = 7$.



Σχήμα 4.27
Βήματα εφαρμογής του αλγόριθμου Dijkstra στο γράφημα του σχήματος 4.26.

Επομένως η ετικέτα της v_4 δεν αλλάζει, εφόσον το μονοπάτι μέσω της v_1 είναι μακρύτερο από ότι το μονοπάτι που έδωσε την ετικέτα «7» στην κορυφή αυτή (ο αλγόριθμος δεν «θυμάται» μονοπάτια, μόνο το μήκος του μικρότερου γνωστού μονοπατιού).

Στο σχήμα 4.27(Δ) η κορυφή στο σύνολο T με το μικρότερο L είναι η v_2. Η επιλογή της οδηγεί τον αλγόριθμο στην αφαίρεσή της από το T και την ενημέρωση των γειτονικών της κορυφών, δηλαδή των v_4 και z. Και εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε πως αλλάζει η ετικέτα της v_4

$$L(v_4) = \min(L(v_4), L(v_2) + w(v_2, v_4)) = \min(7, 6) = 6$$

ακριβώς επειδή το μονοπάτι από την α προς την v_4 μέσω της v_2 έχει μικρότερο μήκος από οποιοδήποτε άλλο μονοπάτι από την α στη v_4. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται ότι $L(z) = 6$.

Στην τελευταία εκτέλεση της ανακύκλωσης 7 – 11 επιλέγεται η v_4 ή η z με L ίσο με 6. Η επιλογή της z τερματίζει τον αλγόριθμο με $L(z) = 6$, που είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στη z.

Θεώρημα 4.3

Ο αλγόριθμος του Dijkstra βρίσκει πάντοτε το μήκος του μικρότερου μονοπατιού που συνδέει τις κορυφές α και z.

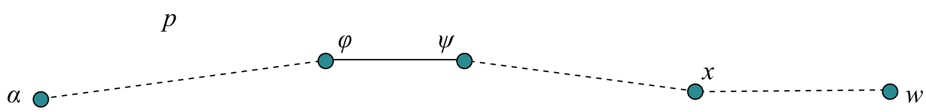
Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά ως προς τον αριθμό εκτέλεσης της γραμμής 8 του αλγόριθμου. Δηλαδή, αποδεικνύουμε ότι την v–οστή φορά που ο αλγόριθμος περνάει από τη γραμμή 8 και επιλέγει κορυφή v η τιμή της ετικέτας $L(v)$ είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από το α στο v. Επομένως, όταν επιλεγεί η κορυφή z, το $L(z)$ θα είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από το α στη z.

Βασικό βήμα ($v = 1$). Την πρώτη φορά όπου ο αλγόριθμος φθάνει στη γραμμή 8, λόγω των εντολών 2, 3, 4, $L(\alpha) = 0$, ενώ οι ετικέτες L των υπόλοιπων κορυφών είναι ∞. Άρα, σωστά επιλέγεται η α, εφόσον για αυτή την κορυφή το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α είναι 0.

Επαγωγικό βήμα. Έστω ότι την κ – οστη φορά που ο αλγόριθμος φθάνει στη γραμμή 8, $\kappa < v$, επιλέγεται η κορυφή v, όπου $L(v)$ είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στην v.

Αν τη v–οστή φορά που ο αλγόριθμος φθάνει στη γραμμή 8 επιλέγεται η κορυφή w, με $w \in T$ και με το μικρότερο $L(w)$, θα δείξω ότι, εάν υπάρχει ένα μονοπάτι από την α σε μια κορυφή x της οποίας το μήκος είναι μικρότερο του $L(w)$, η x δεν ανήκει στο T (με άλλα λόγια η x θα έχει επιλεγεί σε προηγούμενη εκτέλεση της εντολής 8).



Σχήμα 4.28
Μονοπάτι από την α στη w και ενδιάμεσες κορυφές.

Έστω ότι η κορυφή x βρίσκεται στο T και p το μικρότερο μονοπάτι από την $α$ στη x, όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.28. Έστω $ψ$ η κορυφή του p που βρίσκεται πιο κοντά στην $α$, τέτοια ώστε $ψ \in T$ (η $ψ$ μπορεί να είναι και η x). Έστω $φ$ η προηγούμενη κορυφή της $ψ$ στο p. Επομένως, η $φ$ δεν ανήκει στο T και έχει επιλεγεί σε προηγούμενη εκτέλεση της 8. Από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος, το $L(φ)$ είναι το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την $α$ στην $φ$. Ισχύει όμως ότι

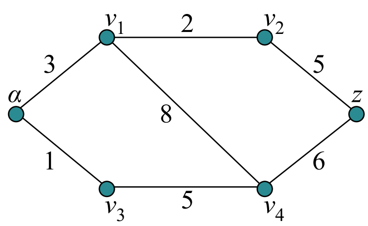
$$L(ψ) \leq L(φ) + w(φ, ψ) \leq \text{μήκος του } p < L(w)$$

που συνεπάγεται ότι στο T η w δεν είναι η κορυφή με το μικρότερο L, αλλά η $ψ$. Αυτή η πρόταση έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση, και επομένως η x δεν μπορεί να ανήκει στο T.

Η απόδειξη λοιπόν έδειξε ότι, εάν υπήρχε ένα μονοπάτι από την $α$ στη w με μήκος μικρότερο του $L(w)$, τότε η w θα είχε επιλέγει νωρίτερα (δηλαδή σε προηγούμενη εκτέλεση της εντολής 8). Επομένως, κάθε μονοπάτι από την $α$ στην w έχει μήκος τουλάχιστον $L(w)$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.11

Εφαρμόσετε τον αλγόριθμο Dijkstra στο γράφημα του σχήματος 4.29 με αρχική κορυφή την $α$ και τελική τη z:



Σχήμα 4.29
Συνδεόμενο γράφημα με βάρη

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.12

Να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο του Dijkstra που διατυπώθηκε παραπάνω, ώστε να βρίσκει όχι μόνο το μήκος του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών ενός γραφήματος, αλλά και το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ αυτών.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.13

Δεδομένου ενός γραφήματος $Γ$, δύο κορυφών αυτού v_1, v_n και του μικρότερου μονοπατιού $p = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ που συνδέει τις κορυφές αυτές, να δειχτεί ότι για κάθε $κ$, $1 \leq κ \leq n$, το μονοπάτι $p' = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ από την κορυφή v_1στη v_k, που προκύπτει από το μονοπάτι p, είναι το μικρότερο μονοπάτι από την v_1 στη v_k.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος Dijkstra για την εύρεση του μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών συνδεόμενου γραφήματος. Η ενότητα επέδειξε την εφαρμογή του αλγόριθμου σε γράφημα και απέδειξε την ορθότητά του.

4.5 Παράσταση γραφημάτων

Σκοπός

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται δύο βασικοί τρόποι παράστασης γραφημάτων για το χειρισμό και την αξιοποίηση των γραφημάτων από υπολογιστικές μεθόδους: τα μητρώα σύνδεσης και τα μητρώα εφαπτόμενων ακμών. Εξετάζονται οι ιδιότητες των αναπαραστάσεων και ελέγχεται για ποιες κατηγορίες γραφημάτων οι αναπαραστάσεις αυτές είναι «πιστές».

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Με την παρούσα ενότητα θα έχετε τη δυνατότητα:

- *Παράστασης γραφημάτων με συγκεκριμένες δομές και αξιοποίηση αυτών από τυπικές υπολογιστικές μεθόδους,*
- *Επιλογής μεταξύ διαφορετικών παραστάσεων γραφημάτων με βάση τις αδυναμίες και τις δυνατότητες εναλλακτικών αναπαραστάσεων,*
- *Αξιοποίησης των βασικών μεθόδων παράστασης για την εξαγωγή συμπερασμάτων όσο αφορά στη δομή και πολυπλοκότητα των γραφημάτων (π.χ. βαθμοί κορυφών, αριθμοί μονοπατιών συγκεκριμένου μήκους κοκ).*

Έννοιες κλειδιά

- *μητρώο σύνδεσης*
- *μητρώο εφαπτόμενων ακμών*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

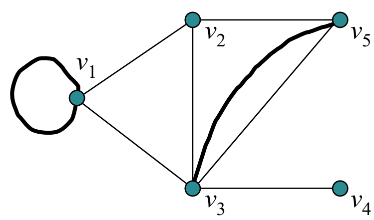
Για την εφαρμογή αλγορίθμων σε γραφήματα, απαιτείται μια τυπική αναπαράσταση των γραφημάτων, πέρα από τη σχεδίασή τους. Τέτοιες μέθοδοι, όχι οι μοναδικές, είναι τα μητρώα σύνδεσης και τα μητρώα εφαπτόμενων ακμών.

4.5.1 Μητρώα σύνδεσης

Ορισμός 4.21: Έστω γράφημα $Γ = (V, E)$, και μία διάταξη των κορυφών του γραφήματος αυτού, $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_ν)$. **Μητρώο σύνδεσης (Adjacency matrix)** του γραφήματος $Γ$ με $ν$ κορυφές είναι ένας πίνακας A διαστάσεων $νxν$, του οποίου η γραμμή (στήλη) i, $1 \le i \le ν$, αντιστοιχεί στην κορυφή v_i. Το στοιχείο $A[i, j]$ του πίνακα είναι ίσο με 1, εάν και μόνο εάν υπάρχει ακμή στον $Γ$ που συνδέει τις κορυφές v_i και v_j. Στην αντίθετη περίπτωση, η τιμή του $A[i, j]$ είναι 0.

Παράδειγμα 4.17

Το μητρώο σύνδεσης του γραφήματος $Γ$ στο σχήμα 4.30 είναι το A στον πίνακα 4.1.



Σχήμα 4.30
Μη απλό γράφημα

Πίνακας 4.1
Μητρώο σύνδεσης του γραφήματος στο σχήμα 4.30.

$$
A = \begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Για τη δημιουργία του μητρώου σύνδεσης A θεώρησα την εξής διάταξη των κορυφών:

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5$$

Η μοναδική περίπτωση για να είναι ένα στοιχείο (i, i) της διαγωνίου ίσο με τη μονάδα είναι να υπάρχει ανακύκλωση στην αντίστοιχη κορυφή του γραφήματος. Για παράδειγμα το στοιχείο $A[1, 1]$ του παραπάνω μητρώου σύνδεσης είναι ίσο με τη μονάδα, διότι υπάρχει ανακύκλωση στην κορυφή v_1 του γραφήματος στο σχήμα 4.30.

Παρατηρήστε ότι οι παράλληλες ακμές δεν αναπαρίστανται από ένα μητρώο σύνδεσης, εφόσον εξ ορισμού το κάθε στοιχείο του παριστά αν υπάρχει ή όχι σύνδεση μεταξύ δύο κορυφών. Μια πιθανή επέκταση του ορισμού του μητρώου σύνδεσης θα ήταν το κάθε στοιχείο του να παίρνει θετική ακέραια τιμή, ανάλογα με τον αριθμό των παράλληλων ακμών που συνδέουν το αντίστοιχο ζεύγος κορυφών του.

Ο βαθμός μιας κορυφής σε απλό γράφημα είναι ίσος με το άθροισμα των στοιχείων της στήλης ή της γραμμής του μητρώου σύνδεσης που αντιστοιχεί στην κορυφή αυτή. Αυτό συμβαίνει μόνο για απλά γραφήματα, διότι οι ανακυκλώσεις σε ένα μητρώο σύνδεσης δεν υπολογίζονται σωστά στο βαθμό μιας κορυφής (θυμηθείτε ότι μια ανακύκλωση μετράει «2» στο βαθμό της κορυφής στην οποία εφάπτεται), ενώ οι παράλληλες ακμές δεν παρίστανται καν.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι τα μητρώα σύνδεσης αποτελούν πιστές παραστάσεις μόνο απλών γραφημάτων.

Αν θεωρήσουμε ότι το κάθε στοιχείο $A[i, j]$ ενός μητρώου σύνδεσης δείχνει τον αριθμό μονοπατιών μήκους 1 από τη κορυφή v_i στη κορυφή v_j (δηλαδή 0 ή 1), τότε το παρακάτω θεώρημα γενικεύει αυτήν την παρατήρηση για το μητρώο A^v, $v > 0$.

Θεώρημα 4.4

Εάν A είναι το μητρώο σύνδεσης ενός απλού γραφήματος $Γ$, τότε το στοιχείο i, j του πίνακα A^v είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους v, $v > 0$, από την κορυφή v_i στη κορυφή v_j του γραφήματος $Γ$.

Απόδειξη

Το θεώρημα θα αποδειχτεί επαγωγικά, ως προς το v, $v > 0$.

Βασικό βήμα. Για $v = 1$ κάθε στοιχείο i, j του πίνακα A, εξ ορισμού, δείχνει την ύπαρξη μιας ακμής από την κορυφή v_i στη κορυφή v_j του γραφήματος. Κάθε ακμή είναι ένα μονοπάτι μήκους 1. Επομένως, δεδομένου ότι το γράφημα είναι απλό, κάθε στοιχείο του πίνακα A είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους 1 από την κορυφή v_i στη κορυφή v_j του γραφήματος $Γ$.

Επαγωγικό βήμα. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για v, $v > 0$. Θα δειχτεί ότι το θεώρημα ισχύει για $v + 1$.

Γνωρίζουμε ότι $A^{v+1} = A^v A$. Έστω η γραμμή j του πίνακα A^v και η στήλη k του πίνακα A. Τότε το στοιχείο (j, k) του πίνακα A^{v+1} προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της γραμμής j του A^v και της στήλης k του A:

$$\begin{array}{cc} & k \text{ στήλη του } A \\ j \text{ γραμμή του } A^v \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_v \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_v \end{pmatrix} = \Big((s_1 \cdot t_1) + (s_2 \cdot t_2) + \ldots + (s_v \cdot t_v)\Big) = A^{v+1}[j,k]. \end{array}$$

Από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος ισχύει ότι κάθε στοιχείο s_i, $1 \leq i \leq v$, του πίνακα A^v είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους v μεταξύ των κορυφών v_i, v_j του γραφήματος. Το αντίστοιχο στοιχείο t_i, $1 \leq i \leq v$, του πίνακα A είναι 1, εάν υπάρχει ακμή στο $Γ$ που συνδέει τις κορυφές v_i, v_k του γραφήματος $Γ$, και 0 στην αντίθετη περίπτωση. Στην περίπτωση όπου $t_i = 1$, $(s_i \cdot t_i) = s_i$, είναι ο αριθμός μονοπατιών από την κορυφή v_j στην κορυφή v_k *μέσω* της *vι*, διότι από την v_j στη v_i υπάρχουν s_i μονοπάτια μήκους v και από την v_i στη v_k υπάρχει μια ακμή. Προσθέτοντας την ακμή αυτή στο τέλος κάθε μονοπατιού από τη v_j στη v_i, παίρνουμε s_i μονοπάτια μήκους $v + 1$ από την v_j στη v_k *μέσω* της v_i.

Στην περίπτωση που το στοιχείο t_i, $1 \leq i \leq v$, του πίνακα A είναι 0, δεν υπάρχει ακμή στο $Γ$ που συνδέει τις κορυφές v_i, v_k του γραφήματος $Γ$. Επομένως, δεν υπάρχει μονοπάτι από την v_j στη v_k μέσω της v_i. Αθροίζοντας όλα τα γινόμενα, έχουμε σαν αποτέλεσμα τον αριθμό των μονοπατιών από την v_j στη v_k μέσω οποιασδήποτε κορυφής του γραφήματος.

Επομένως, το στοιχείο i, j του πίνακα A^{v+1} είναι ίσο με τον αριθμό των μονοπατιών μήκους $v + 1$, $v > 0$, από την κορυφή v_j στη κορυφή v_k του γραφήματος $Γ$. Η επαγωγική απόδειξη συμπληρώθηκε.

Έστω A το μητρώο σύνδεσης ενός απλού γραφήματος $Γ$. Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του πίνακα A^2 δείχνουν το βαθμό της κάθε κορυφής του γραφήματος. Για να αιτιολογήσετε το γεγονός αυτό, σκεφτείτε ότι κάθε ακμή που εφάπτεται σε μια κορυφή v σχηματίζει μονοπάτι μήκους 2 από τη v στη v.

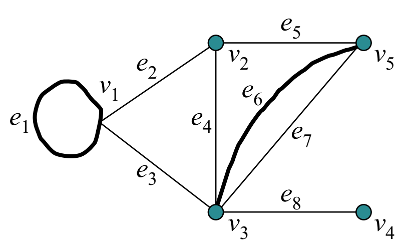
4.5.2 Πίνακας εφαπτόμενων ακμών

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την αναπαράσταση γραφημάτων είναι οι πίνακες εφαπτόμενων ακμών.

Ορισμός 4.22: Έστω γράφημα $\Gamma = (V, E)$, μια διάταξη των κορυφών του γραφήματος αυτού, $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$, και μια διάταξη των ακμών του γραφήματος αυτού, $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_\mu)$. **Πίνακας εφαπτόμενων ακμών** (incidence matrix) του γραφήματος Γ με ν κορυφές και μ ακμές είναι ένας πίνακας A διαστάσεων $\nu x \mu$, του οποίου η γραμμή i, $1 \leq i \leq \nu$, αντιστοιχεί στην κορυφή v_i και η στήλη j, $1 \leq j \leq \mu$ αντιστοιχεί στην ακμή e_j. Το στοιχείο $A[i, j]$ του πίνακα είναι ίσο με 1, εάν και μόνο εάν η ακμή e_j εφάπτεται στην κορυφή v_i. Στην αντίθετη περίπτωση, η τιμή του $A[i, j]$ είναι 0.

Παράδειγμα 4.18

Ο πίνακας εφαπτόμενων ακμών του γραφήματος Γ στο σχήμα 4.31 είναι ο πίνακας 4.2.



Σχήμα 4.31
Μη απλό γράφημα.

Πίνακας 4.2
Πίνακας εφαπτόμενων ακμών του γραφήματος στο σχήμα 4.31.

$$A = \begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Η μοναδική περίπτωση για να έχει μια στήλη του πίνακα εφαπτόμενων ακμών μόνο μια μονάδα είναι η στήλη αυτή να αντιστοιχεί σε ανακύκλωση. Παράδειγμα αυτής της περίπτωσης είναι η στήλη που αντιστοιχεί στην ακμή e_1 του πίνακα 4.2. Παρατηρήστε ότι οι παράλληλες ακμές παρίστανται στο μητρώο εφαπτόμενων ακμών, εφόσον κάθε ακμή (όπως οι e_6 και e_7 παραπάνω) αντιστοιχεί και σε διαφορετική στήλη.

Ο βαθμός μιας κορυφής σε απλό γράφημα είναι ίσος με το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής του πίνακα εφαπτόμενων ακμών που αντιστοιχεί στην κορυφή αυτή. Αυτό συμβαίνει μόνο για απλά γραφήματα, διότι οι ανακυκλώσεις, όπως και σε ένα μητρώο σύνδεσης, δεν υπολογίζονται σωστά στο βαθμό μιας κορυφής.

Δραστηριότητα 4.6

Έστω A είναι το μητρώο σύνδεσης γραφήματος Γ με ν κορυφές και $Y = A + A^2 + \ldots, + A^{\nu-1}$. Αν κάποιο μη διαγώνιο στοιχείο του Y είναι 0, τότε τι μπορείτε να πείτε για το γράφημα Γ;

Υπόδειξη

Τα μη – διαγώνια στοιχεία του A^κ δείχνουν τον αριθμό μονοπατιών μήκους κ μεταξύ των αντίστοιχων κορυφών του γραφήματος. Το μήκος απλού μονοπατιού που συνδέει δύο κορυφές ενός γραφήματος με ν κορυφές μπορεί να είναι ίσο με 1, 2, 3, …, ή (ν–1).

Δραστηριότητα 4.7

Έστω A το μητρώο σύνδεσης του K_5, δ_ν η κοινή τιμή των στοιχείων της διαγωνίου του A^ν και α_ν η κοινή τιμή των μη διαγώνιων στοιχείων του A^ν. Να δειχθούν τα ακόλουθα: (α) $\delta_{\nu+1} = 4\alpha_\nu$, (β) $\alpha_{\nu+1} = \delta_\nu + 3\alpha_\nu$, (γ) $\alpha_{\nu+1} = 4\alpha_{\nu-1} + 3\alpha_\nu$

Υπόδειξη

Σχηματίστε το μητρώο σύνδεσης A του K_5. Επαγωγικά δείξτε τα (α) και (β) παραπάνω, υπολογίζοντας στο επαγωγικό βήμα τα στοιχεία του $A^{\nu+1}$ πολλαπλασιάζοντας το A με το A^ν. Το (γ) αποτελεί απλό συνδυασμό των (α) και (β).

Σύνοψη ενότητας

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάστηκαν δύο τρόποι παράστασης γραφημάτων: το μητρώο σύνδεσης και το μητρώο εφαπτόμενων ακμών. Φυσικά, οι τρόποι αυτοί δεν είναι οι μοναδικοί για την παράσταση γραφημάτων. Ωστόσο, όπως φάνηκε, οι παραστάσεις αυτές διευκολύνουν τον υπολογισμό παραμέτρων που δείχνουν την πολυπλοκότητα απλών γραφημάτων.

4.6 Ισομορφισμοί γραφημάτων

Σκοπός

Η παρούσα ενότητα παρουσιάζει την έννοια τη ισομορφίας γραφημάτων και αποδεικνύει ότι η χρήση μητρώων σύνδεσης για την αναπαράσταση γραφημάτων βοηθά στον έλεγχο της ισομορφίας αυτών. Η ενότητα παρουσιάζει την έννοια της αναλλοίωτης ιδιότητας και δείχνει πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την έννοια αυτή για να δείξετε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισοδύναμα.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας καταστήσει ικανούς να:

- *Διακρίνετε αν δύο γραφήματα είναι «όμοια»*
- *Αποδεικνύετε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα*

Έννοιες κλειδιά

- *ισομορφισμός γραφημάτων*
- *ισόμορφα γραφήματα*
- *αναλλοίωτη ιδιότητα*

Φανταστείτε ότι ζητείται από δύο άτομα να σχεδιάσουν το εξής γράφημα:

$$\Gamma = (\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta), (\delta, \alpha), (\beta, \delta), (\alpha, \gamma)\})$$

Τα γραφήματα που τα άτομα αυτά σχεδιάζουν φαίνονται στο σχήμα 4.32.

Σχήμα 4.32
Ισόμορφα γραφήματα

Προφανώς πρόκειται για το ίδιο γράφημα, που όμως έχει σχεδιαστεί με διαφορετικό τρόπο. Για να αποδώσουμε την έννοια του «ίδιου γραφήματος», λέμε ότι τα γραφήματα είναι ισόμορφα. Δηλαδή υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών τους και μεταξύ των ακμών τους τέτοια, ώστε υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κορυφών στο ένα γράφημα, αν και μόνο αν η αντίστοιχη ακμή της συνδέει τις αντίστοιχες κορυφές στο άλλο γράφημα.

Τα παραπάνω διατυπώνονται μαθηματικά στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.23: Δύο γραφήματα $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ και $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ καλούνται **ισόμορφα γραφήματα (isomorphic graphs),** εάν:

(α) υπάρχει μία συνάρτηση $f{:}V_1 \rightarrow V_2$, 1 – 1 και επί,

(β) υπάρχει συνάρτηση $g{:}E_1 \rightarrow E_2$, 1 – 1 και επί,

(γ) $\forall\ v_1, v_2 \in V_1$ ισχύει ότι, αν $e = (v_1, v_2)$ ανήκει στο E_1 τότε $g(e) = (f(v_1), f(v_2))$ ανήκει στο E_2, και αντιστρόφως.

Το ζεύγος των συναρτήσεων f, g καλείται **ισομορφισμός** του Γ_1 επί του Γ_2.

Έστω δύο ισόμορφα γραφήματα Γ_1 και Γ_2. Τότε από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι δύο κορυφές στον Γ_1 είναι διαδοχικές τότε και μόνο τότε, όταν οι εικόνες τους στον Γ_2, μέσω της f, είναι και αυτές διαδοχικές. Το αντίστροφο ισχύει μόνο στην περίπτωση που τα γραφήματα είναι απλά. Αυτό σας δίνεται ως άσκηση αυτοαξιολόγησης παρακάτω.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.14

Έστω $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ και $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ δύο απλά γραφήματα. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(α) Τα γραφήματα Γ_1 και Γ_2 είναι ισόμορφα,

(β) Υπάρχει μία συνάρτηση $f{:}V_1 \rightarrow V_2$, 1 – 1 και επί τέτοια, ώστε δυο κορυφές στο Γ_1 είναι διαδοχικές, εάν και μόνο εάν οι εικόνες τους στο Γ_2, μέσω της f, είναι διαδοχικές.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.15

Έστω $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ και $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ δύο απλά γραφήματα. Αυτά είναι ισόμορφα, αν και μόνο αν με κάποια διάταξη των κορυφών τους τα μητρώα σύνδεσης τους είναι ίσα.

Υπόδειξη: Για την απόδειξη του αντίστροφου χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης αυτοαξιολόγησης 4.14

Ορισμός 4.24: Ιδιότητα γραφήματος $Γ_1$ καλείται **αναλλοίωτη ιδιότητα (invariant property),** εάν κάθε γράφημα $Γ_2$ ισόμορφο του $Γ_1$ έχει επίσης αυτή την ιδιότητα.

Οι αναλλοίωτες ιδιότητες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί ότι δύο γραφήματα είναι ισόμορφα, και αυτό διότι δυστυχώς δεν γνωρίζουμε ένα σύνολο αναλλοίωτων ιδιοτήτων που να αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ισομορφίας μεταξύ γραφημάτων. Επομένως, οι αναλλοίωτες ιδιότητες χρησιμοποιούνται κυρίως για να δείξουμε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα.

Για να δείξουμε ότι δύο γραφήματα $Γ_1$ και $Γ_2$ δεν είναι ισόμορφα, αρκεί να βρούμε μια αναλλοίωτη ιδιότητα του $Γ_1$ που ο $Γ_2$ δεν έχει, αλλά που θα έπρεπε να την είχε, αν ήταν ισόμορφο του $Γ_1$.

Παράδειγμα 4.19

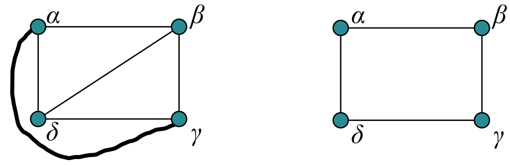
Προφανώς οι ιδιότητες «έχει $ν$ κορυφές» και «έχει $ν$ ακμές» είναι αναλλοίωτες: Η ύπαρξη ισομορφισμού (f, g) μεταξύ δύο ισόμορφων γραφημάτων $Γ_1$ και $Γ_2$ συνεπάγεται ότι, αν το ένα γράφημα έχει μια από αυτές τις ιδιότητες, η ιδιότητα αυτή θα πρέπει να αληθεύει και για το άλλο.

Για παράδειγμα, τα γραφήματα του σχήματος 4.32 είναι ισόμορφα και επομένως οι παραπάνω αναλλοίωτες ιδιότητες ισχύουν για αυτά. Αντιθέτως, το γράφημα $Γ_1$ του σχήματος 4.33(α) έχει την ιδιότητα «έχει 4 κορυφές», η οποία δεν ισχύει στο γράφημα $Γ_2$ του σχήματος 4.33(β). Εφόσον η ιδιότητα «έχει 4 κορυφές» είναι αναλλοίωτη, τα γραφήματα $Γ_1$ και $Γ_2$ δεν είναι ισόμορφα:

(α) (β)

Σχήμα 4.33
Μη ισόμορφα γραφήματα: Η αναλλοίωτη ιδιότητα «έχει 4 κορυφές» δεν ικανοποιείται και στα δύο.

Παρατηρήστε ότι για τα γραφήματα του σχήματος 4.34 ισχύει η αναλλοίωτη ιδιότητα «έχει 4 κορυφές». Αυτά όμως δεν είναι ισόμορφα. Για να δειχθεί αυτό με βάση τις αναλλοίωτες ιδιότητες, αρκεί να βρεθεί μια ιδιότητα που έχει το ένα γράφημα, αλλά δεν ισχύει στο άλλο. Μια τέτοια ιδιότητα είναι η «έχει 4 ακμές»:



Σχήμα 4.34
Μη ισόμορφα γραφήματα: Η αναλλοίωτη ιδιότητα «έχει 4 ακμές» δεν ικανοποιείται και στα δύο.

Μια άλλη ιδιότητα που έχει το ένα γράφημα, αλλά δεν έχει το άλλο είναι η «έχει κορυφή βαθμού 3». Για παράδειγμα, στο ένα γράφημα υπάρχει κορυφή βαθμού 3, ενώ στο άλλο δεν υπάρχει αντίστοιχη κορυφή. Για να δούμε ότι πράγματι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή για να δείξουμε ότι τα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, θα πρέπει να δείξουμε ότι η ιδιότητα «έχει κορυφή βαθμού κ» είναι αναλλοίωτη.

Για να δείξουμε ότι μια ιδιότητα είναι αναλλοίωτη, θεωρούμε δύο ισόμορφα γραφήματα Γ_1 και Γ_2 και θεωρούμε ότι ένα από τα δύο, έστω το Γ_1, έχει την ιδιότητα αυτή. Θα δείξουμε ότι και το Γ_2 έχει αυτήν την ιδιότητα.

Έστω κορυφή v βαθμού κ στο Γ_1, δηλαδή $\delta(v) = \kappa$, και (f, g) ισομορφισμός των Γ_1, Γ_2. Θα δείξω ότι και η $w = f(v)$ έχει βαθμό κ.

Αν $\{e_1, e_2 \ldots, e_\kappa\}$ οι ακμές που εφάπτονται στην κορυφή v, τότε από τον ορισμό της ισομορφίας οι ακμές $\{g(e_1), g(e_2), \ldots, g(e_\kappa)\}$ εφάπτονται στην w. Επομένως, $\delta(v) \leq \delta(w)$. Αν e'_i ακμή του γραφήματος Γ_2 που εφάπτεται στην w, τότε, εφόσον η συνάρτηση g του ισομορφισμού είναι επί των ακμών του Γ_2, θα υπάρχει ακμή e_i του Γ_1, τέτοια ώστε $g(e_i) = e'_i$. Τότε όμως η e_i θα πρέπει να εφάπτεται στην κορυφή v, και επομένως θα πρέπει να είναι μια από τις $\{e_1, e_2 \ldots, e_\kappa\}$. Επομένως, $\delta(w) \leq \delta(v)$. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι $\delta(w) = \kappa = \delta(v)$. Δηλαδή, και το γράφημα Γ_2 έχει κορυφή βαθμού κ. Επομένως, η ιδιότητα «έχει κορυφή βαθμού κ» είναι αναλλοίωτη.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.16

Να δείξετε ότι η ιδιότητα «έχει απλό κύκλο μήκους κ» είναι αναλλοίωτη.

Δραστηριότητα 4.8

Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες ιδιότητες είναι αναλλοίωτες:

(α) Το γράφημα έχει κύκλο Euler

(β) Το γράφημα είναι συνδεόμενο

Υπόδειξη

Ακολουθείστε τη μεθοδολογία που περιγράφθηκε παραπάνω: Θεωρείστε δύο ισόμορφα γραφήματα και υποθέστε ότι η ιδιότητα (α) ή (β) ισχύει για ένα από αυτά. Αποδείξτε ότι θα πρέπει να ισχύει και για το δεύτερο γράφημα.

Δραστηριότητα 4.9

Το συμπληρωματικό απλού γραφήματος Γ είναι το απλό γράφημα $\Sigma(\Gamma)$ με τις ίδιες κορυφές, όπως και το Γ, τέτοιο ώστε μια ακμή υπάρχει στον $\Sigma(\Gamma)$, αν και μόνο αν δεν υπάρχει στον Γ.

Αν Γ_1 και Γ_2 είναι απλοί γράφοι, να δείξετε ότι οι Γ_1 και Γ_2 είναι ισόμορφοι, αν και μόνο αν οι $\Sigma(\Gamma_1)$ και οι $\Sigma(\Gamma_2)$ είναι ισόμορφοι.

Υπόδειξη

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης αυτοαξιολόγησης 4.14

Σύνοψη ενότητας

Η παρούσα ενότητα παρουσίασε την έννοια του ισομορφισμού γραφημάτων. Χρησιμοποίησα την έννοια της αναλλοίωτης ιδιότητας για τον έλεγχο της μη–ισομορφίας γραφημάτων. Επίσης, παρουσιάστηκε μεθοδολογία για τον έλεγχο του αναλλοίωτου μιας ιδιότητας. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορείτε να δείξετε ότι μια ιδιότητα είναι αναλλοίωτη και να τη χρησιμοποιήσετε για να δείξετε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα.

4.7 Επίπεδα γραφήματα

Σκοπός

Γραφήματα που μπορούν να αποτυπωθούν στο επίπεδο έτσι ώστε οι ακμές τους να μη διασταυρώνονται καλούνται επίπεδα γραφήματα και η τελευταία αυτή ενότητα του κεφαλαίου 4 παρουσιάζει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η παρούσα ενότητα θα σας καταστήσει ικανούς να ελέγχετε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο.

Έννοιες κλειδιά

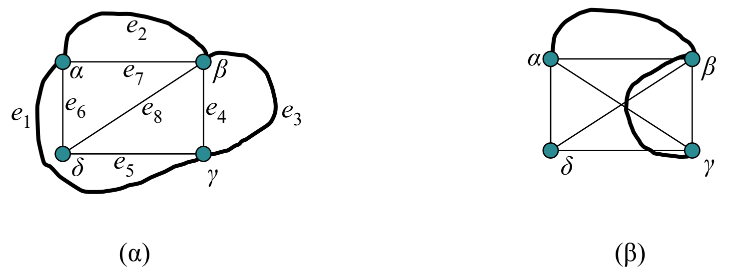
- *επίπεδο γράφημα*
- *αποτύπωση γραφήματος*
- *όψη επιπέδου*
- *βαθμός όψεως*
- *τύπος Euler*
- *θεώρημα Kuratowski*
- *ομοιομορφικά γραφήματα*
- *απλοποίηση σειράς*

Ορισμός 4.25: Ένα γράφημα καλείται **επίπεδο (planar graph),** εάν μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι ακμές του να μη διασταυρώνονται.

Παράδειγμα 4.20

Το πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα σε 3 και 3 κορυφές, $K_{3,3}$, όπως θα δείξουμε και αργότερα, δεν είναι επίπεδο: Δεν υπάρχει τρόπος σχηματισμού του στο επίπεδο, τέτοιος ώστε να μην υπάρχει ένα ζεύγος ακμών του που να διασταυρώνονται.

Αντίθετα, το γράφημα του σχήματος 4.35(β) είναι επίπεδο, εφόσον στο σχήμα 4.35(α) φαίνεται ένα ισόμορφο γράφημα του που δεν έχει ζεύγος ακμών που να διασταυρώνονται.



Σχήμα 4.35 *Το γράφημα (α) αποτελεί αποτύπωση της γραφήματος (β) στο επίπεδο.*

Ορισμός 4.26 Αποτύπωση καλείται κάθε σχηματισμός του γραφήματος στο επίπεδο με μη διασταυρωμένες ακμές.

Ορισμός 4.27 Όψη (view) του επιπέδου καλείται κάθε τμήμα του επιπέδου το οποίο ορίζεται από έναν κύκλο μιας αποτύπωσης του επίπεδου γραφήματος.

Ορισμός 4.28 Βαθμός όψεως (view degree) καλείται ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που καθορίζουν την όψη. Στο βαθμό δεν προστίθενται οι ακμές που εφάπτονται στην όψη δίχως να την καθορίζουν.

Παράδειγμα 4.21

Το γράφημα του σχήματος 4.35(α) είναι μια αποτύπωση του γραφήματος 4.35(β).

Η αποτύπωση του γραφήματος καθορίζει 6 όψεις στο επίπεδο. Παρακάτω αναφέρονται οι κύκλοι που καθορίζουν την κάθε όψη, καθώς και ο βαθμός κάθε όψης:

Α. Σύνορο όψης: (e_1, e_6, e_5). Βαθμός: 3.

Β. Σύνορο όψης: (e_4, e_3). Βαθμός: 2.

Γ. Σύνορο όψης: (e_4, e_5, e_8). Βαθμός: 3.

Δ. Σύνορο όψης: (e_6, e_7, e_8). Βαθμός: 3.

Ε. Σύνορο όψης: (e_2, e_7). Βαθμός: 2.

ΣΤ. Σύνορο όψης: (e_1, e_3, e_2). Βαθμός: 3.

Η τελευταία όψη είναι η «εξωτερική» όψη του επιπέδου σε σχέση με την αποτύπωση του γραφήματος.

Παρατηρήστε ότι για την αποτύπωση του γραφήματος του σχήματος 4.35 ισχύουν τα εξής: (α) αριθμός όψεων (συμβολίζεται με ο) = 6, (β) αριθμός κορυφών (συμβολίζεται με κ) = 4, (γ) αριθμός ακμών (συμβολίζεται με ε) = 8 (δ) ισχύει ότι :

$6 = o = \varepsilon - \kappa + 2 = 8 - 4 + 2$.

Ο τύπος στη διαπίστωση (δ) παραπάνω καλείται τύπος του Euler και αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.5. (Τύπος του Euler)

Εάν Γ είναι ένα συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με

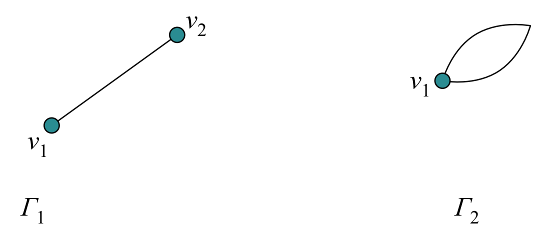
ε: αριθμό ακμών, κ: αριθμό κορυφών και ο: αριθμό όψεων του επιπέδου σε μια αποτύπωση του Γ, τότε ισχύει ότι:

$$o = \varepsilon - \kappa + 2$$

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς τον αριθμό των ακμών του γραφήματος.

Βασικό Βήμα: Αν $\varepsilon = 1$, τότε το γράφημα μπορεί να είναι το Γ_1 ή το Γ_2 του σχήματος 4.36.



Σχήμα 4.36
Γραφήματα 1 κορυφής.

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι ο = $\varepsilon - \kappa + 2$. Για το Γ_1, ο=1, ε=1, κ=2 και για το Γ_2, ο=2, ε=1, κ=1

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ο τύπος ισχύει για συνδεόμενο και επίπεδο γράφημα με αριθμό ακμών $\varepsilon = v$, δηλ. ο = $v - \kappa + 2$, θα δείξω ότι η αριθμητική σχέση μεταξύ κορυφών, ακμών και όψεων ενός επίπεδου και συνδεόμενου γραφήματος ισχύει για $\varepsilon = v + 1$ ακμές.

Έστω γράφημα Γ με $v + 1$ ακμές και δίχως κύκλους (το Γ είναι ακυκλικό). Τότε, ξεκινώντας από μια κορυφή α, κάθε φορά που διασχίζουμε μια ακμή, επισκεπτόμαστε μια νέα κορυφή. Αυτό συνεχίζεται έως ότου φθάσουμε σε μια κορυφή w με βαθμό 1.

Διαγράφοντας την κορυφή w και την ακμή που εφάπτεται σε αυτή, παίρνουμε ένα συνδεόμενο και επίπεδο γράφημα Γ', με $\varepsilon' = v$ ακμές και κ'=κ–1 κορυφές, για το οποίο από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος ισχύει ο τύπος του Euler. Το αρχικό γράφημα Γ έχει μία κορυφή και μια ακμή παραπάνω από το Γ', ενώ ο αριθμός των όψεων είναι ο ίδιος και για τα δύο γραφήματα (η κορυφή και η ακμή που αφαιρέθηκε δεν συμμετείχε σε κύκλο, και επομένως δεν συμμετείχε στον καθορισμό όψης). Άρα,

$$o = \varepsilon' - \kappa' + 2 = \varepsilon - 1 - (\kappa - 1) + 2 = \varepsilon - \kappa + 2$$

Δηλαδή, ο τύπος του Euler ισχύει και για τον Γ.

Έστω ότι το Γ περιέχει τουλάχιστον ένα κύκλο. Τότε, η διαγραφή μιας ακμής που συμμετέχει σε κύκλο στον Γ έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του αριθμού των ακμών του γραφήματος κατά 1 και των όψεων του επιπέδου κατά 1 επίσης. Το νέο γράφημα Γ' που προκύπτει κατά αυτό τον τρόπο από τον Γ έχει ν ακμές, είναι συνδεόμενο και επίπεδο. Συνεπώς, ο τύπος του Euler ισχύει για το Γ'.

$o' = \varepsilon' - \kappa + 2$, δηλαδή $o - 1 = \varepsilon - 1 - \kappa + 2$, επομένως, για τον Γ ισχύει ότι $o = \varepsilon - \kappa + 2$.

Θεώρημα 4.6

Το γράφημα $K_{3,3}$ (το πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα 3 και 3 κορυφών) δεν είναι επίπεδο.

Απόδειξη

Έστω ότι το $K_{3,3}$ είναι επίπεδο. Τότε θα υπάρχει αποτύπωσή του στο επίπεδο και κάθε όψη του επιπέδου θα πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 4, αφού κάθε κύκλος στο $K_{3,3}$ έχει μήκος τουλάχιστον 4. Επομένως, εάν ε ο αριθμός των ακμών του γραφήματος, «o» ο αριθμός των όψεων του επιπέδου και κ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$4 \cdot o \leq$ άθροισμα των βαθμών των όψεων $\leq 2 \cdot \varepsilon$

Αυτό συμβαίνει διότι κάθε όψη στον $K_{3,3}$ καθορίζεται από τουλάχιστον 4 ακμές και κάθε ακμή του γραφήματος συμμετέχει στο βαθμό το πολύ δύο όψεων. Τότε, από τον τύπο του Euler, αντικαθιστώντας το «o» στην παρακάτω ισότητα, ισχύει ότι

$2 \cdot \varepsilon \geq 4 \cdot (\varepsilon - \kappa + 2)$

Δηλαδή, για το $K_{3,3}$ ισχύει ότι $18 = 2 \cdot 9 \geq 4 \cdot (9 - 6 + 2) = 20$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

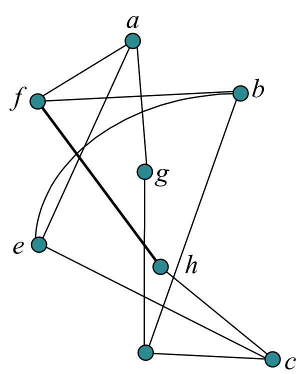
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.17

Χρησιμοποιείστε τον τύπο του Euler για να δείξετε ότι το γράφημα K_5 (πλήρες γράφημα 5 κορυφών) δεν είναι επίπεδο.

Υπόδειξη: Εργαστείτε όπως και στο θεώρημα 4.6.

Προφανώς, εάν ένα γράφημα περιέχει τον $K_{3,3}$ ή τον K_5 ως υπό – γράφημα, αυτό δεν μπορεί να είναι επίπεδο. Το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές. Για παράδειγμα το γράφημα του σχήματος 4.37 δεν είναι επίπεδο και όμως δεν περιέχει ως υπό – γράφημα το $K_{3,3}$ ή το K_5:

Σχήμα 4.37
Μη επίπεδο γράφημα που δεν έχει υπο – γράφημα το $K_{3,3}$ ή το K_5.



Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο θα καθοριστούν στις επόμενες παραγράφους. Για να καθορίσουμε όμως τις συνθήκες αυτές, χρειαζόμαστε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.29: Εάν ένα γράφημα Γ έχει μια κορυφή α βαθμού 2 και ακμές (α, β) και (α, γ) με $\beta \neq \gamma$, οι ακμές (α, β) και (α, γ) λέγεται ότι βρίσκονται σε **σειρά (in series)**.

Απλοποίηση σειράς καλείται η διαδικασία κατά την οποία διαγράφουμε την α από τον Γ και αντικαθιστούμε τις ακμές (α, β) και (α, γ) με την ακμή (β, γ). Το νέο γράφημα Γ' που προκύπτει λέγεται ότι *προήλθε από τον Γ με μια απλοποίηση σειράς*.

Κάνω την παραδοχή ότι το κάθε γράφημα Γ προέρχεται από τον εαυτό του με απλοποιήσεις σειράς.

Παράδειγμα 4.22

Παράδειγμα, στο σχήμα 4.38, το γράφημα Γ' προέρχεται από το Γ με απλοποιήσεις σειράς στις κορυφές v_4 και v_5:

Σχήμα 4.38
Ο Γ' έχει προέλθει από τον Γ με απλοποιήσεις σειράς.

> **Ορισμός 4.30:** Δύο γραφήματα Γ_1 και Γ_2 καλούνται **ομοιομορφικά** (**homeomorphic**), εάν το Γ_1 και το Γ_2 μπορούν να απλοποιηθούν σε ισόμορφα γραφήματα (διενεργώντας σε αυτά απλοποιήσεις σειράς).

Σύμφωνα με τους ορισμούς 4.28 και 4.29, το κάθε γράφημα είναι ομοιομορφικό με τον εαυτό του. Επίσης, δύο γραφήματα Γ_1 και Γ_2 είναι ομοιομορφικά εάν το Γ_1 μπορεί να απλοποιηθεί σε γράφημα ισόμορφο του Γ_2 ή και το αντίστροφο.

Το επόμενο θεώρημα καθορίζει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο.

Θεώρημα 4.7 (Kuratowski)

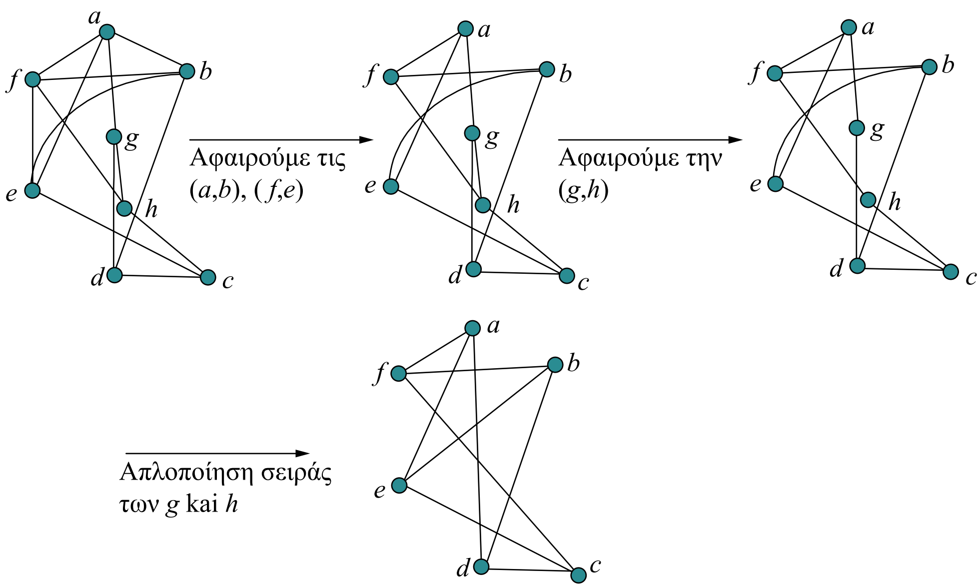
Ένα γράφημα Γ είναι επίπεδο, εάν και μόνο εάν δεν περιέχει υπογράφημα που να είναι ομοιομορφικό με τον K_5 ή με τον $K_{3,3}$.

Παράδειγμα 4.23

(Από το βιβλίο Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.)

Στο σχήμα 4.39 φαίνεται πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα για να δείξουμε ότι ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο.

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε στο παράδειγμα του σχήματος 4.39 είναι η εξής: Στο αρχικό γράφημα εφαρμόζουμε κάποιες απλοποιήσεις σειράς και ταυτόχρονα αφαιρούμε ακμές και κορυφές. Θυμηθείτε ότι μας ενδιαφέρει να καταλήξουμε σε υπογράφημα του αρχικού γραφήματος (επομένως μπορούμε να αφαιρούμε ακμές και κορυφές δίχως την εφαρμογή απλοποιήσεων σειράς), που είναι ομοιομορφικό (εδώ δίνεται το δικαίωμα των απλοποιήσεων σειράς στις κορυφές με βαθμό ακριβώς 2) με το $K_{3,3}$ ή το K_5.



Σχήμα 4.39
Εφαρμογή του θεωρήματος Kuratowski.

Κατά την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου καλείστε να κάνετε κάποιες υποθέσεις τις οποίες μπορεί αργότερα να αναιρέσετε: Κατ’ αρχήν πρέπει να υποθέσετε αν το γράφημα στο οποίο θα καταλήξετε είναι ισόμορφο με τον $K_{3,3}$ ή με το K_5. Η υπόθεση αυτή σας οδηγεί να υποθέσετε και ποιες ακμές δεν χρειάζεστε ή/και κορυφές που πρόκειται να κάνετε απλοποιήσεις σειράς.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.18

Εάν Γ είναι ένα επίπεδο απλό γράφημα με $\varepsilon > 1$, τότε $\varepsilon \leq 3\kappa - 6$.

Υπόδειξη

Δείξτε ότι ισχύει για απλά γραφήματα με $\varepsilon = 2$ (ποια είναι αυτά; – σχεδιάστε τα).

Για $\varepsilon > 2$, εργαστείτε όπως στο θεώρημα 4.6, για κύκλους με μήκος τουλάχιστον ίσο με 3.

Σύνοψη ενότητας

Αντικείμενο της παρούσας ενότητας είναι η έννοια του επίπεδου γραφήματος. Δόθηκε ο ορισμός του επίπεδου γραφήματος σε σχέση με τις έννοιες της αποτύπωσης γραφήματος, της όψης επιπέδου και του βαθμού όψεων. Διατυπώθηκε και αποδείχτηκε ο τύπος του Euler και αναζητήθηκαν συνθήκες ελέγχου για να είναι ένα γράφημα επίπεδο. Στα πλαίσια αυτά ορίστηκε η έννοια της απλοποίησης σειράς και η έννοια των ομοιομορφικών γραφημάτων. Τέλος, διατυπώθηκε το θεώρημα Kuratowski που δίνει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο και παρουσιάστηκε παράδειγμα εφαρμογής του.

Σύνοψη κεφαλαίου

Το παρόν κεφάλαιο παρουσίασε βασικά στοιχεία της θεωρίας γραφημάτων. Συγκεκριμένα ορίσθηκαν βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων, ελέγχθηκαν συγκεκριμένες ιδιότητες που μπορούν να πληρούν γραφήματα, διατυπώθηκε και παρουσιάστηκε η εφαρμογή αλγορίθμων σε συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων.

Βασικός στόχος του κεφαλαίου είναι η εξοικείωσή σας με μια μαθηματική κατασκευή, αυτή του γραφήματος, και η απόκτηση άνεσης στο χειρισμό της κατά τη μοντελοποίηση προβλημάτων, διατύπωσης αλγορίθμων και απόδειξης ιδιοτήτων της.

Συγκεκριμένα, στην ενότητα 4.1 ορίσθηκε η έννοια του (κατευθυνόμενου και μη κατευθυνόμενου) γραφήματος και η έννοια του μονοπατιού σε γράφημα. Ως ειδικεύσεις της έννοιας του γραφήματος ορίστηκαν οι έννοιες του απλού γραφήματος, του γραφήματος με βάρη, του πλήρους γραφήματος, του διχοτομίσιμου γραφήματος, του πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος και του συνδεόμενου γραφήματος. Ως ειδικεύσεις της έννοιας του μονοπατιού ορίστηκαν οι έννοιες του απλού μονοπατιού, του κύκλου και του απλού κύκλου.

Η ενότητα 4.2 παρουσίασε το πρόβλημα της ύπαρξης μιας ιδιαίτερης κατηγορίας κύκλων σε γραφήματα: της ύπαρξης κύκλων Euler. Καθορίστηκαν και αποδείχτηκαν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης κύκλου Euler σε γράφημα.

Η ενότητα 4.3 πραγματεύεται, σε αντιδιαστολή με το πρόβλημα ύπαρξης κύκλων Euler, το πρόβλημα ύπαρξης κύκλων Hamilton. Η ενότητα παρουσιάζει μεθοδολογία ανίχνευσης ύπαρξης κύκλων Hamilton. Τέλος, παρουσιάζεται το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή και επιχειρείται σύνδεση του προβλήματος αυτού με το πρόβλημα της εύρεσης του μικρότερου κύκλου Hamilton σε γράφημα με βάρη. Παρουσιάζεται ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα που προσεγγίζει το μικρότερο κύκλο Hamilton.

Πέρα από την εύρεση κύκλων ιδιαίτερου ενδιαφέροντος σε γράφημα, η εύρεση μονοπατιών ελαχίστου μήκους σε γράφη με βάρη έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλά προβλήματα. Η ενότητα 4.3 παρουσιάζει και αποδεικνύει την ορθότητα του αλγορίθμου του Dijkstra για την εύρεση του μήκους του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών συνδεόμενου γραφήματος.

Η σχεδίαση και ανάπτυξη αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων σε γραφήματα επιβάλλει την κατά κάποιο τρόπο παράσταση των γραφημάτων. Η ενότητα 4.4. παρουσιάζει δύο τρόπους παράστασης γραφημάτων: Το μητρώο σύνδεσης και το μητρώο εφαπτόμενων ακμών.

Η ενότητα 4.5 ορίζει την έννοια των ισόμορφων γραφημάτων και παρουσιάζει μια μεθοδολογία ελέγχου της μη–ισομορφίας γραφημάτων. Η έννοια της ισομορφίας είναι ιδιαίτερη χρήσιμη για την κατανόηση των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για να είναι ένα γράφημα επίπεδο.

Η έννοια του επίπεδου γραφήματος παρουσιάζεται στην ενότητα 4.6. Στην ενότητα αυτή διατυπώθηκε και αποδείχθηκε ο τύπος του Euler για επίπεδα γραφήματα και αναζητήθηκαν συνθήκες ελέγχου για να είναι ένα γράφημα επίπεδο. Στα πλαίσια αυτά ορίζεται η έννοια της απλοποίησης σειράς και η έννοια των ομοιομορφικών γραφημάτων. Τέλος, στην ενότητα διατυπώνεται το θεώρημα Kuratowski που δίνει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα γράφημα επίπεδο.

Βιβλιογραφία

[1] Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.

[2] Liu C.L «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών» (Κ. Μπους, Δ. Γραμμένος, Θ. Φειδάς, Α. Λαυρέντζος) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[3] Bondy J.A. and U.S.R. Murty «Graph Theory with Applications» American Elsevier Publishing Company, New York, 1976.

[4] Wilson R.J., John J. Watkins, Graphs : an introductory approach : a first course in discrete mathematics, New York : John Wiley & Sons, c1990

Προαιρετική βιβλιογραφία

[1] Deo N. «Graph Theory and Applications to Engineering and Computer Science», Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[2] Dijkstra E.N. «A Note on two Problems in Connexion with Graphs» Numerische Mathematik, 1:269 – 271 (1959)

[3] Harary F. «Graph Theory», Addison – Wesley Publishing Company, Reading Mass 1969

[4] Wilson R.J., «Introduction to Graph Theory» Academic Press N.Y. 1972.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Δέντρα

Σκοπός

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση μιας κατηγορίας γραφημάτων με ιδιαίτερες εφαρμογές στην επιστήμη των υπολογιστών: τα δέντρα.

Η εξοικείωση με τη δομή αυτή και τις ιδιότητές της, καθώς και η παρουσίαση αλγορίθμων αξιοποίησης της πληροφορίας που μπορεί να αποθηκεύεται στις κορυφές των δέντρων, είναι από τους κύριους στόχους του παρόντος κεφαλαίου.

Στις ενότητες του παρόντος κεφαλαίου και ιδιαίτερα στην ενότητα 5.1 αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες που αφορούν τα δέντρα, δίνονται και αποδεικνύονται εναλλακτικοί τρόποι χαρακτηρισμού των δέντρων ως γραφήματα ιδιαίτερου τύπου. Στην ενότητα 5.2 αναπτύσσεται η έννοια των συνδετικών δέντρων και παρουσιάζονται αλγόριθμοι διάσχισης δέντρων. Η ίδια ενότητα παρουσιάζει το πρόβλημα εύρεσης ελάχιστων συνδετικών δέντρων σε γραφήματα με βάρη. Στην ενότητα 5.3 παρουσιάζεται μια ιδιαίτερη κατηγορία δέντρων: τα δυαδικά δέντρα. Παρουσιάζονται αλγόριθμοι διάσχισης δυαδικών δέντρων και τα δυαδικά δέντρα αναζήτησης πληροφορίας.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Η μελέτη του παρόντος κεφαλαίου και η αποσαφήνιση των εννοιών που ορίζονται σε αυτό θα σας δώσει τη δυνατότητα:

- *Χαρακτηρισμού ενός γραφήματος ως δέντρου*
- *Εντοπισμού και χαρακτηρισμού των «συστατικών» ενός δέντρου*
- *Ανάπτυξης και εφαρμογής αλγορίθμων για την αξιοποίηση πληροφορίας σε δέντρα*
- *Εύρεσης συνδετικών δέντρων σε γραφήματα*
- *Εύρεσης ελάχιστων συνδετικών δέντρων σε γραφήματα με βάρη*
- *Οργάνωσης πληροφορίας σε δυαδικά δέντρα αναζήτησης*
- *Αναζήτησης πληροφορίας σε δυαδικά δέντρα αναζήτησης*
- *Διάσχισης δυαδικών δέντρων για την ανίχνευση της πληροφορίας που αποθηκεύεται στις κορυφές αυτών*

Έννοιες κλειδιά

- *δέντρο*
- *δέντρο με ρίζα*
- *επίπεδο κορυφής*
- *ύψος δέντρου*
- *υπο δέντρο*
- *πατέρας κορυφής*
- *συγγενείς κορυφές*
- *παιδί κορυφής*
- *τερματική κορυφή*
- *εσωτερική κορυφή*
- *κορυφή διακλάδωσης*
- *συνδετικό δέντρο*
- *ελάχιστο συνδετικό δέντρο*
- *διάσχιση γραφήματος*
- *κατά βάθος διάσχιση*
- *κατά πλάτος διάσχιση*
- *αλγόριθμος Prim*
- *δυαδικό δέντρο*
- *πλήρες δυαδικό δέντρο*
- *δυαδικό δέντρο αναζήτησης*
- *προδιατεταγμένη διάσχιση δυαδικών δέντρων*
- *ενδοδιατεταγμένη διάσχιση δυαδικών δέντρων*

5.1 Ορολογία και Χαρακτηρισμός Δέντρων

Σκοπός

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι η παρουσίαση των βασικών εννοιών, της ορολογίας των συστατικών των δέντρων και η παρουσίαση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών που επιτρέπουν το χαρακτηρισμό ενός γραφήματος ως δέντρου.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας δώσει τη δυνατότητα:

- *Χαρακτηρισμού ενός γραφήματος ως δέντρου,*
- *Εντοπισμού και χαρακτηρισμού των «συστατικών» ενός δέντρου,*
- *Χρήσης των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των δέντρων για την περαιτέρω απόδειξη ιδιοτήτων που τα χαρακτηρίζουν.*

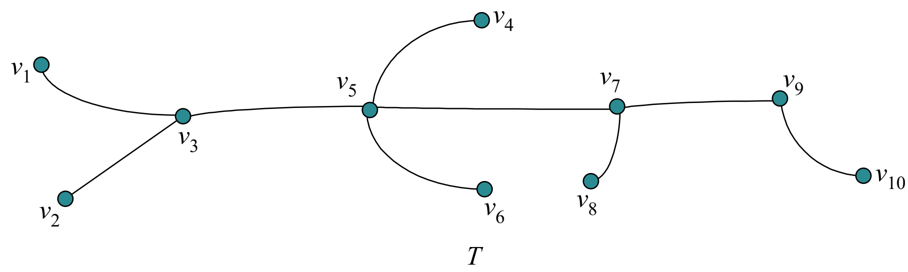
Έννοιες κλειδιά

- *δέντρο*
- *δέντρο με ρίζα*
- *επίπεδο κορυφής*
- *ύψος δέντρου*
- *υπό–δέντρο*
- *πατέρας κορυφής*
- *συγγενείς κορυφής*
- *παιδί κορυφής*
- *τερματική κορυφή*
- *εσωτερική κορυφή*
- *κορυφή διακλάδωσης*

Ορισμός 5.1 Δέντρο (tree) τ είναι απλό γράφημα, όπου εάν v_1 και v_2 δύο κορυφές στο τ, τότε υπάρχει ένα μοναδικό απλό μονοπάτι από την v_1 στη v_2.

Παράδειγμα 5.1

Παράδειγμα δέντρου είναι το γράφημα *τ* του σχήματος 5.1.



Σχήμα 5.1
Δέντρο T

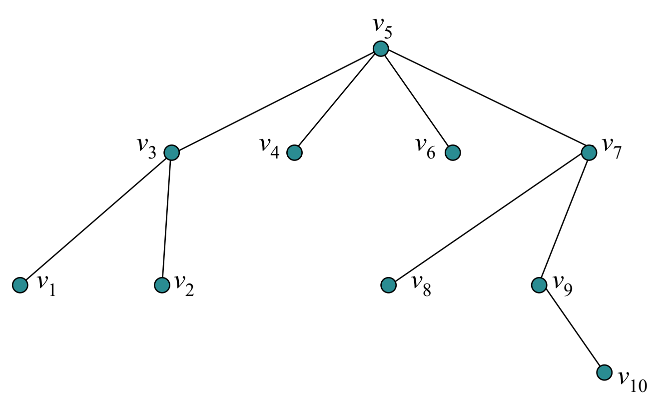
Τις περισσότερες φορές σε ένα δέντρο χαρακτηρίζουμε μια κορυφή ως «ρίζα» του δέντρου. Οι υπόλοιπες κορυφές του, σε αντίθεση με τα πραγματικά δέντρα, «κρέμονται» από τη ρίζα.

> **Ορισμός 5.2 Δέντρο με ρίζα (rooted tree)** είναι δέντρο, στο οποίο μια ιδιαίτερη κορυφή του χαρακτηρίζεται σαν ρίζα του δέντρου.

Κατ' αυτό τον τρόπο, η σχεδίαση ενός δέντρου με ρίζα γίνεται από πάνω προς τα κάτω, σε αντίθεση με τα πραγματικά δέντρα όπου η ρίζα βρίσκεται στο κάτω μέρος του δέντρου και τα φύλλα επάνω.

Παράδειγμα 5.2

Παράδειγμα δέντρου με ρίζα είναι το δέντρο του σχήματος 5.2. Αυτό είναι το δέντρο του σχήματος 5.1, με την κορυφή v_5 σαν ρίζα αυτού.



Σχήμα 5.2
Δέντρο τ με ρίζα v_5

Παρατηρήστε ότι σχημάτισα το δέντρου του σχήματος 5.2 ως εξής: Σχεδίασα τη ρίζα και αμέσως κάτω από αυτή, στο ίδιο θα λέγαμε επίπεδο, τις κορυφές του γραφήματος (v_3, v_4, v_6, v_7) που απέχουν απόσταση ίση με ένα (1) από τη ρίζα. Στη συνέχεια τοποθέτησα τις κορυφές που είναι γειτονικές των κορυφών του 1ου επιπέδου και που απέχουν απόσταση ίση με δύο (2) από τη ρίζα, κοκ. Κατ' αυτόν τον τρόπο η κάθε κορυφή τοποθετείται σε ένα «επίπεδο» που εξαρτάται από την απόσταση της κορυφής από τη ρίζα του δέντρου.

Παρατηρήστε ότι μια κορυφή v δεν μπορεί να βρίσκεται σε περισσότερα του ενός επιπέδα, εφόσον αυτή συνδέεται με τη ρίζα του δέντρου με ένα μοναδικό και απλό μονοπάτι.

Ορισμός 5.3 Επίπεδο (level) κορυφής v σε δέντρο τ με ρίζα καλείται το μήκος του απλού μονοπατιού από τη ρίζα του δέντρου στην κορυφή v.

Ορισμός 5.4 Ύψος (hight) δέντρου είναι ο μεγαλύτερος αριθμός επίπεδου κορυφής στο δέντρο.

Παράδειγμα 5.3

Η ρίζα του δέντρου στο σχήμα 5.2 είναι η κορυφή v_5, που βρίσκεται στο επίπεδο 0 του δέντρου. Οι κορυφές v_3, v_4, v_6, v_7 είναι τοποθετημένες στο επίπεδο 1 κοκ. Το ύψος του δέντρου του σχήματος 5.2 είναι ίσο με 3.

Πριν προχωρήσω να εξετάσω ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των δέντρων ως γραφημάτων και δώσω εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς των δέντρων, θα ήταν χρήσιμο να δοθεί κάποια βασική ορολογία των «συστατικών» των δέντρων, ώστε να αποκτήσουμε ένα κοινό λεξιλόγιο.

Την ορολογία που χρησιμοποιώ στον ορισμό 5.5 την έχουμε δανειστεί από τα γνωστά, λίγο πολύ, σε όλους μας γενεαλογικά δέντρα.

Ορισμός 5.5: Έστω τ δέντρο με ρίζα v. Έστω (v, v_1, v_2, …, v_n) ένα απλό μονοπάτι στο τ και έστω x, w, z κορυφές του τ στο παραπάνω μονοπάτι. Τότε

(α) Η κορυφή v_{n-1} καλείται **πατέρας (father)** της v_n.

(β) Οι κορυφές v, v_1, …, v_{n-1} καλούνται **πρόγονοι (ancestor)** της v_n.

(γ) Η v_n καλείται **παιδί (child)** της v_{n-1}.

(δ) Εάν η x είναι πρόγονος της w, τότε η w καλείται **απόγονος (predecessors)** της x.

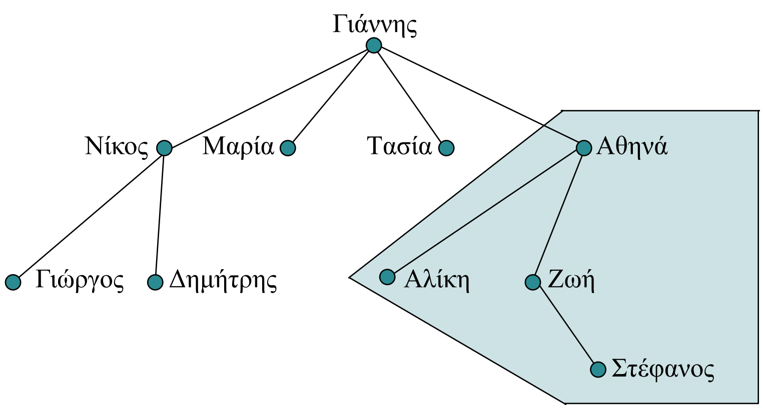
(ε) Εάν x και w είναι παιδιά της z, τότε οι x και w καλούνται **συγγενείς (relatives)**.

(στ) Εάν η x δεν έχει παιδιά, τότε η x καλείται **τερματική (terminal vertex)** κορυφή (ή φύλλο) του δέντρου.

(ζ) Εάν η x δεν είναι τερματική, τότε η x καλείται **εσωτερική (internal vertex)** κορυφή ή κορυφή **διακλάδωσης (branching vertex).**

(η) Ένα **υπό–δέντρο (sub–tree)** του τ με ρίζα x είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{w \mid w$ απόγονος της $x\}$ και σύνολο ακμών $E = \{e \mid e$ είναι ακμή σε ένα απλό μονοπάτι από τη x σε κάποια κορυφή του $V\}$.

Παράδειγμα 5.4



Σχήμα 5.3
Γενεαλογικό δέντρο

Στο γενεαλογικό δέντρο του σχήματος 5.3, το οποίο ως γράφημα είναι ισόμορφο του δέντρου στο σχήμα 5.2, παρατηρούμε ότι: ο Γιάννης είναι πατέρας του Νίκου, της Μαρίας, της Τασίας, της Αθηνάς και πρόγονος του Γιώργου, του Δημήτρη, της Αλίκης, του Στέφανου και της Ζωής. Η Αθηνά και η Μαρία είναι συγγενείς, εφόσον έχουν τον ίδιο πατέρα, ενώ η Αλίκη και η Ζωή είναι παιδιά της Αθηνάς και απόγονοι του Γιάννη. Τέλος, οι κορυφές Γιώργος, Δημήτρης, Αλίκη και Στέφανος δεν έχουν παιδιά και επομένως αποτελούν τερματικές κορυφές του δέντρου, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές είναι κορυφές διακλάδωσης (εσωτερικές κορυφές).

Το υπό – δέντρο του δέντρου στο σχήμα 5.3 με ρίζα την κορυφή Αθηνά είναι αυτό που πλαισιώνεται με την γκρίζα γραμμή και έχει σύνολο κορυφών V = {Αθηνά, Αλίκη, Ζωή, Στέφανος} και σύνολο ακμών $E = (e \mid$ η e συμμετέχει σε ένα μονοπάτι από τη ρίζα Αθηνά του υπο – δέντρου, σε οποιαδήποτε κορυφή του $V\}$.

Το θεώρημα 5.1 παρακάτω αποδεικνύει την ισχύ διαφορετικών, ισοδύναμων χαρακτηρισμών ενός δέντρου.

Θεώρημα 5.1

Έστω τ γράφημα με v κορυφές. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) τ είναι δέντρο

(β) τ είναι συνδεόμενο και ακυκλικό γράφημα

(γ) τ είναι συνδεόμενο γράφημα με (v–1) ακμές και

(δ) τ είναι ακυκλικό γράφημα με (v–1) ακμές.

Απόδειξη

(*εάν* (α) *τότε* (β)) Έστω τ δέντρο. Τότε από τον ορισμό του δέντρου, για κάθε ζεύγος κορυφών v και w του τ υπάρχει ένα απλό μονοπάτι που τις συνδέει. Συνεπώς, το γράφημα τ είναι συνδεόμενο.

Έστω ότι το τ περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο K. Τότε το τ περιέχει ένα απλό κύκλο $K' = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, με $v_0 = v_n$ (Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.5). Αφού το τ είναι απλό γράφημα, δεν περιέχει ανακυκλώσεις και φυσικά ούτε παράλληλες ακμές. Συνεπώς, ο κύκλος K' περιέχει τουλάχιστον δύο διακριτές κορυφές v_i, v_j, $i < j$. Τότε, τα $P_1 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ και $P_2 = (v_i, v_{i-1}, \ldots, v_0, v_{n-1}, \ldots, v_j)$ είναι διαφορετικά απλά μονοπάτια από την v_i στη v_j. Η ύπαρξη δύο μονοπατιών μεταξύ των δύο διακριτών κορυφών και το γεγονός ότι το τ είναι δέντρο οδηγεί σε άτοπο. Άρα, το δέντρο τ είναι ακυκλικό γράφημα.

(*εάν* (β) *τότε* (γ)). Έστω ότι το τ είναι ένα ακυκλικό και συνδεόμενο γράφημα με v κορυφές. Θα δείξουμε επαγωγικά ως προς τον αριθμό των κορυφών του ότι έχει v–1 ακμές.

Βασικό βήμα. Για $i = 1$, το τ έχει μια κορυφή και καμία (δηλαδή i – 1) ακμή. Συνεπώς, ο ισχυρισμός ισχύει στην περίπτωση αυτή .

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει για $i = v$.

Θα δείξουμε ότι, αν το τ είναι συνδεόμενο και ακυκλικό γράφημα με $\nu + 1$ κορυφές, τότε το τ θα έχει ν ακμές.

Έστω ρ απλό μονοπάτι στο τ με το μεγαλύτερο δυνατό μήκος. Εφόσον το τ είναι ακυκλικό γράφημα, το ρ δεν είναι κύκλος. Επομένως, το ρ περιέχει κορυφή ν με βαθμό 1. Έστω T^* το γράφημα που προκύπτει, εάν από το τ αφαιρέσουμε τη ν και την εφαπτομένη σε αυτή ακμή. Τότε, το T^* είναι συνδεόμενο και ακυκλικό γράφημα με ν κορυφές. Από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος έπεται ότι το T^* έχει $(\nu–1)$ ακμές. Άρα, το γράφημα τ έχει ν ακμές.

(*εάν* (γ) *τότε* (δ)) Έστω ότι το τ είναι συνδεόμενο γράφημα με ν κορυφές και $\nu–1$ ακμές. Θα δείξουμε ότι το τ είναι ακυκλικό γράφημα.

Έστω ότι το τ περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο. Αφαιρώντας μια ακμή από έναν κύκλο, το γράφημα δεν καθίσταται ασύνδετο. Άρα, μπορούμε να αφαιρέσουμε ακμές δίχως να αφαιρέσουμε κορυφές, έως ότου προκύψει γράφημα T^* ακυκλικό και συνδεόμενο. Το γράφημα που προκύπτει έχει ν κορυφές και από την απόδειξη του βήματος (αν β τότε γ) παραπάνω, θα πρέπει να έχει $(\nu–1)$ ακμές. Τότε, όμως, το τ θα πρέπει να έχει περισσότερες από $\nu–1$ ακμές. Αυτό, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, είναι άτοπο. Άρα, το τ είναι ακυκλικό γράφημα.

(*εάν* (δ) *τότε* (α)). Έστω ότι το τ είναι ακυκλικό γράφημα με $\nu–1$ ακμές. Τότε θα δείξω ότι το γράφημα τ είναι δέντρο. Δηλαδή θα δείξω ότι το τ είναι ένα απλό γράφημα και ότι για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει ένα μοναδικό, απλό μονοπάτι που τις συνδέει.

Το γράφημα τ δεν περιέχει ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές, γιατί από την υπόθεση είναι ακυκλικό. Συνεπώς, το τ είναι ένα απλό γράφημα.

Έστω ότι το τ δεν είναι συνδεόμενο και επομένως έχει τουλάχιστον δύο τμήματα. $T_1, T_2, \ldots, T_\kappa$, τα τμήματα του T. Εφόσον το τ δεν είναι συνδεόμενο, τότε $\kappa > 1$. Έστω ότι κάθε υπό – γράφημα T_i έχει ν_i κορυφές. Αφού κάθε τμήμα T_i είναι ένα συνδεόμενο και ακυκλικό γράφημα, τότε σύμφωνα με το (γ) παραπάνω μπορούμε να αποφανθούμε ότι το T_i έχει $\nu_{i–1}$ ακμές.

Τότε το άθροισμα των κορυφών του τ είναι ίσο με το άθροισμα των κορυφών των τμημάτων του. Το αντίστοιχο ισχύει για τις ακμές του T. Συνεπώς:

Για τις ακμές ισχύει ότι: $\nu–1 = (\nu_1 – 1) + (\nu_2 – 1) + \ldots, + (\nu_\kappa – 1)$

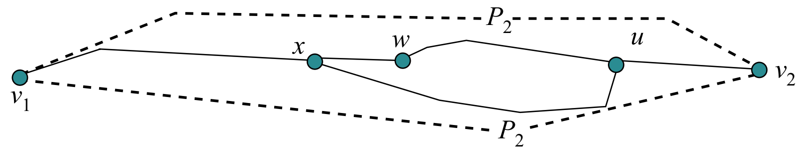
Για τις κορυφές ισχύει ότι: $\nu = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots, + \nu_\kappa)$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις ισχύει ότι:

$v–1 = (v_1 – 1) + (v_2 – 1) + \ldots, + (v_\kappa – 1) < (v_1 + v_2 + \ldots, + v_\kappa) – 1 = v–1.$

Αυτό είναι άτοπο. Συνεπώς, το τ δεν μπορεί να έχει περισσότερα του ενός τμήματα, δηλαδή το τ είναι συνδεόμενο γράφημα.

Επιπλέον, για να δείξω ότι το τ είναι δέντρο, θα πρέπει να δείξω ότι για κάθε ζεύγος διακριτών κορυφών v_1 και v_2 υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που τις συνδέει. Έστω δύο διακριτά μονοπάτια P_1 και P_2 από την v_1 στη v_2, όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4
Μονοπάτια P_1 και P_2 από τη v_1 στη v_2

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4, έστω w η πρώτη κορυφή στο P_1 μετά την v_1 που δεν βρίσκεται στο P_2. Έστω x κορυφή πριν την w και u η πρώτη κορυφή μετά την w, τέτοιες ώστε να βρίσκονται στο P_1 και στο P_2. Έστω $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n–1}, v_n)$ το κομμάτι του P_1 από την $x = v_0$ στην $u = v_n$. Έστω δε, $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{m–1}, w_m)$ το κομμάτι του P_2 από την $x = w_0$ στη $u = w_m$. Τότε, όμως, το μονοπάτι $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n–1}, v_n = w_m, w_{m–1}, \ldots, w_1, w_0)$ είναι ένας κύκλος στο γράφημα T. Αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε υποθέσει ότι τ είναι ακυκλικό γράφημα. Άρα, για κάθε ζευγάρι κορυφών v_1 και v_2 υπάρχει ένα απλό και μοναδικό μονοπάτι που να τις συνδέει.

Επομένως, το τ είναι δέντρο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.1

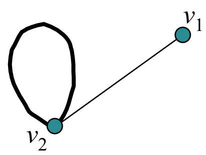
Δείξτε ότι κάθε δέντρο είναι επίπεδο γράφημα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.2

Δείξτε ότι κάθε δέντρο είναι διχοτομίσιμο γράφημα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.3

Το συνδεόμενο γράφημα του σχήματος 5.5 έχει ένα και μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών του. Το γράφημα όμως δεν είναι δέντρο. Εξηγήστε γιατί.

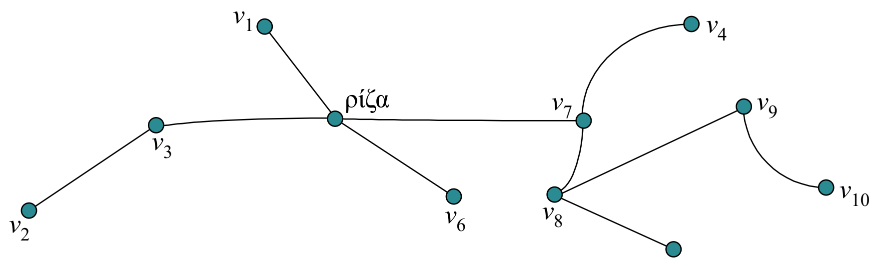


Σχήμα 5.5
Συνδεόμενο γράφημα

Δραστηριότητα 5.1

Βρείτε το επίπεδο κάθε κορυφής στο δέντρο του σχήματος 5.6. Βρείτε το ύψος του δέντρου αυτού.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς 5.3 και 5.4 παραπάνω.



Σχήμα 5.6
Δέντρο δίχως ρίζα

Δραστηριότητα 5.2

Ένα δάσος ορίζεται ως ένα απλό γράφημα δίχως κύκλους. Εξηγείστε γιατί ένα δάσος είναι μια ένωση δέντρων.

Υπόδειξη: Το δάσος μπορεί να είναι μη συνδεόμενο γράφημα. Χαρακτηρίστε τα τμήματα του γραφήματος αυτού.

Δραστηριότητα 5.3

Δείξετε ότι κάθε γράφημα με v κορυφές και λιγότερες από $(v–1)$ ακμές δεν είναι συνδεόμενο.

Υπόδειξη: Πόσες ακμές έχει ένα συνδεόμενο γράφημα, τουλάχιστον;

Σύνοψη Ενότητας

Η ενότητα αυτή παρουσίασε βασικές έννοιες, ιδιότητες και εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς μιας ιδιαίτερης κατηγορίας γραφημάτων: των ακυκλικών και συνδεόμενων γραφημάτων, δηλαδή των δέντρων

5.2 Συνδετικα Δεντρα

Σκοπός

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι η μελέτη του τρόπου σχηματισμού των δέντρων που περιέχουν το σύνολο των κορυφών ενός γραφήματος. Τα δέντρα αυτά καλούνται συνδετικά. Παρουσιάζονται αλγόριθμοι διάσχισης γραφημάτων για την εύρεση συνδετικών δέντρων σε γραφήματα και αλγόριθμος εύρεσης ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε γραφήματα με βάρη.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας καταστήσει ικανούς για την:

- *Ανίχνευση συνδετικών δέντρων σε γραφήματα,*
- *Ανάπτυξη και εφαρμογή αλγορίθμων για τη διάσχιση γραφημάτων,*
- *Εύρεση συνδετικών δέντρων σε γραφήματα,*
- *Εύρεση ελάχιστων συνδετικών δέντρων σε γραφήματα με βάρη.*

Έννοιες κλειδιά

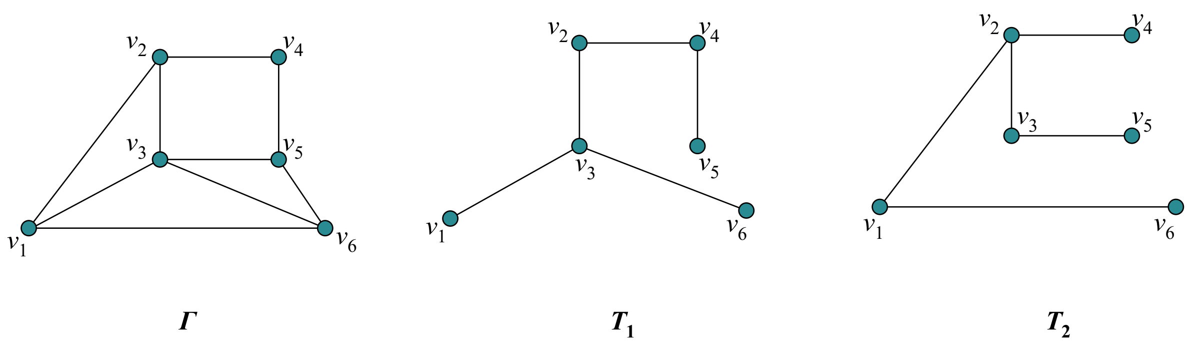
- *συνδετικό δέντρο*
- *ελάχιστο συνδετικό δέντρο*
- *κατά – πλάτος διάσχιση γραφήματος*
- *κατά – βάθος διάσχιση γραφήματος*
- *αλγόριθμος Prim*

Θεωρείστε ότι θέλουμε να επισκευάσουμε το οδικό δίκτυο μιας πόλης στο συντομότερο δυνατό χρόνο. Σε καμία βέβαια περίπτωση δεν πρέπει να αφήσουμε σημεία στην πόλη που δεν είναι προσβάσιμα. Επομένως, θα πρέπει κάθε φορά να κλείνουμε για επισκευές τους περισσότερους δυνατούς δρόμους, εφόσον (αν βέβαια αυτό είναι δυνατό) οι δρόμοι που μένουν σε λειτουργία δεν καθιστούν κάποιο σημείο στην πόλη μη προσβάσιμο. Αν μοντελοποιήσουμε το οδικό δίκτυο με ένα γράφημα, τότε, για να προσδιορίσουμε το τμήμα του δικτύου που πρέπει να δίνεται στην κυκλοφορία, θα πρέπει να προσδιορίσουμε ένα συνδεόμενο υπο–γράφημα του αρχικού γραφήματος που περιέχει την κάθε κορυφή του αρχικού γραφήματος. Επίσης, για να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο επιδιόρθωσης θα πρέπει να κάνουμε διορθώσεις στο μεγαλύτερο δυνατό αριθμό δρόμων κάθε φορά. Επομένως, το ζητούμενο υπο – γράφημα θα πρέπει να μην περιέχει κύκλους (να μην υπάρχει διπλή/περιττή πρόσβαση σε ένα σημείο της πόλης). Συνεπώς, το ζητούμενο υπο–γράφημα θα πρέπει να είναι δέντρο που περιέχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος. Ένα τέτοιο δέντρο καλείται συνδετικό δέντρο γραφήματος.

Ορισμός 5.6: Υπο γράφημα *τ* γραφήματος *Γ* καλείται **συνδετικό (ή επικαλύπτον) δέντρο (spanning tree)** του *Γ*, εάν αυτό είναι δέντρο και περιέχει όλες τις κορυφές του *Γ*.

Παράδειγμα 5.5

Στο σχήμα 5.7 φαίνονται δύο συνδετικά δέντρα του γραφήματος *Γ*. Αν *Γ* είναι το οδικό δίκτυο του παραδείγματος που χρησιμοποίησα στην αρχή της ενότητας, τότε τα δέντρα T_1 και T_2 δείχνουν τις ακμές που θα πρέπει (τουλάχιστον) να δίνουμε στην κυκλοφορία, ώστε να επισκευάζουμε το μέγιστο αριθμό δρόμων κάθε φορά, δίχως να έχουμε μη προσβάσιμα σημεία στην πόλη.



Σχήμα 5.7
Συνδετικά δέντρα T_1 και T_2 του γραφήματος Γ

Προφανώς, για να υπάρχει συνδετικό δέντρο σε ένα γράφημα, θα πρέπει το γράφημα αυτό να είναι συνδεόμενο. Το θεώρημα 5.2 αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό, καθώς και τον αντίστροφο.

Θεώρημα 5.2

Γράφημα *Γ* έχει συνδετικό δέντρο, εάν και μόνο εάν αυτό είναι συνδεόμενο.

Απόδειξη

($\rightarrow$) Έστω ότι το *Γ* είναι συνδεόμενο γράφημα. Εάν αυτό δεν περιέχει κύκλο, τότε είναι δέντρο, και επομένως το συνδετικό δέντρο του *Γ* είναι το ίδιο το *Γ*.

Εάν το Γ περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο, τότε αφαιρούμε ακμές καταστρέφοντας τους κύκλους, έως ότου προκύψει ένα ακυκλικό γράφημα που συνεχίζει όμως να είναι συνδεόμενο. Κατ΄αυτό τον τρόπο, το υπο–γράφημα του Γ που προκύπτει είναι συνδεόμενο και ακυκλικό και περιέχει όλες τις κορυφές του Γ. Άρα, είναι συνδετικό δέντρο του Γ.

($\leftarrow$) Έστω ότι το γράφημα Γ έχει συνδετικό δέντρο. Τότε, το δέντρο αυτό περιέχει όλες τις κορυφές του Γ και είναι ένα συνδεόμενο υπογράφημα του Γ. Συνεπώς, και το Γ είναι συνδεόμενο γράφημα.

Για την εύρεση ενός συνδετικού δέντρου σε γράφημα Γ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **κατά–πλάτος (breadth first traversal)** ή την **κατά–βάθος (depth–first traversal)** διάσχιση του γραφήματος. Με τον όρο «διάσχιση» (traversal) εννοούμε τη συστηματική επίσκεψη των κορυφών του γραφήματος.

Η ιδέα της κατά πλάτους διάσχισης είναι να σχηματίσουμε το συνδετικό δέντρο ανά επίπεδο, επισκεπτόμενοι δηλαδή όλες τις κορυφές του γραφήματος που αποτελούν κορυφές του ίδιου επιπέδου στο συνδετικό δέντρο, προχωρώντας στο επόμενο επίπεδο κ.ο.κ.

Ο αλγόριθμος της κατά–πλάτους διάσχισης για την εύρεση συνδετικού δέντρου σε συνδεόμενο γράφημα είναι ο εξής:

Αλγόριθμος 5.1: Κατά πλάτος διάσχιση γραφήματος

Είσοδος: Συνδεόμενο γράφημα $\Gamma = (V, E)$ και διάταξη $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ στις κορυφές του.

Έξοδος: Συνδετικό δέντρο T

procedure κατά–πλάτος–διάσχιση(V, E)

/* V = σύνολο κορυφών του Γ; E = σύνολο ακμών του Γ*/

/* V' = σύνολο κορυφών του συνδετικού δέντρου;

E' = σύνολο ακμών του συνδετικού δέντρου*/

/* v_1 ρίζα του συνδετικού δέντρου*/

/* S : διατεταγμένη λίστα κορυφών του τελευταίου επιπέδου του συνδετικού δέντρου. */

S:= (v_1)

V':={ v_1}

E'=∅

while true do

begin

Για κάθε x στο S, σύμφωνα με τη διάταξη,

Για κάθε y στο (V–V'), σύμφωνα με τη διάταξη,

αν (x, y) είναι μέλος του E, τότε πρόσθεσε το (x, y) στο E' και το y στο V'

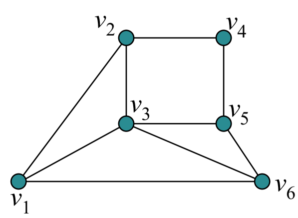
Αν δεν προστέθηκαν νέες ακμές στο E', τότε return(T)

S:= παιδιά των στοιχείων του S διατεταγμένα σύμφωνα με τη διάταξη των πατέρων τους.

end

end κατά–πλάτος–διάσχιση

Παράδειγμα 5.6



Σχήμα 5.8
Συνδεόμενο γράφημα

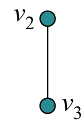
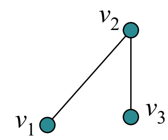
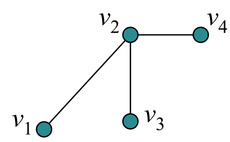
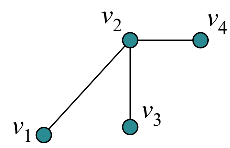
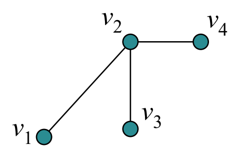
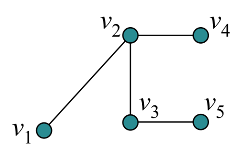
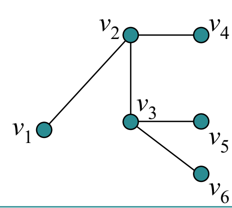
Στο παράδειγμα αυτό θα δείξω την εφαρμογή του αλγορίθμου της κατά – πλάτους διάσχισης στο γράφημα του σχήματος 5.8.

Για την εφαρμογή του αλγόριθμου απαιτείται μια διάταξη των κορυφών του γραφήματος, έστω αυτή (v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6). Ως ρίζα του συνδετικού δέντρου θα θεωρήσουμε την πρώτη κορυφή στην προτεινόμενη διάταξη, δηλαδή τη v_2. Συνεπώς, αρχικά $V' = \{v_2\}$ και $S = (v_2)$.

Η 1η στήλη του πίνακα 5.1 δείχνει την τιμή της S, η 2η στήλη την τιμή της V', η 3η την τιμή της μεταβλητής x, καθώς αυτή διατρέχει τη λίστα S, η 4η στήλη το σύνολο $V – V'$, η 5η στήλη την τιμή της μεταβλητής y, καθώς αυτή διατρέχει το σύνολο ($V – V'$) με σεβασμό στην αρχική διάταξη, η 5η στήλη δείχνει τις ακμές και κορυφές που προστίθενται στο συνδετικό δέντρο και η 6η στήλη δείχνει το συνδετικό δέντρο, όπως αυτό σχηματίζεται.

Πίνακας 5.1

Κατά πλάτος διάσχιση του γραφήματος στο σχήμα 5.8

S	V’	X	V–V’	Y	(X,Y)	Συνδετικό Δέντρο
(v_2)	$\{v_2\}$	v_2	(v_3,v_1,v_4,v_5,v_6)	v_3	(v_2,v_3)	
(v_2)	$\{v_2,v_3\}$	v_2	(v_1,v_4,v_5,v_6)	v_1	(v_2,v_1)	
(v_2)	$\{v_2,v_3,v_1\}$	v_2	(v_4,v_5,v_6)	v_4	(v_2,v_4)	
(v_2)	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_2	(v_5,v_6)	v_5		
(v_2)	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_2	(v_5,v_6)	v_6		
$\{v_3,v_1,v_4\}$ (τα παιδιά της v_2, διατεταγμένα σύμφωνα με την αρχική διάταξη)	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_3	(v_5,v_6)	v_5	(v_3,v_5)	
$\{v_3,v_1,v_4,v_5\}$	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_3	(v_6)	v_6	(v_3,v_6)	
$\{v_3,v_1,v_4,v_6\}$	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$		( )			

Εναλλακτικός τρόπος εύρεσης συνδετικού δέντρου σε συνδεόμενο γράφημα *Γ* είναι η **διάσχιση κατά–βάθος.**

Ο αλγόριθμος της διάσχισης κατά βάθος για την εύρεση συνδετικού δέντρου σε συνδεόμενο γράφημα είναι ο εξής:

Αλγόριθμος 5.2: Κατά – βάθος διάσχιση γραφήματος

Είσοδος: Συνδεόμενο γράφημα $Γ = (V, E)$ και διάταξη $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ στις κορυφές του.

Έξοδος: Συνδετικό δέντρο *T*

```
procedure κατά–βάθος διάσχιση (V, E)
/* V = σύνολο κορυφών του Γ; E = σύνολο ακμών του Γ*/
/* V' = σύνολο κορυφών του συνδετικού δέντρου*/
/* E' = σύνολο ακμών του συνδετικού δέντρου*/
/* v1 ρίζα του συνδετικού δέντρου*/
w:= v1
V':={ v1}
E'=∅
while true do
    begin
    while υπάρχει ακμή (w, v) του Γ που η προσθήκη της στο τ δεν δημιουργεί κύκλο,
    begin
    επέλεξε ακμή (w, vk) με το μικρότερο k (με σεβασμό στη διάταξη των κορυφών του Γ), τέτοια ώστε η προσθήκη της στο τ δεν δημιουργεί κύκλο.
    Πρόσθεσε την (w, vk) στο E' και τη vk στο V'
    w:= vk
    end
    if w = v1 then            return(T)
    w := πατέρας της w στο T /* παλινδρόμιση */
    end
end κατά–βάθος–διάσχιση
```

Παράδειγμα 5.7

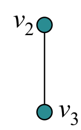
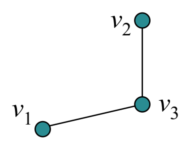
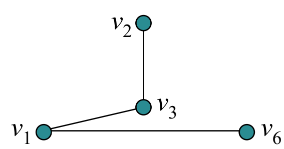
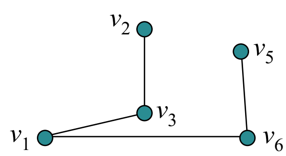
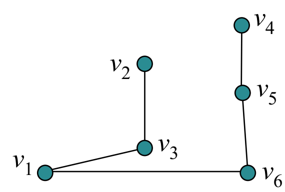
Στο παράδειγμα αυτό θα δείξω την εφαρμογή του αλγορίθμου της κατά βάθος διάσχισης στο γράφημα του σχήματος 5.8.

Για την εφαρμογή του αλγόριθμου απαιτείται μια διάταξη των κορυφών του γραφήματος, έστω $(v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$. Ως ρίζα του συνδετικού δέντρου θα θεωρήσουμε την πρώτη κορυφή στην προτεινόμενη διάταξη, δηλαδή τη v_2. Συνεπώς, αρχικά $V' = \{v_2\}$ και $w = v_2$.

Η 1η στήλη του πίνακα 5.2 δείχνει την τιμή της w, η 2η στήλη την τιμή της V', η 3η στήλη το σύνολο $V - V'$, η 4η στήλη δείχνει τις ακμές και κορυφές που προστίθενται στο συνδετικό δέντρο και η 5η στήλη δείχνει το συνδετικό δέντρο, όπως αυτό σχηματίζεται.

Πίνακας 5

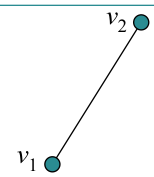
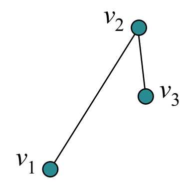
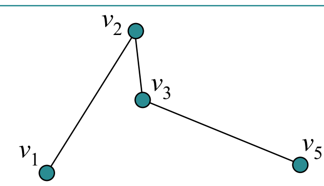
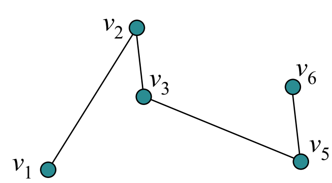
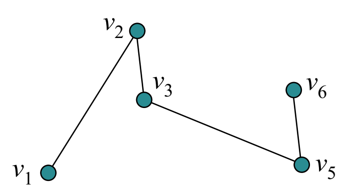
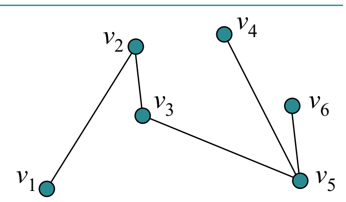
Κατά βάθος διάσχιση του δέντρου στο σχήμα 5.8 με διάταξη κορυφών $(v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$.

w	**V’**	**V–V’**	**(X,Y)**	**Συνδετικό Δέντρο**
v_2	$\{v_2\}$	(v_3,v_1,v_4,v_5,v_6)	(v_2,v_3)	
v_3	$\{v_2,v_3\}$	(v_1,v_4,v_5,v_6)	(v_3,v_1)	
v_1	$\{v_2,v_3,v_1\}$	(v_4,v_5,v_6)	(v_2,v_6)	
v_6	$\{v_2,v_3,v_1,v_6\}$	(v_4,v_5)	(v_6,v_5)	
v_5	$\{v_2,v_3,v_1,v_6,v_5\}$	(v_4)	(v_5,v_4)	

Θεωρώντας ως διάταξη κορυφών του γραφήματος την (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6), η εκτέλεση του αλγόριθμου της κατά βάθος διάσχισης φαίνεται στον πίνακα 5.3:

Πίνακας 5.3

Κατά βάθος διάσχιση του δέντρου στο σχήμα 5.8 με διάταξη κορυφών (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)

w	**V’**	**V–V’**	**(X,Y)**	**Συνδετικό Δέντρο**
v_1	$\{v_1\}$	(v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)	(v_1,v_2)	
v_2	$\{v_2,v_1\}$	(v_3,v_4,v_5,v_6)	(v_2,v_3)	
v_3	$\{v_2,v_1,v_3\}$	(v_4,v_5,v_6)	(v_3,v_5)	
v_5	$\{v_2,v_1,v_3,v_5\}$	(v_4,v_6)	(v_5,v_6)	
v_6	$\{v_2,v_3,v_1,v_6,v_5\}$	(v_4)	παλινδρόμηση	
v_5	$\{v_2,v_3,v_1,v_6,v_5\}$	(v_4)	(v_5,v_4)	

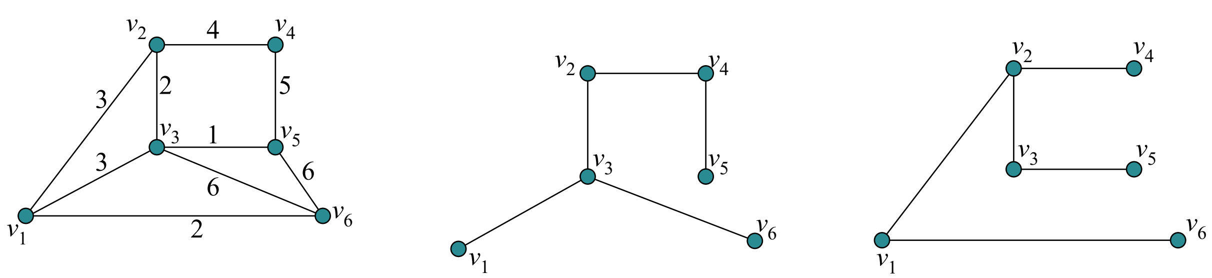
Θεωρείστε οτι θέλουμε να κατασκευάσουμε το φθηνότερο οδικό δίκτυο μεταξύ ενός αριθμού γεωγραφικών σημείων. Το οδικό δίκτυο στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρασταθεί ως γράφημα με βάρη. Οι κορυφές του γραφήματος παριστούν τα γεωγραφικά σημεία, οι ακμές τους δυνατούς δρόμους σύνδεσης των γεωγραφικών σημείων και τα βάρη των ακμών τα κόστη κατασκευής των αντίστοιχων δρόμων.

Για την κατασκευή του φθηνότερου οδικού δικτύου θα πρέπει να κατασκευαστούν δρόμοι με το λιγότερο δυνατό κόστος, έτσι ώστε όλα τα γεωγραφικά σημεία να είναι προσβάσιμα. Συνεπώς, στο αντίστοιχο γράφημα, πρέπει να βρούμε ένα συνδεόμενο υπο–γράφημα που να περιέχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος. Το άθροισμα των βαρών των ακμών του υπό – γραφήματος αυτού θα πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό. Τέλος, στο εν λόγω υπο–γράφημα δεν πρέπει να υπάρχουν κύκλοι, εφόσον η ύπαρξη κύκλου αυξάνει το κόστος κατασκευής, προσθέτοντας επιπλέον πρόσβαση σε ένα σημείο. Συμπερασματικά, το ζητούμενο υπο–γράφημα πρέπει να είναι συνδεόμενο, ακυκλικό, να περιέχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος και να έχει το μικρότερο δυνατό άθροισμα βαρών. Συνεπώς, ζητούμε ένα συνδετικό δέντρο του αρχικού γραφήματος, με το μικρότερο δυνατό βάρος.

Ορισμός 5.7: Έστω *Γ* γράφημα με βάρη. Ένα **ελάχιστο συνδετικό δέντρο (minimum spanning tree)** του *Γ* είναι ένα συνδετικό δέντρο του *Γ* με ελάχιστο βάρος (άθροισμα των βαρών των ακμών του).

Παράδειγμα 5.8

Έστω ο γράφος *Γ* του σχήματος 5.9(α). Το δέντρο *Τ′* στο σχήμα 5.9(β) είναι ένα συνδετικό δέντρο του γράφου *Γ*, με βάρος 20. Το *Τ′* δεν είναι ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο για τον *Γ*, αφού το συνδετικό δέντρο *Τ*, στο σχήμα 5.9(γ), έχει βάρος 12.



Γ (α) ***Τ'*** (β) ***Τ*** (γ)

Σχήμα 5.9
Το συνδετικό δέντρο τ είναι το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του γραφήματος με βάρη Γ. Το συνδετικό δέντρο Τ′ έχει μεγαλύτερο βάρος από το βάρος του Τ.

Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσω για την εύρεση ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε συνδεόμενο γράφημα με βάρη γράφημα είναι γνωστός ως αλγόριθμος του Prim.

Ο αλγόριθμος του Prim δημιουργεί δέντρο επιλέγοντας ακμές με το ελάχιστο δυνατό βάρος από το αρχικό γράφημα, τέτοιες ώστε η προσθήκη τους στο δέντρο δε δημιουργεί κύκλο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου προκύψει ένα συνδετικό δέντρο. Αποδεικνύεται ότι το συνδετικό δέντρο που προκύπτει είναι ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο.

Αλγόριθμος 5.3: Αλγόριθμος Prim για την εύρεση του ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε γράφημα με βάρη.

Είσοδος: Ένα συνδεόμενο γράφημα με βάρη, κορυφές $1, \ldots, n$, και αρχική κορυφή u. Αν (i, j) ακμή, το βάρος της ακμής (i, j) συμβολίζεται ως $w(i, j)$; αν ή (i, j) δεν είναι ακμή, τότε το $w(i, j)$ είναι ίσο με ∞.

Έξοδος: Το σύνολο των ακμών E του ελάχιστου συνδετικού δέντρου (mst).

procedure prim(w, n, u)

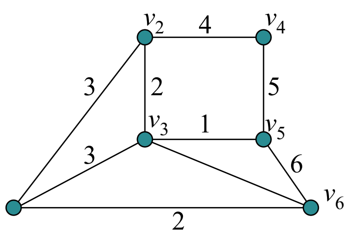
/* v(i) = 1 αν η κορυφή i υπάρχει ήδη στο ελάχιστο συνδετικό δέντρο*/

/* v(i)=0 αν η κορυφή i δεν έχει προστεθεί στο υπό–κατασκευή ελάχιστο συνδετικό δέντρο */

```
1. for i:=1 to n do
2.  v(i) := 0
3. v(u) :=1
4. E:=∅
5. For i:=1 to (n–1)
6.  begin
7.  min:= ∞
8.  for j:=1 to n do
9.      if v(j)=1 then
10.         for k=1 to n do
11.         if v(k) = 0 and w(j, k)<min then
12.             begin
13.             add_vertex:=k
```

```
14.          e:=(j, k)
15.          min:=w(j, k)
16.          end
17.v(add_vertex):=1
18.    E:= E∪{e}
19.end
20.return(E)
21.end prim
```

Παράδειγμα 5.9



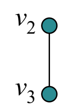
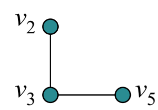
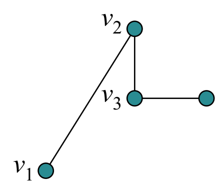
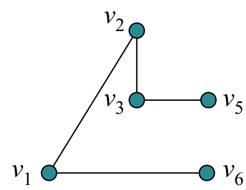
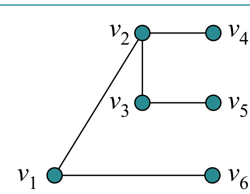
Σχήμα 5.10
Συνδεόμενο γράφημα με βάρη

Στο παράδειγμα αυτό θα παρουσιάσω την εφαρμογή του αλγόριθμου Prim στο γράφημα του σχήματος 5.10. Ως αρχική κορυφή θεωρούμε την κορυφή v_2.

Σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος επιλέγει μεταξύ των ακμών που έχουν μια κορυφή στο υπό κατασκευή δέντρο και μια κορυφή εκτός του δέντρου, την ακμή με το μικρότερο βάρος. Η επιλογή αυτή γίνεται στο διπλό βρόγχο που περιλαμβάνει τις εντολές 8 – 11. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται (v–1) φορές, όπου v ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Πίνακας 5.4

Εφαρμογή του αλγορίθμου 5.3 στο γράφημα του σχήματος 5.10

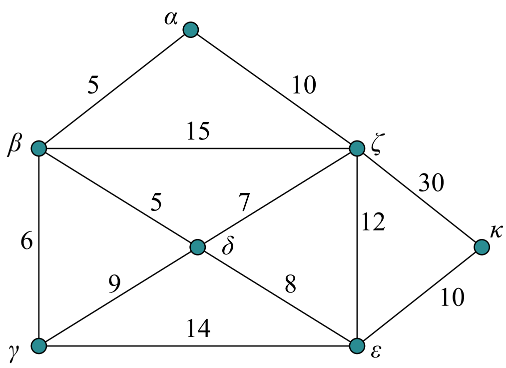
Κορυφές του υπό κατασκευή δέντρου	Βάρη των υποψήφιων ακμών	Συνδετικό δέντρο
$\{v_2\}$	$w(v_2, v_4) = 4$ $w(v_2, v_3) = 2\surd$ $w(v_2, v_1) = 3$	
$\{v_2, v_3\}$	$w(v_2, v_4) = 4$ $w(v_2, v_1) = 3$ $w(v_3, v_1) = 3$ $w(v_3, v_5) = 1\surd$ $w(v_3, v_6) = 6$	
$\{v_2, v_3, v_5\}$	$w(v_2, v_4) = 4$ $w(v_2, v_1) = 3\surd$ $w(v_3, v_1) = 3$ $w(v_3, v_6) = 6$ $w(v_5, v_4) = 4$ $w(v_5, v_6) = 3$	
$\{v_2, v_3, v_5, v_1\}$	$w(v_2, v_4) = 4$ $w(v_2, v_6) = 6$ $w(v_5, v_4) = 4$ $w(v_5, v_6) = 3$ $w(v_1, v_6) = 2\surd$	
$\{v_2, v_3, v_5, v_1, v_6\}$	$w(v_2, v_4) = 4\surd$ $w(v_5, v_4) = 4$	

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.4

Αν στο γράφημα του σχήματος 5.11 οι κορυφές παριστούν πόλεις και οι αριθμοί στις ακμές παριστούν το κόστος κατασκευής του κάθε δρόμου, να βρεθεί

(α) ένα σύστημα δρόμων που μπορεί να συνδέει τις πόλεις, δίχως να δημιουργούνται κύκλοι στο όλο δίκτυο.

(β) Να βρεθεί το φθηνότερο σύστημα δρόμων που μπορεί να κατασκευαστεί. Παρατηρήστε ότι αυτό δεν μπορεί να περιλαμβάνει κύκλους.



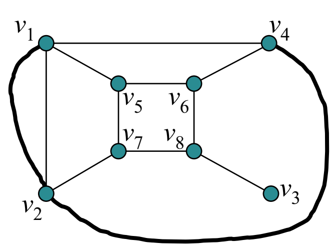
Σχήμα 5.11
Δίκτυο πόλεων και οι μεταξύ αυτών αποστάσεις.

Δραστηριότητα 5.4

Στο γράφημα του σχήματος 5.12 εφαρμόστε τον αλγόριθμο της κατά – πλάτους διάσχισης και τον αλγόριθμο της κατά–βάθους διάσχισης.

Υπόδειξη

Χρησιμοποιήστε τους πίνακες των παραδειγμάτων 5.6 και 5.7 αντίστοιχα.



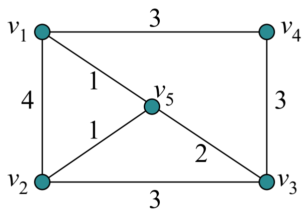
Σχήμα 5.12
Συνδεόμενο γράφημα.

Δραστηριότητα 5.5

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Prim στο γράφημα με βάρη του σχήματος 5.13.

Υπόδειξη

Χρησιμοποιήστε τον τρόπο και τον πίνακα που υποδεικνύει το παράδειγμα 5.8



Σχήμα 5.13
Γράφημα με βάρη

Σύνοψη Ενότητας

Η παρούσα ενότητα παρουσίασε την έννοια του συνδετικού δέντρου γραφήματος. Η έννοια αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία, όταν, δεδομένου ενός συνδεόμενου γραφήματος, θέλουμε να βρούμε συνδεόμενο υπογράφημα αυτού που περιέχει όλες τις κορυφές του, αλλά δεν περιέχει κύκλους. Η ενότητα παρουσιάζει ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους διάσχισης γραφημάτων, που χρησιμοποιούνται και για την εύρεση συνδετικών δέντρων σε συνδεόμενα γραφήματα. Στην περίπτωση γραφημάτων με βάρη, μας ενδιαφέρουν τα συνδετικά δέντρα με το μικρότερο δυνατό συνολικό βάρος. Για τον προσδιορισμό των συνδετικών αυτών δέντρων, η ενότητα παρουσίασε τον αλγόριθμο του Prim.

5.3 Δυαδικά δέντρα

Σκοπός

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι η παρουσίαση μιας ιδιαίτερα σημαντικής κατηγορίας δέντρων: δέντρα όπου κάθε κορυφή έχει το πολύ δύο παιδιά. Τα δυαδικά δέντρα είναι ιδιαίτερα σημαντικά ως δομή δεδομένων για την αποθήκευση και την οργάνωση πληροφορίας. Η ενότητα παρουσιάζει βασικές ιδιότητες των δυαδικών δέντρων και αντιπροσωπευτικούς αλγόριθμους για τη διάσχιση των δέντρων αυτών και την αναζήτηση πληροφορίας σε αυτά.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Η μελέτη της παρούσας ενότητας θα σας καταστήσει ικανούς για την:

- *Οργάνωση πληροφορίας σε δυαδικά δέντρα αναζήτησης,*
- *Αναζήτηση πληροφορίας σε δυαδικά δέντρα αναζήτησης,*
- *Εφαρμογή αλγορίθμων διάσχισης δυαδικών δέντρων.*

Έννοιες κλειδιά

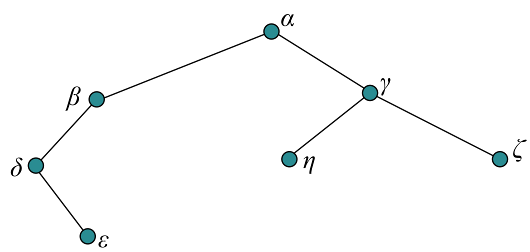
- *δυαδικό δέντρο*
- *πλήρες δυαδικό δέντρο*
- *δυαδικό δέντρο αναζήτησης*
- *ενδοδιατεταγμένη διάσχιση δυαδικών δέντρων*
- *προδιατεταγμένη διάσχιση δυαδικών δέντρων*
- *μεταδιατεταγμένη διάσχιση δυαδικών δέντρων*

Ορισμός 5.8: Δυαδικό δέντρο (binary tree) είναι δέντρο με ρίζα, όπου κάθε κορυφή έχει ένα, δύο ή και κανένα παιδιά.

Εάν μια κορυφή έχει ένα παιδί, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως το αριστερό ή το δεξί παιδί της κορυφής, αλλά ποτέ και τα δύο ταυτόχρονα. Εάν μια κορυφή έχει δύο παιδιά, τότε ένα παιδί χαρακτηρίζεται ως δεξί και το άλλο ως αριστερό παιδί της κορυφής αυτής.

Παράδειγμα 5.10

Το δέντρο του σχήματος 5.14, είναι ένα δυαδικό δέντρο, με ρίζα α. Η κορυφή β είναι το αριστερό παιδί της α και η γ το δεξί. Η δ είναι το αριστερό παιδί της β, η οποία δεν έχει δεξί παιδί, κοκ.



Σχήμα 5.14
Δυαδικό δέντρο με ρίζα α

Ορισμός 5.9: Ένα **πλήρες δυαδικό δέντρο (full binary tree)** είναι δυαδικό δέντρο στο οποίο κάθε κορυφή έχει είτε δύο ή κανένα παιδιά.

Θεώρημα 5.3

Εάν τ είναι ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με ν εσωτερικές κορυφές, τότε το τ έχει ν + 1 τερματικές κορυφές και $2\nu + 1$ κορυφές συνολικά.

Απόδειξη

Οι κορυφές του τ διακρίνονται σε αυτές που είναι παιδιά κάποιας κορυφής (έχουν πατέρα) και κορυφές που δεν είναι παιδιά καμιάς κορυφής (δεν έχουν πατέρα). Στις τελευταίες περιέχεται μόνο μία κορυφή, η ρίζα του δέντρου. Αφού υπάρχουν ν εσωτερικές κορυφές, η καθεμία από τις οποίες έχει δύο παιδιά, υπάρχουν 2ν παιδιά στο δέντρο. Άρα, ο συνολικός αριθμός κορυφών στο δέντρο είναι $2\nu + 1$, από τις οποίες ν είναι εσωτερικές. Επομένως, οι $(2\nu + 1) - \nu = \nu + 1$ είναι οι τερματικές.

Θεώρημα 5.4

Για ένα δυαδικό δέντρο ύψους Η με t τερματικές κορυφές ισχύει το εξής:

$$\log_2 t \leq H$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την ανισότητα $t \leq 2^H$ επαγωγικά ως προς το H. Τότε η σχέση $\log_2 t \leq H$ προκύπτει παίρνοντας το λογάριθμο με βάση το 2 και των δύο μελών της παραπάνω ανισότητας.

Βασικό βήμα. Για $H = 0$, το δυαδικό δέντρο αποτελείται από μια κορυφή, τη ρίζα του. Άρα, $t = 1$ και η ανισότητα $1 \leq 2^0$ ισχύει.

Επαγωγικό βήμα. Έστω ότι η σχέση του θεωρήματος ισχύει για οποιοδήποτε δυαδικό δέντρο με ύψος μικρότερο του H, και έστω δυαδικό δέντρο τ ύψους H.

Ας υποθέσουμε ότι η ρίζα του τ έχει μόνο ένα παιδί. Τότε, αφαιρώντας τη ρίζα και την ακμή που εφάπτεται σε αυτή, το δέντρο που προκύπτει έχει ύψος $(H - 1)$ και τον ίδιο αριθμό t τερματικών κορυφών, όπως και το T. Από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος ισχύει ότι $t \leq 2^{H-1}$. Επομένως, $t \leq 2^{H-1} \leq 2^{H}$, δηλαδή $t \leq 2^{H}$.

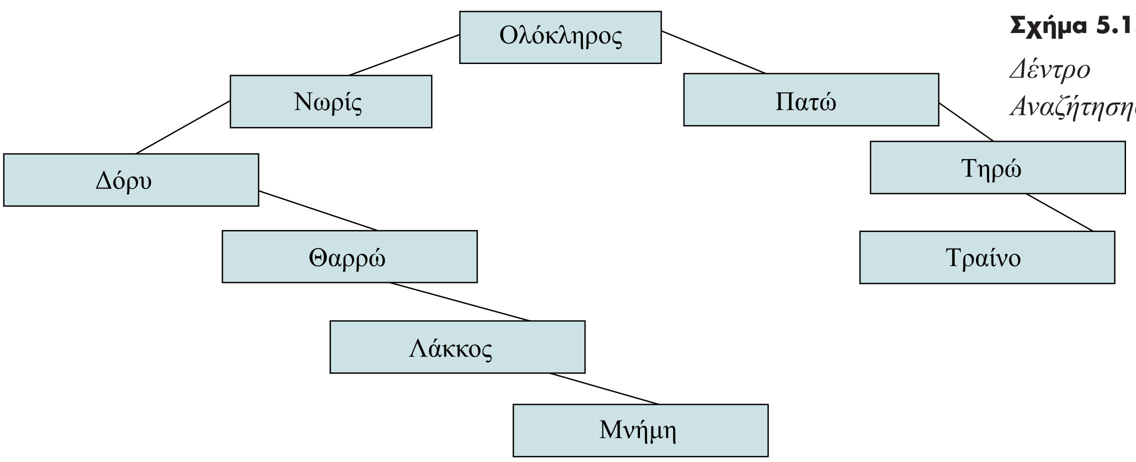
Έστω ότι η ρίζα του τ έχει δύο παιδιά v_1 και v_2. Έστω T_i, $i = 1, 2$, το υπό – δέντρο του τ με ρίζα την κορυφή v_i. Έστω ότι το T_i έχει ύψος H_i, με $H_i \leq (H-1)$, και t_i τερματικές κορυφές, $i = 1, 2$. Τότε, από την υπόθεση του επαγωγικού βήματος ισχύει ότι $t_i \leq 2^{H}$, $i = 1, 2$.

Οι τερματικές κορυφές του τ είναι οι τερματικές κορυφές των δέντρων T_1 και T_2. Δηλαδή, $t_1 + t_2 = t$. Επομένως, $t = t_1 + t_2 \leq 2^{H_1} + 2^{H_2} \leq 2^{H-1} + 2^{H-1} \leq 2^{H}$

Συνεπώς, η ανισότητα $t \leq 2^{H}$ ισχύει. Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη.

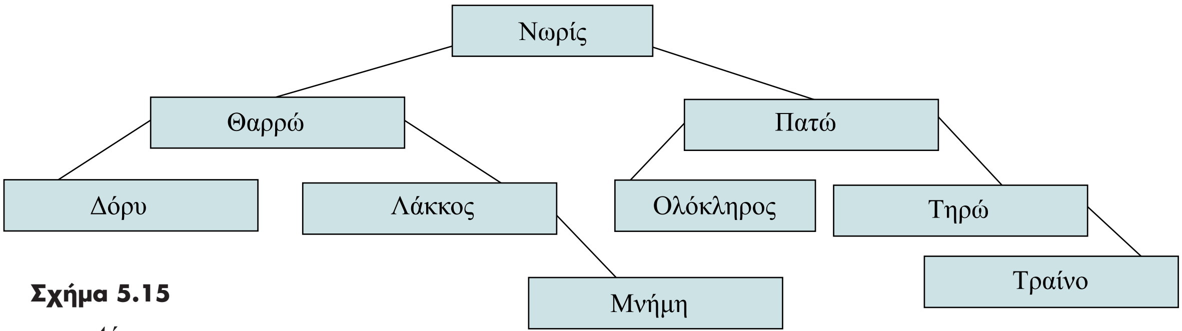
Ορισμός 5.10: Δέντρο αναζήτησης (search tree) είναι δυαδικό δέντρο T, σε κάθε κορυφή του οποίου αποθηκεύεται ένα δεδομένο. Τα δεδομένα αποθηκεύονται με τέτοιο τρόπο, ώστε για κάθε κορυφή v στο T, κάθε δεδομένο στο αριστερό υπό–δέντρο της v είναι μικρότερο από το δεδομένο στη v, και κάθε δεδομένο στο δεξί υπό–δέντρο της v είναι μεγαλύτερο από το δεδομένο της v.

Για παράδειγμα, οι λέξεις (Ολόκληρος, Πατώ, Νωρίς, Δόρυ, Τηρώ, Θαρρώ, Λάκκος, Τραίνο, Μνήμη) μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης σαν και αυτό του σχήματος 5.15 με ρίζα τη λέξη «Ολόκληρος» ή σε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης σαν και αυτό του σχήματος 5.16 με ρίζα τη λέξη «Νωρίς».



Σχήμα 5.15
Δέντρο Αναζήτησης

Παρατηρήστε ότι κάθε δεδομένο (λέξη) μιας κορυφής είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) από κάθε πληροφορία στο αριστερό (αντίστοιχα δεξί) υπό δέντρο της κορυφής αυτής, με τη λεξικογραφική έννοια του «μεγαλύτερος» και «μικρότερος»[1].



Σχήμα 5.15
Δέντρο Αναζήτησης

Δεδομένου μιας ακολουθίας δεδομένων, ο αλγόριθμος κατασκευής ενός δυαδικού δέντρου αναζήτησης τ είναι ο ακόλουθος:

Αλγόριθμος 5.4: Αλγόριθμος κατασκευής δυαδικού δέντρου αναζήτησης.

Είσοδος. Μια ακολουθία $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ διακριτών δεδομένων. Το μήκος ν της ακολουθίας αυτής.

Έξοδος. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης T.

1. Δημιούργησε τη ρίζα του δέντρου. Αποθήκευσε σε αυτό το δεδομένο δ_1.
2. Έως ότου τελειώσουν τα δεδομένα, πάρε το επόμενο δ_i, i=2, 3, ...ν, από την ακολουθία δ_2, ..., δν.
3. Τρέχουσα κορυφή = ρίζα του δέντρου.
4. Εάν δ_i είναι μικρότερο από το δεδομένο της τρέχουσας κορυφής, τότε
    4.1. Εάν η τρέχουσα κορυφή δεν έχει αριστερό παιδί, τότε δημιούργησε αριστερό παιδί και αποθήκευσε σε αυτό το δ_i.
    4.2 Αλλιώς, τρέχουσα κορυφή = αριστερό παιδί της τρέχουσας κορυφής, Πήγαινε στο 4.
5. Εάν δ_i είναι μεγαλύτερο από το δεδομένο της τρέχουσας κορυφής, τότε

[1] Σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη, η συμβολοσειρά $(X_1X_2...X_\nu)$ θεωρείται μικρότερη της $(Y_1Y_2...Y_\mu)$, αν (α) $\nu = \mu$ και υπάρχει $0 < \kappa < \nu$, τέτοιο ώστε $X_i=Y_i$ $1 \le i \le \kappa$, και $X_\kappa < Y_\kappa$ ή (β) $\nu < \mu$ και $X_\iota = Y_i$ $1 \le i \le \nu$. Αν X και Y είναι αριθμοί, τότε οι τελεστές σύγκρισης είναι οι γνωστοί μας τελεστές, ενώ, αν είναι γράμματα, τότε το X θεωρείται μικρότερο του Y, αν η θέση του στο αλφάβητο είναι πριν τη θέση του Y.

5.1 Εάν η τρέχουσα κορυφή δεν έχει δεξί παιδί, τότε δημιούργησε δεξί παιδί και αποθήκευσε σε αυτό το δ_i.

5.2 Αλλιώς, τρέχουσα κορυφή = δεξί παιδί της τρέχουσας κορυφής, Πήγαινε στο 4.

6. Πήγαινε στο 2.

Παράδειγμα 5.11

Δεδομένης της ακολουθίας (Ολόκληρος, Πατώ, Νωρίς, Δόρυ, Τηρώ, Θαρρώ, Λάκκος, Τραίνο, Μνήμη), αν θεωρήσουμε ότι ρίζα του δέντρου αναζήτησης είναι κορυφή με τη λέξη «Ολόκληρος», τότε ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου κατασκευής δυαδικού δέντρου.

Η πρώτη στήλη δείχνει το δεδομένο της τρέχουσας κορυφής, η δεύτερη στήλη δείχνει το αποτέλεσμα της λεξικογραφικής σύγκρισης της τρέχουσας λέξης και της λέξης της τρέχουσας κορυφής, ενώ η τρίτη στήλη δείχνει το σχηματισμό του δέντρου αναζήτησης.

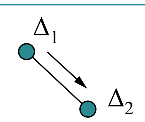
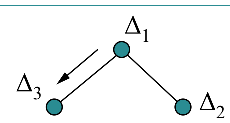
Για συντομία, χρησιμοποιούμε την παρακάτω αντιστοιχία μεταξύ των λέξεων της ακολουθίας και συμβόλων:

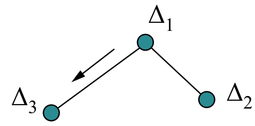
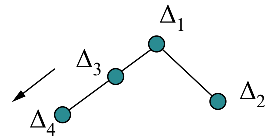
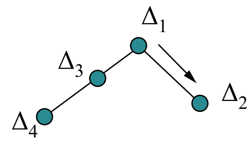
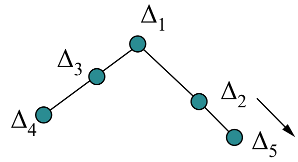
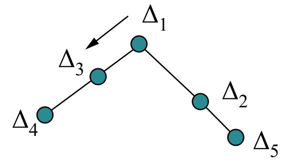
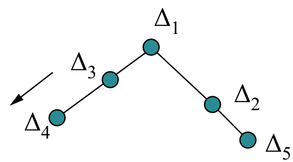
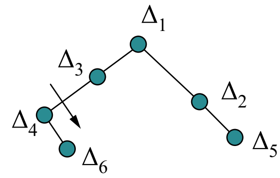
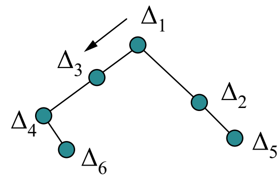
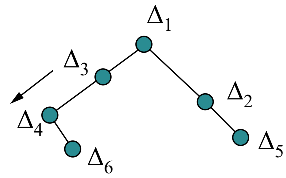
Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9
Ολόκληρος	Πατώ	Νωρίς	Δόρυ	Τηρώ	Θαρρώ	Λάκκος	Τραίνο	Μνήμη

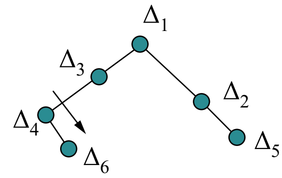
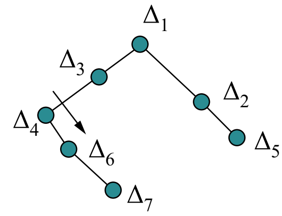
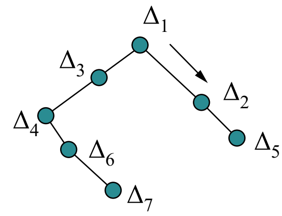
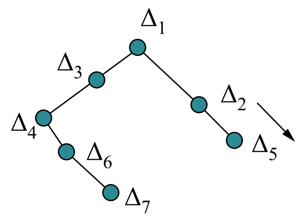
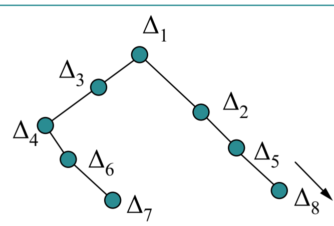
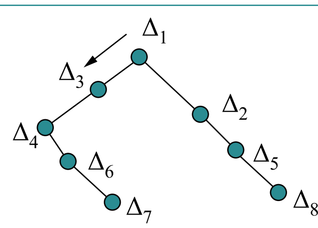
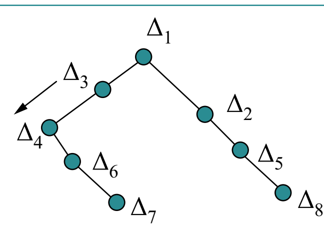
Η κατεύθυνση των βελών στην τρίτη στήλη του πίνακα δείχνει την κατεύθυνση στο δυαδικό δέντρο όπου «οδηγείται» ο αλγόριθμος με βάση το αποτέλεσμα της σύγκρισης στη δεύτερη στήλη του ίδιου πίνακα.

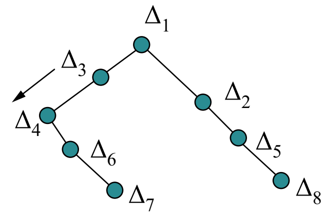
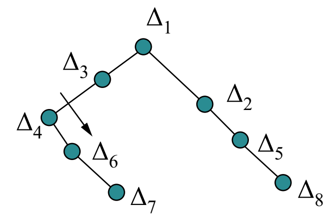
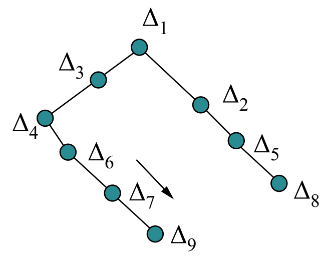
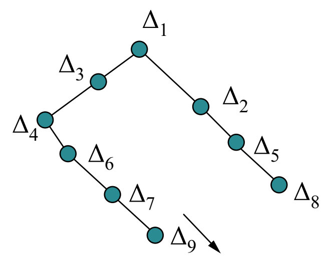
Πίνακας 5.5

Διαδικασία κατασκευής δυαδικού δέντρου αναζήτησης

Τρέχουσα κορυφή	Αποτέλεσμα σύγκρισης	Δέντρο αναζήτησης
Δ_1	$\Delta_1<\Delta_2$	
Δ_3	$\Delta_3<\Delta_1$	

Δ_4	$\Delta_4<\Delta_1$	
Δ_4	$\Delta_4<\Delta_3$	
Δ_5	$\Delta_1<\Delta_5$	
Δ_5	$\Delta_2<\Delta_5$	
Δ_6	$\Delta_6<\Delta_1$	
Δ_6	$\Delta_6<\Delta_3$	
Δ_6	$\Delta_4<\Delta_6$	
Δ_7	$\Delta_7<\Delta_1$	
Δ_7	$\Delta_7<\Delta_3$	

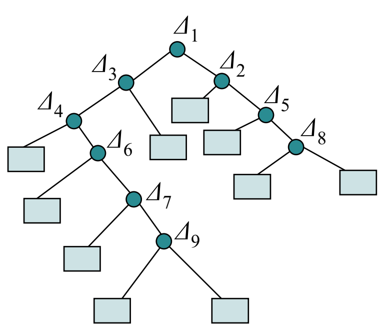
Δ_7	$\Delta_4 < \Delta_7$	
Δ_7	$\Delta_6 < \Delta_7$	
Δ_8	$\Delta_1 < \Delta_8$	
Δ_8	$\Delta_2 < \Delta_8$	
Δ_8	$\Delta_5 < \Delta_8$	
Δ_9	$\Delta_9 < \Delta_1$	
Δ_9	$\Delta_9 < \Delta_1$	

Δ_9	$\Delta_9<\Delta_3$	
Δ_9	$\Delta_4<\Delta_9$	
Δ_9	$\Delta_6<\Delta_9$	
Δ_9	$\Delta_7<\Delta_9$	

Τα δυαδικά δέντρα αναζήτησης, όπως ακριβώς δηλώνει το όνομά τους, είναι χρήσιμα για την εύρεση και τον εντοπισμό δεδομένων. Δηλαδή, δεδομένου ενός στοιχείου *Δ* μπορούμε να αποφασίσουμε αν το *Δ* βρίσκεται στο δυαδικό δέντρο αναζήτησης και, αν βρίσκεται, να βρούμε τη θέση του. Για να αποφασίσουμε αν το *Δ* βρίσκεται στο δέντρο, ξεκινάμε από τη ρίζα. Σε αντιστοιχία και με τον αλγόριθμο κατασκευής που διατύπωσα παραπάνω, χρησιμοποιώ τον όρο «τρέχουσα κορυφή» για να δηλώσω την κορυφή όπου έχει φτάσει η αναζήτηση. Συγκρίνουμε το *Δ* με το δεδομένο που είναι αποθηκευμένο στην τρέχουσα κορυφή. Αν το *Δ* είναι ίσο με το δεδομένο αυτό, τότε η αναζήτηση σταματάει επιτυχώς. Αν είναι μικρότερο, τότε η αναζήτηση συνεχίζει στο αριστερό υπό–δέντρο της τρέχουσας κορυφής με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Στην αντίθετη περίπτωση, η αναζήτηση συνεχίζει στο δεξί υπό–δέντρο της τρέχουσας κορυφής. Στη δραστηριότητα 5.6 σας ζητείται να διατυπώσετε τον αλγόριθμο αναζήτησης.

Για να δείτε τη χρησιμότητα των δέντρων αναζήτησης ως δομή δεδομένων για την αναζήτηση πληροφορίας, φανταστείτε ότι έχουμε μια ακολουθία 2.000.000 δεδομένων, μεταξύ των οποίων αναζητούμε ένα δεδομένο Δ. Στην περίπτωση της σειριακής αναζήτησης, στην καλύτερη περίπτωση το δεδομένο αυτό θα βρίσκεται στην αρχή της ακολουθίας, ενώ στη χειρότερη δεν θα βρίσκεται στην ακολουθία. Στην τελευταία περίπτωση, θα έχουν πραγματοποιηθεί 2.000.000 συγκρίσεις. Επομένως, κατά μέσο όρο, ο αριθμός των συγκρίσεων για την εύρεση δεδομένου Δ θα είναι (2.000.000 + 1) /2, δηλαδή περίπου 1.000.000 συγκρίσεις. Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε δυαδικό δέντρο αναζήτησης, αν ελαχιστοποιήσουμε το ύψος του δέντρου, τότε θα δείξω ότι ο αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται είναι $\lceil \log_2(2.000.000 + 1) \rceil = 21$.

Έστω τ δυαδικό δέντρο αναζήτησης με ν κορυφές και έστω T^* το πλήρες δυαδικό δέντρο που προκύπτει αν στο τ προσθέσουμε «εικονικά» αριστερά και δεξιά παιδιά στις κορυφές, όπου αυτό είναι δυνατόν. Αν για παράδειγμα πάρουμε το τελικό δυαδικό δέντρο αναζήτησης που σχηματίστηκε στο παράδειγμα 5.11 τότε το πλήρες δυαδικό δέντρο που σχηματίζεται με την παραπάνω μέθοδο είναι αυτό του σχήματος 5.17, όπου οι εικονικοί κόμβοι σχηματίζονται με τετράγωνα.



Σχήμα 5.17
Δέντρο αναζήτησης με εικονικούς κόμβους

Αν αναζητείται δεδομένο που δεν υπάρχει στο δέντρο αναζήτησης, τότε η αναζήτηση καταλήγει σε κάποια από τις εικονικές κορυφές. Αν ορίσουμε ότι στη χειρότερη περίπτωση ο αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται για να βρούμε ένα δεδομένο είναι ίσος με το ύψος h του δέντρου T^*, από το θεώρημα 5.4 γνωρίζουμε ότι $\log_2 t \le h$, όπου t ο αριθμός των τερματικών κορυφών στο T^*. Το πλήρες δυαδικό δέντρο T^* έχει ν εσωτερικές κορυφές (δηλαδή όσα και τα δεδομένα που αποθηκεύονται στο δέντρο), και επομένως ο αριθμός των τερματικών του κορυφών θα είναι $t = (\nu + 1)$. Συνεπώς, στη χειρότερη περίπτωση, ο αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται για την αναζήτηση ενός δεδομένου θα είναι τουλάχιστον ίσος με $\log_2 t = \log_2(\nu + 1)$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.5

Να διατυπωθεί ο αλγόριθμος κατασκευής δυαδικού δέντρου αναζήτησης που διατυπώθηκε παραπάνω σε ψευδοκώδικα.

Δραστηριότητα 5.6

Να διατυπωθεί αλγόριθμος για την αναζήτηση δεδομένων σε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης.

Υπόδειξη:

Διατυπώστε αναδρομικό αλγόριθμο, χρησιμοποιώντας ως πρότυπο τον αλγόριθμο της άσκησης αυτοαξιολόγησης 5.5 Η τερματική συνθήκη του αλγορίθμου θα πρέπει να ισχύει όταν το δεδομένο έχει βρεθεί στο δέντρο ή, όταν ο αλγόριθμος καλείται να κάνει αναζήτηση σε δέντρο/υπό δέντρο με ρίζα κενή.

Δραστηριότητα 5.7

Δεδομένης της ακολουθίας (Ολόκληρος, Πατώ, Νωρίς, Δόρυ, Τηρώ, Θαρρώ, Λάκκος, Τραίνο, Μνήμη), αν θεωρήσουμε ότι η ρίζα του δέντρου αναζήτησης περιέχει τη λέξη «Νωρίς», να περιγραφεί ο σχηματισμός του δυαδικού δέντρου αναζήτησης για τα παραπάνω δεδομένα. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο που διατυπώσατε στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 5.5

Παρακάτω θα περιγράψουμε τρεις τρόπους διάσχισης (*t*raversal) δυαδικών δέντρων. Και οι τρεις τρόποι περιγράφονται με αναδρομικούς αλγόριθμους:

Αλγόριθμος 5.5: Προδιατεταγμένη διάσχιση (preorder traversal).

Είσοδος. R, η ρίζα του δυαδικού δέντρου.

Έξοδος. Εξαρτάται τι σημαίνει «επίσκεψη» στην κορυφή.

procedure preorder(R)

1. if R είναι κενή then return

2. επίσκεψη(R)

3. l:= αριστερό παιδί της R

4. preorder(l)

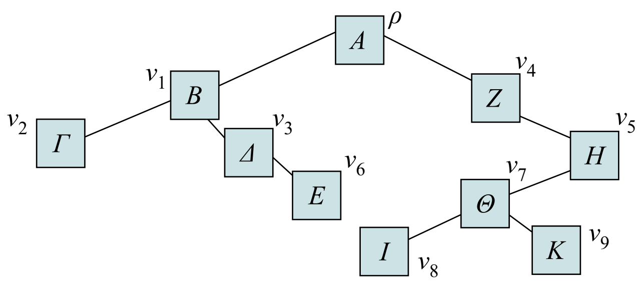
5. r:=δεξί παιδί της R

6. preorder(r)

7. end

Παράδειγμα 5.12

Εφαρμόζοντας την προδιατεταγμένη διάσχιση στο δέντρο του σχήματος 5.18, οι επισκέψεις στις κορυφές θα πραγματοποιηθούν με την ακόλουθη σειρά: ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ.



Σχήμα 5.18
Δέντρο με δεδομένα στις κορυφές.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου της προδιατεταγμένης διάσχισης στην περίπτωση του δέντρου του σχήματος 5.18 εκτελείται ως εξής:

procedure preorder ρ

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(A)**

Βήμα 3: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 4: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=v_1)

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(B)**

Βήμα 3: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 4: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=v_2)

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Γ)**

Βήμα 3: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 4: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 6: preorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

Βήμα 7: end

(*Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση τερματικής κορυφής απλά γίνεται επίσκεψη στην κορυφή αυτή. Στη συνέχεια, για τις τερματικές κορυφές θα δείχνω μόνο την επίσκεψη στην κορυφή και όχι όλα τα βήματα του αλγορίθμου*)

Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 6: preorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=v_3)

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Δ)**

Βήμα 3: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 4: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 6: preorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=v_6)

Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Ε)**

Βήμα 7: end

Βήμα 7: end

Η διάσχιση συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο και στο δεξί υποδέντρο της ρίζας του δέντρου(σας ζητείται στη δραστηριότητα 5.7.

Αλγόριθμος 5.6: Ενδοδιατεταγμένη διάσχιση (inorder traversal).

Είσοδος. *R*, η ρίζα ενός δυαδικού δέντρου.

Έξοδος. Εξαρτάται τι σημαίνει «επίσκεψη» στην κορυφή.

procedure inorder(R)

1. if R είναι κενή then

2. return

3. l:= αριστερό παιδί της R

4. inorder(l)

5. επίσκεψη(R)

6. r:=δεξί παιδί της R

7. inorder(r)

end

Παράδειγμα 5.13

Εφαρμόζοντας την ενδοδιατεταγμένη διάσχιση στο δέντρο του σχήματος 5.18, οι επισκέψεις στις κορυφές θα πραγματοποιηθούν με την ακόλουθη σειρά:

ΓΒΔΕΑΖΙΘΚΗ

Η εκτέλεση του αλγορίθμου της ενδοδιατεταγμένης διάσχισης στην περίπτωση του δέντρου του σχήματος 5.18 εκτελείται ως εξής:

procedure inorder ρ

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 3: inorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με $ρ=v_1$)

    Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

    Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

    Βήμα 3: inorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με $ρ=v_2$)

        Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

        Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

        Βήμα 3: inorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με ρ=κενό)

            Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η inorder τερματίζει.

        Βήμα 4: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Γ)**

        Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

        Βήμα 6: inorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η inorder τερματίζει.

Βήμα 7: end

(*Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση τερματικής κορυφής απλά γίνεται επίσκεψη στην κορυφή αυτή. Στη συνέχεια, για τις τερματικές κορυφές απλά θα δείχνω την επίσκεψη στην κορυφή και όχι όλα τα βήματα του αλγορίθμου*)

Βήμα 4: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Β)**

Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 6: inorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με ρ=v_3)

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 3: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

Βήμα 4: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Δ)**

Βήμα 5: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 6: inorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας inorder με ρ=v_6)

Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Ε)**

Βήμα 7: end

Βήμα 7: end

Η διάσχιση συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο και στο δεξί υποδέντρο της ρίζας του δέντρου (σας ζητείται στη δραστηριότητα 5.7.

Αλγόριθμος 5.7: Μεταδιατεταγμένη διάσχιση (postorder traversal).

Είσοδος. *R*, η ρίζα ενός δυαδικού δέντρου.

Έξοδος. Εξαρτάται τι σημαίνει «επίσκεψη» στην κορυφή.

procedure postorder(R)

1. if R is empty then

2. return

3. l:= αριστερό παιδί της R

4. postorder(l)

5. r:=δεξί παιδί της R

6. postorder(r)

7. επίσκεψη(R)

end

Παράδειγμα 5.14

Εφαρμόζοντας τη μετα διατεταγμένη διάσχιση στο δέντρο του σχήματος 5.18, οι επισκέψεις στις κορυφές θα πραγματοποιηθούν με την ακόλουθη σειρά: ΓΕΔΒΙΚΘΗΖΑ.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου της μεταδιατεταγμένης διάσχισης στην περίπτωση του δέντρου του σχήματος 5.18 εκτελείται ως εξής:

procedure postorder ρ

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 3: postorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=v_1)

    Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

    Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

    Βήμα 3: postorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=v_2)

        Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

        Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

        Βήμα 3: postorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=κενό)

            Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της postorder τερματίζει.

        Βήμα 4: r= δεξί παιδί της ρ

        Βήμα 5: postorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=κενό)

            Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

        Βήμα 6: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Γ)**

        Βήμα 7: end

(Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση τερματικής κορυφής απλά γίνεται επίσκεψη στην κορυφή αυτή. Στη συνέχεια, για τις τερματικές κορυφές απλά θα δείχνω την επίσκεψη στην κορυφή και όχι όλα τα βήματα του αλγορίθμου)

Βήμα 4: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 5: postorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=v_3)

Βήμα 1: η ρ δεν είναι κενή, συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 2.

Βήμα 2: l= αριστερό παιδί της ρ

Βήμα 3: preorder l (Νέα κλήση της διαδικασίας preorder με ρ=κενό)

Βήμα 1: η ρ είναι κενή, συνεπώς η τρέχουσα εκτέλεση της preorder τερματίζει.

Βήμα 4: r= δεξί παιδί της ρ

Βήμα 5: postorder r (Νέα κλήση της διαδικασίας postorder με ρ=v_6)

Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Ε)**

Βήμα 6: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Δ)**

Βήμα 7: end

Βήμα 6: Επίσκεψη στην κορυφή ρ **(Β)**

Βήμα 7: end

Η διάσχιση συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο και στο δεξί υποδέντρο της ρίζας του δέντρου (σας ζητείται στη δραστηριότητα 5.7.

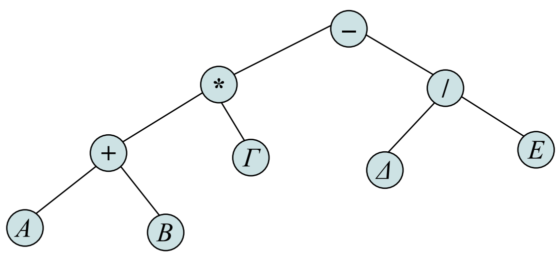
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.6

Η παρούσα άσκηση αυτοαξιολόγησης αφορά στους τρόπους παράστασης αριθμητικών παραστάσεων κάνοντας χρήση δυαδικών δέντρων. Θα θεωρήσουμε παραστάσεις που αφορούν σε οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών ή σταθερών (αριθμών) και τους τέσσερις τελεστές +, –, /, *. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας (πλήρους παρενθέσεων) παράστασης είναι η ακόλουθη:

$$(((Α + Β)*Γ) – (Δ/Ε)). \text{ (Ι)}$$

Η συνηθισμένη μορφή γραφής αριθμητικών παραστάσεων λέγεται ενθεματική (infix) μορφή και χαρακτηρίζεται από το ότι ένας τελεστής βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς στους οποίους εφαρμόζεται Η παράσταση (Ι) βρίσκεται σε ενθεματική μορφή.

Μια αριθμητική παράσταση σαν την (Ι) μπορεί να παρασταθεί από ένα δυαδικό δέντρο. Οι τερματικές κορυφές του δέντρου αντιστοιχούν στους αριθμούς και οι εσωτερικές κορυφές αντιστοιχούν στους τελεστές. Για παράδειγμα, η παράσταση (Ι) μπορεί να παρασταθεί από το δυαδικό δέντρο του σχήματος 5.19. Η ρίζα κάθε υποδέντρου ενός δυαδικού δέντρου που παριστά μια αριθμητική παράσταση είναι ένας τελεστής, ο οποίος εφαρμόζεται στο αριστερό και το δεξί υποδέντρο του. Η σειρά έχει σημασία, διότι το αριστερό παιδί μιας κορυφής αντιστοιχεί στο αριστερό μέλος της αριθμητικής παράστασης, ενώ το δεξιό παιδί στο δεξί μέλος αυτής.



Σχήμα 5.19

Δυαδικό δέντρο για την αναπαράσταση της αριθμητικής παράστασης (Ι)

Εάν διασχίσουμε το δυαδικό δέντρο του σχήματος 5.19, χρησιμοποιώντας ενδοδιατεταγμένη διάσχιση, και προσθέσουμε παρενθέσεις, τότε μπορούμε να πάρουμε την πλήρη σε παρενθέσεις ενθεματική μορφή της αριθμητικής παράστασης.

Σε αυτή τη μορφή δεν είναι απαραίτητο να καθορίσουμε ποιες πράξεις θα τελεστούν, με ποια προτεραιότητα, διότι αυτό καθορίζεται σαφέστατα από τις παρενθέσεις.

Εάν διασχίσουμε το δυαδικό δέντρο του σχήματος 5.19 με μεταδιατεταγμένη διάσχιση, το αποτέλεσμα είναι η μεταθεματική μορφή της αριθμητικής παράστασης (Ι).

Τέλος, διασχίζοντας το δυαδικό δέντρο του σχήματος 5.19 με προδιατεταγμένη διάσχιση, το αποτέλεσμα είναι μια προθεματική μορφή της αριθμητικής παράστασης (Ι).

Να δοθεί αλγόριθμος για την παραγωγή της ενθεματικής μορφής πλήρους παρενθέσεων από την παράσταση μιας αριθμητικής παράστασης σε δυαδικό δέντρο και να δοθεί η ενθεματική πλήρους παρενθέσεων, η μεταθεματική και η προθεματική μορφή της αριθμητικής παράστασης (Ι).

Δραστηριότητα 5.7

Δείξτε με λεπτομέρεια την εκτέλεση των αλγορίθμων προδιατεταγμένης, ενδοδιατεταγμένης και μεταδιατεταγμένης διάσχισης στο δεξί υποδέντρο της ρίζας του δέντρου στο σχήμα 5.18.

Υπόδειξη:

Χρησιμοποιείστε τον τρόπο που σας υποδεικνύουν τα παραδείγματα 5.12, 5.13, 5.14.

Σύνοψη Ενότητας

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει μια ιδιαίτερη κατηγορία δέντρων και εφαρμογές αυτών: τα δυαδικά δέντρα. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα δυαδικά δέντρα αναζήτησης και αναλύεται η χρησιμότητά τους ως δομή δεδομένων αποθήκευσης και αναζήτησης δεδομένων. Τέλος, παρουσιάζονται ιδιαίτεροι αλγόριθμοι για τη διάσχιση δυαδικών δέντρων.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μια ιδιαίτερη κατηγορία γραφημάτων με ιδιαίτερες εφαρμογές στην επιστήμη των υπολογιστών: τα δέντρα.

Το κεφάλαιο παρουσιάζει τις ιδιότητες των δέντρων, εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς αυτών, καθώς και αλγορίθμους αξιοποίησης της πληροφορίας που αποθηκεύονται στις κορυφές των δέντρων.

Συγκεκριμένα η πρώτη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζει βασικές έννοιες, ιδιότητες και εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς των δέντρων, ενώ η δεύτερη ενότητα, δείχνοντας τη διαφορά μεταξύ ενός οποιοδήποτε γραφήματος και ενός δέντρου, παρουσιάζει την έννοια του συνδετικού δέντρου ενός γραφήματος. Όπως ειπώθηκε και στην αντίστοιχη ενότητα, η έννοια του συνδετικού δέντρου έχει ιδιαίτερη σημασία όταν, δεδομένου ενός συνδεόμενου γραφήματος, θέλουμε να βρούμε συνδεόμενο υπο–γράφημα αυτού που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος, αλλά δεν περιέχει κύκλους. Η ενότητα παρουσιάζει ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους διάσχισης γραφημάτων που χρησιμοποιούνται και για την εύρεση συνδετικών δέντρων σε συνδεόμενα γραφήματα. Στην περίπτωση γραφημάτων με βάρη, μας ενδιαφέρουν τα συνδετικά δέντρα με το μικρότερο δυνατό συνολικό βάρος. Για τον προσδιορισμό των συνδετικών αυτών δέντρων, η ενότητα παρουσίασε τον αλγόριθμο του Prim.

Η τρίτη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζει μια ιδιαίτερη κατηγορία δέντρων και *μερικές από τις εφαρμογές αυτών: τα δυαδικά δέντρα. Παρουσιάζονται τα δυαδικά δέντρα αναζήτησης και αναλύεται η χρησιμότητά τους ως δομή δεδομένων αποθήκευσης και αναζήτησης δεδομένων. Τέλος, παρουσιάζονται ιδιαίτεροι αλγόριθμοι για τη διάσχιση δυαδικών δέντρων.*

Βιβλιογραφία

[1] Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.

[2] Liu C.L «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών» (Κ. Μπους, Δ. Γραμμένος, Θ. Φειδάς, Α. Λαυρέντζος) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[3] Deo N. «Graph Theory and Applications to Engineering and Computer Science», Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[4] Knuth D.E. «The Art of Computer Programming», Vol.3. Sorting and Searching» Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass, 1973.

Προαιρετική βιβλιογραφία

[1] Knuth D.E. «Optimum Binary Search Trees» Acta Informatica 1:14 – 25 (1971)

[2] Knuth D.E., «The Art of Computer Programming», Vol 1: Fundamental Algorithms, 2nd Ed, Addison – Wesley, Reading Mass 1973.

Απαντήσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

1.1

1. Η σωστή απάντηση είναι «Ναι, είναι πρόταση». Προφανώς είναι μια ψευδής πρόταση. Δεν θα πρέπει κάποιος να συγχέει το γεγονός ότι κάτι που είναι ρητώς ψευδές ή ρητώς αληθές δεν είναι πρόταση.

Αν δεν απαντήσατε σωστά, θα πρέπει να διαβάσετε προσεκτικότερα τον ορισμό της πρότασης.

2. Η σωστή απάντηση είναι «Ναι, είναι πρόταση». Προσοχή, δεν μας ενδιαφέρει ποιο είναι το *κ* και αν πράγματι υπάρχει. Η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί τον ορισμό της πρότασης. Αν αναζητήσατε το *κ*, θα πρέπει να το κάνατε μόνο για να βρείτε την τιμή αληθείας της πρότασης, και όχι για να χαρακτηρίσετε την έκφραση ως πρόταση.

Αν δεν απαντήσατε σωστά ή αν νομίζατε ότι θα πρέπει να βρείτε το *κ* για να απαντήσετε, θα πρέπει να διαβάσετε προσεκτικότερα τον ορισμό της πρότασης.

3. Η σωστή απάντηση είναι «Όχι, δεν είναι πρόταση». Είναι ένα από τα κλασικά παραδείγματα εκφράσεων που είναι εντολές, αλλά όχι προτάσεις. Μια εντολή εκτελείται, αλλά δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής.

Αν δεν απαντήσατε σωστά, θα πρέπει να διαβάσετε προσεκτικότερα τον ορισμό της πρότασης και να μελετήσετε τα αναφερόμενα παραδείγματα.

4. Η σωστή απάντηση είναι «Όχι, δεν είναι πρόταση». Η πρόταση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής.

Θα μπορούσατε να μπερδευτείτε αν σκεφτείτε ότι η πρόταση προσδιορίζει ένα συγκεκριμένο αριθμό που μπορεί να υπάρχει ή όχι, και αντίστοιχα να προσδιορίσετε την τιμή αληθείας της πρότασης. Όμως, η διαφορά είναι ακριβώς αυτή: Η έκφραση αυτή θα μπορούσε να έχει ως «τιμή» το ζητούμενο πηλίκο (δεδομένων δύο αριθμών) και όχι T ή F. Αντίθετα, η έκφραση «Το πηλίκο δύο μη μηδενικών ακεραίων υπάρχει πάντοτε» είναι πρόταση.

Για να γίνει η διαφορά περισσότερο κατανοητή θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την «τιμή» της έκφρασης ως μια συνάρτηση *V* που εφαρμόζεται στην αντίστοιχη έκφραση και δίνει τα κατάλληλα αποτελέσματα. Έτσι, το αποτέλεσμα της *V*(*Το πηλίκο δύο ακεραίων X και Y*) είναι ένας αριθμός, δεδομένων των *X* και *Y*, σε αντίθεση με το αποτέλεσμα της *V*(*Το πηλίκο δύο ακεραίων υπάρχει πάντοτε*) που είναι T ή F.

5. Η σωστή απάντηση είναι «Όχι, δεν είναι πρόταση». Η έκφραση αυτή, όπως και

μια εντολή, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής. Εκφράζει ένα αίτημα που μπορεί να ικανοποιηθεί ή όχι. Η ικανοποίηση όμως του αιτήματος αυτού δεν σημαίνει ότι το αίτημα αυτό καθ' αυτό είναι αληθές ή ψευδές.

6. Ανεξάρτητα από το αν γνωρίζετε αν ήταν ώριμα ή όχι τα συγκεκριμένα σταφύλια, και ανεξάρτητα αν πιστεύετε ή όχι αυτόν που το λέει, η έκφραση είναι πρόταση.

Αν δεν απαντήσατε σωστά, θα πρέπει να διαβάσετε προσεκτικότερα τον ορισμό της πρότασης.

7. Η σωστή απάντηση είναι «Ναι, είναι πρόταση». Δεν απαιτείται φυσικά να αποδείξετε την ορθότητά της, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η τιμή αληθείας της. Αφού μπορεί όμως να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής, είναι πρόταση.

Αν δώσατε εσφαλμένη απάντηση ή αν, για να απαντήσετε, προσπαθήσατε να δείξετε την ορθότητα της πρότασης, θα πρέπει να διαβάσετε προσεκτικότερα τον ορισμό της πρότασης.

1.2

(α) Η ορθή απάντηση είναι $(\pi \wedge \rho)$. Η άσκηση είναι απλή. Το συνδετικό «και» κάνει σαφή τη χρήση του σωστού συνδετικού.

(β) Η συμβολική μορφή της πρότασης αυτής είναι $(\neg\pi \wedge \neg\rho \wedge \neg\tau)$**.** Η άσκηση είναι εύκολη. Όπως έχει ειπωθεί παραπάνω, η χρήση του «δεν» στο φυσικό λόγο σηματοδοτεί τη χρήση της άρνησης, ενώ η χρήση του συνδέσμου «και» τη χρήση της σύζευξης.

Στην παραπάνω απάντηση, η θέση των παρενθέσεων μπορεί να αλλάξει. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι $(\neg\pi \wedge \neg\rho) \wedge \neg\tau$ ή $\neg\pi \wedge (\neg\rho \wedge \neg\tau)$

(γ) Η χρήση του «αν … τότε… » στο φυσικό λόγο σηματοδοτεί τη χρήση υποθετικής πρότασης. Η ορθή απάντηση εδώ είναι η $(\neg\pi \wedge \neg\rho) \rightarrow \neg\tau$. Ο κίνδυνος εδώ είναι η λανθασμένη χρήση ή η παράλειψη των παρενθέσεων. Για παράδειγμα, η πρόταση $\neg\pi \wedge \neg\rho \rightarrow \neg\tau$ δεν είναι καθόλου σαφές ότι είναι η ίδια με την ορθή απάντηση που δόθηκε παραπάνω. Επίσης, η απάντηση $\neg\pi \wedge (\neg\rho \rightarrow \neg\tau)$ είναι λανθασμένη. Μπορείτε να το δείτε αν φτιάξετε τους πίνακες αληθείας των $((\neg\pi \wedge \neg\rho) \rightarrow \neg\tau)$ και $(\neg\pi \wedge (\neg\rho \rightarrow \neg\tau))$.

(δ) Η πρόταση αυτή (δίχως την αντιστροφή) είναι της εξής μορφής: «Το ότι (ισχύει) A σημαίνει ότι B». Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι «αν γνωρίζουμε ότι ισχύει το A, τότε θα ισχύει και το B». Άρα, δίχως να λάβουμε υπόψη την αντίστροφη ισχύ, πρόκειται για μια υποθετική πρόταση της μορφής $(\pi \rightarrow \rho)$. Η αντίστροφη επίσης ισχύς της πρότασης μας οδηγεί στο τελικό συμπέρασμα ($\pi \leftrightarrow \rho$).

Βέβαια, το συμπέρασμα αυτό μπορεί να εκφραστεί με την ισοδυναμία των δύο προτάσεων ($\pi \equiv \rho$), αν ληφθεί υπόψη ότι η έκφραση «π σημαίνει ρ, και αντίστροφα», σημαίνει ακριβώς αυτό, δηλαδή ότι σε κάθε περίπτωση οι τιμές αληθείας των π και ρ είναι ίδιες.

(ε) Αυτή η άσκηση έχει μια δυσκολία, διότι απαιτεί το συνδυασμό λογικών τελεστών για να εκφράσουμε την, κατά κάποιο τρόπο, αποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων.

Η ορθή απάντηση είναι $(\tau \vee \rho) \wedge \rceil (\tau \wedge \rho)$.

Η παραπάνω σύνθετη πρόταση είναι ρητή παράσταση αυτού που εκφράζεται με το φυσικό λόγο, δηλαδή «είτε τ είτε ρ, αλλά όχι και τα δύο». Προσοχή και πάλι στις παρενθέσεις, ώστε να αποδίδεται το νόημα της έκφρασης με σαφήνεια και ακρίβεια.

Άλλος τρόπος που θα μπορούσατε να ξεκινήσετε είναι να φτιάξετε τον πίνακα αληθείας της ζητούμενης, άγνωστης πρότασης:

τ	ρ	?
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Σύμφωνα με τον πίνακα, η ζητούμενη πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής, μόνο όταν μία από τις δύο προτάσεις είναι αληθής. Επομένως, αν λάβουμε υπόψη τις γραμμές του πίνακα, όπου η τελική, ζητούμενη πρόταση παίρνει την τιμή T, τότε μπορούμε να πούμε ότι με βάση αυτές η ζητούμενη πρόταση είναι ($\tau \vee \rho$). Αυτό όμως, όπως γνωρίζετε, δεν αποκλείει την περίπτωση να είναι και οι δύο προτάσεις τ και ρ αληθείς. Για να αποκλείσουμε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με την πρώτη γραμμή του παραπάνω πίνακα, θα πρέπει $\rceil (\tau \wedge \rho)$ να είναι επίσης αληθής. Συνθέτοντας τα επιμέρους συμπεράσματα με σύζευξη, έχετε το τελικό αποτέλεσμα.

1.3

(α) Η σωστή απάντηση είναι:

(Η οδήγηση είναι ασφαλής) $\rightarrow$ (Φοράς ζώνη ασφαλείας)

Σε περίπτωση που έχετε αντιστρέψει τη συνεπαγωγή, δεν έχετε κατανοήσει τη σημασία της αναγκαίας συνθήκης σε σχέση με την υποθετική πρόταση. Είναι ένα λάθος που κάνουν πολλοί και θέλει λίγη προσοχή.

Οι πλήρεις εξηγήσεις θα δοθούν μετά την απάντηση και της (β).

(β) Η σωστή απάντηση είναι

(Έχεις ρίξει λίπασμα) $\rightarrow$ (Η τριανταφυλλιά ανθίζει)

Σε περίπτωση που έχετε αντιστρέψει τη συνεπαγωγή, δεν έχετε κατανοήσει τη σημασία της ικανής συνθήκης σε σχέση με την υποθετική πρόταση. Είναι ένα λάθος που κάνουν πολλοί και θέλει λίγη προσοχή.

Σε μια υποθετική πρόταση $(\pi \rightarrow \rho)$, η υπόθεση π αποτελεί την ικανή συνθήκη και το συμπέρασμα ρ την αναγκαία. Για να το καταλάβετε αρκεί να σκεφτείτε την τιμή αληθείας της υποθετικής πρότασης, όταν η ρ είναι αληθής: Είναι πάντοτε αληθής, ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας της π! Άρα, πράγματι, το συμπέρασμα ρ μιας υποθετικής πρότασης είναι *αναγκαία συνθήκη* για την αλήθεια της πρότασης.

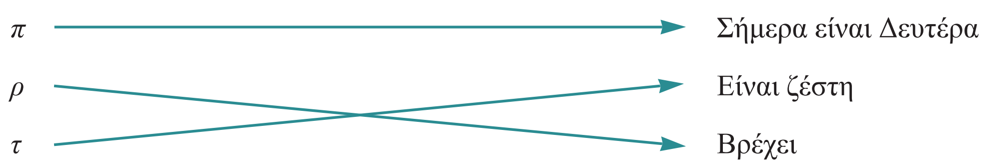
Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να εξηγήσετε την «ικανότητα» της π για να κάνει την υποθετική πρόταση αληθή. Παρατηρήστε ότι πράγματι, αν η π είναι αληθής, τότε μπορεί (έχει την ικανότητα) να κάνει την $(\pi \rightarrow \rho)$ αληθή. Το τελικό όμως συμπέρασμα εξαρτάται και από την τιμή αληθείας της ρ. Από την άλλη πλευρά, η αλήθεια της π δεν είναι αναγκαία, εφόσον η υποθετική πρόταση μπορεί να είναι αληθής ακόμη και όταν η π είναι ψευδής.

Αν μπερδευτήκατε λίγο, μην απογοητεύεστε. Μελετήστε προσεκτικά τον πίνακα αληθείας της $(\pi \rightarrow \rho)$. Είναι εύκολο κάποιος να μπερδευτεί στις υποθετικές προτάσεις αν δεν τις έχει κατανοήσει πλήρως.

Παρατηρήστε επίσης ότι σε μια πρόταση «αν και μόνο αν» $(\pi \leftrightarrow \rho)$, η πρόταση π αποτελεί και ικανή (λόγω της $\pi \rightarrow \rho$) και αναγκαία συνθήκη (λόγω της $\pi \leftarrow \rho$) για την πρόταση ρ.

1.4

Όσο αφορά το πρώτο μέρος του πίνακα ισχύει ότι:



Για το δεύτερο μέρος του πίνακα ισχύει ότι:

Κάθε Δευτέρα βρέχει	$\neg \boldsymbol{\rho} \rightarrow (\boldsymbol{\tau} \wedge \pi)$
Έχω παρατηρήσει ότι αν δεν βρέχει τότε ή είναι ζέστη ή είναι Δευτέρα.	$\pi \rightarrow \boldsymbol{\rho}$
Ικανή συνθήκη για να βρέχει ή να είναι ζέστη είναι να μην είναι Δευτέρα.	$\neg(\boldsymbol{\rho} \vee \pi) \rightarrow \boldsymbol{\tau}$
Αναγκαία συνθήκη για να μην είναι Δευτέρα ή να μη βρέχει είναι να είναι ζέστη.	$\neg\, \boldsymbol{\pi} \rightarrow (\boldsymbol{\rho} \vee \tau)$
Όταν τη Δευτέρα βρέχει ή είναι ζέστη, τότε είναι είτε ζέστη είτε είναι Δευτέρα ή βρέχει.	$(\pi \vee (\neg\, \pi \wedge \neg\, (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\boldsymbol{\pi} \vee \neg\, (\rho \vee \tau))$
Για να είναι Δευτέρα ή να ισχύει ότι δεν είναι ζέστη ή βρέχει, πρέπει ή να είναι Δευτέρα ή σε περίπτωση που δεν είναι Δευτέρα να μην είναι ζέστη ή βρέχει	$(\pi \wedge (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\boldsymbol{\tau} \vee (\pi \vee \rho))$

Παρατηρήστε ότι σε ορισμένες διαζεύξεις και συζεύξεις έχει αλλάξει η σειρά εμφάνισης των επιμέρους προτάσεων. Ίσως αυτό να σας δυσκόλεψε παραπάνω. Αν δεν μπορέσατε να βρείτε τις σωστές αντιστοιχίες, θεωρήστε ως δεδομένο το πρώτο μέρος του πίνακα (συμβολισμός απλών προτάσεων) και από την έκφραση των σύνθετων προτάσεων σε φυσικό λόγο δημιουργήστε τη συμβολική παράσταση των προτάσεων αυτών. Μπορείτε επίσης να εργαστείτε και αντίστροφα. Σε περίπτωση δυσκολίας, ζητήστε τη βοήθεια του διδάσκοντα (θεωρήστε το ως δραστηριότητα).

1.5

Η σωστή απάντηση είναι «αληθής». Η υπόθεση της υποθετικής πρότασης είναι αληθής, και το ίδιο ισχύει και με το συμπέρασμα.

Ακολουθήστε την εξής μέθοδο, αντικαθιστώντας κάθε πρόταση με την τιμή αληθείας της:

$$(\pi \wedge (\rho \vee \tau)) \rightarrow (\tau \vee (\neg\, \pi \vee \rho)) = (\mathrm{T} \wedge (\mathrm{T} \vee \mathrm{F})) \rightarrow (\mathrm{F} \vee (\neg\, \mathrm{T} \vee \mathrm{T})) =$$

$$(\mathrm{T} \wedge (\mathrm{T})) \rightarrow (\mathrm{F} \vee (\mathbf{F} \vee \mathrm{T})) = (\mathrm{T} \wedge (\mathrm{T})) \rightarrow (\mathrm{F} \vee (\mathrm{T})) = (\mathrm{T}) \rightarrow (\mathrm{T}) = \mathrm{T}$$

1.6

Η σωστή απάντηση είναι «ψευδής». Η υπόθεση της υποθετικής πρότασης είναι αληθής και το συμπέρασμα είναι ψευδές.

Ακολουθήστε την παραπάνω μέθοδο, αντικαθιστώντας κάθε πρόταση με την τιμή αληθείας της:

$$(\pi \vee \rho) \rightarrow \tau = (\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \rightarrow \mathrm{F} = (\mathrm{T}) \rightarrow \mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

1.7

Τέτοιες ασκήσεις απαιτούν μεθοδικότητα και αρκετή προσοχή:

π	ρ	τ	$\urcorner \pi$	$(\urcorner \pi \wedge \rho)$	$(\tau \vee \urcorner \pi)$	$(\urcorner \pi \wedge \rho) \vee (\tau \vee \urcorner \pi)$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T

1.8

Παρακάτω θα δείξω το (α) και αφήνω το (β) άσκηση για εσάς. Δεν θα πρέπει να σας δυσκολέψει.

π	ρ	$\urcorner (\pi \vee \rho)$	$(\urcorner \pi) \wedge (\urcorner \rho)$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι οι προτάσεις $(\urcorner (\pi \vee \rho))$ και $((\urcorner \pi) \wedge (\urcorner \rho))$ είναι λογικά ισοδύναμες.

1.9

(α) Η έκφραση αυτή είναι προτασιακή συνάρτηση. Ίσως να τη θεωρήσατε πρόταση, διότι η τιμή αλήθειάς της μπορεί να εκτιμηθεί και δίχως να γνωρίζουμε την τιμή της x. Όμως, η έκφραση αυτή εξαρτάται από την τιμή του x και μπορεί για παράδειγμα να επαναδιατυπωθεί ως «Για κάθε x, ο $(2x + 1)^2$ είναι άρτιος ακέραιος», ασχέτως του αν είναι ψευδής ή αληθής.

Ποιο είναι όμως το πεδίο αναφοράς της x;

Αν είναι το σύνολο των ακεραίων, τότε η καθολικά προσδιορισμένη πρόταση «Για κάθε x, ο $(2x + 1)^2$ είναι άρτιος ακέραιος» είναι ψευδής.

Αν είναι το σύνολο των πραγματικών, τότε η παραπάνω καθολικά προσδιορισμένη πρόταση είναι ψευδής, εφόσον υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός x για τον οποίο η $(2x + 1)^2$ δεν είναι ακέραιος.

(β) Η έκφραση αυτή δεν είναι προτασιακή συνάρτηση. Για οποιαδήποτε ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 10 η παραπάνω έκφραση δεν αποτελεί πρόταση.

(γ) Η έκφραση ($x = 1/x + 16$) αυτή είναι προτασιακή συνάρτηση. Δεν είναι δύσκολο να το καταλάβετε, αν θέσετε μια συγκεκριμένη ακέραια τιμή στο x και εκτιμήσετε τις αριθμητικές παραστάσεις. Τότε, για συγκεκριμένες τιμές του x, η έκφραση $x = 1/x + 16$ είναι πρόταση.

Φυσικά, όπως άλλωστε αναφέρεται, το πεδίο αναφοράς είναι το σύνολο των ακεραίων.

(δ) Η έκφραση αυτή είναι πρόταση, αλλά δεν είναι προτασιακή συνάρτηση, εφόσον δεν αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή.

(ε) Η παραπάνω έκφραση είναι προτασιακή συνάρτηση μιας μεταβλητής x που «τρέχει» στο σύνολο των πόλεων της Ελλάδας. Επομένως, το πεδίο αναφοράς είναι το σύνολο των πόλεων της Ελλάδας. Η έκφραση μπορεί να διατυπωθεί καθαρότερα με τον εξής τρόπο: «Υπάρχει x πόλη της Ελλάδας, όπου η x είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας».

Φυσικά, κάποιος θα μπορούσε να πει ότι το πεδίο αναφοράς είναι το σύνολο των πόλεων. Τότε και πάλι, παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό του υπαρξιακού ποσοδείκτη, η τιμή αληθείας της υπαρξιακά προσδιορισμένης πρότασης «Υπάρχει x πόλη, όπου η x είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας» δεν αλλάζει.

1.10

Οι παραπάνω εκφράσεις αναφέρονται σε περισσότερες από μια μεταβλητές από το ίδιο σύνολο. Οι μεταβλητές αυτές προσδιορίζονται με ποσοδείκτες. Η σειρά με την οποία *αναφέρονται οι προσδιορισμοί των μεταβλητών στις εκφράσεις αυτές έχει ιδιαίτερη σημασία στην εξής περίπτωση: Η μεταβλητή, η οποία προσδιορίζεται με υπαρξιακό ποσοδείκτη δεύτερη, βρίσκεται στην «εμβέλεια» της μεταβλητής που προσδιορίζεται πρώτη, διότι για την επαλήθευση της πρότασης, θα πρέπει να βρεθεί τιμή της δεύτερης μεταβλητής που αποτελεί συνάρτηση της τιμής της πρώτης μεταβλητής. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στην άσκηση* (στ), *όπου και οι δύο μεταβλητές προσδιορίζονται «ταυτόχρονα» ως ζεύγος.*

Οι απαντήσεις στις παραπάνω ασκήσεις θα κάνουν τα όσα είπα παραπάνω σαφέστερα.

(α) Η ορθή απάντηση είναι «Για κάθε εργαζόμενο X υπάρχει εργαζόμενος Y, τέτοιος ώστε ο X να είναι διευθυντής του Y» ή «Για κάθε εργαζόμενο X, ο X είναι διευθυντής κάποιου Y». Παρατηρήστε ότι η τιμή αληθείας της παραπάνω πρότασης εξαρτάται (φυσικά) από την τιμή του Y, που όμως στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί συνάρτηση της τιμής του X. Επομένως, η επιλογή της X είναι σημαντική και για την επιλογή της Y.

(β) Η ορθή απάντηση είναι «Για κάθε εργαζόμενο Y υπάρχει εργαζόμενος X, τέτοιος ώστε ο X να είναι διευθυντής του Y» ή «Για κάθε εργαζόμενο Y ισχύει ότι αυτός έχει ένα διευθυντή X». Εδώ, οι προσδιορισμοί έχουν αντιστραφεί. Κατ' αντιστοιχία και σε αντιπαραβολή με την (α) παραπάνω, παρατηρήστε ότι η τιμή αληθείας της παραπάνω πρότασης εξαρτάται (φυσικά) από την τιμή του X, που όμως στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί συνάρτηση της τιμής του Y. Επομένως, η επιλογή της Y είναι σημαντική και για την επιλογή της X.

(γ) Η ορθή απάντηση είναι «Υπάρχει εργαζόμενος X που είναι διευθυντής κάθε εργαζόμενου Y». Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τις περιπτώσεις παραπάνω, η υπαρξιακά προσδιοριζόμενη μεταβλητή X είναι πρώτη στη σειρά. Επομένως, η τιμή της δεν είναι συνάρτηση άλλων μεταβλητών. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή, *κάποιος* εργαζόμενος είναι διευθυντής όλων των εργαζομένων.

(δ) Η ορθή απάντηση είναι «Για κάθε εργαζόμενο X, ισχύει ότι αυτός είναι διευθυντής κάθε εργαζόμενου Y» ή «κάθε εργαζόμενος είναι διευθυντής όλων των εργαζομένων». Παρατηρήστε ότι η τιμή της Y, αν και η Y προσδιορίζεται δεύτερη, δεν αποτελεί συνάρτηση της τιμής της X, διότι η Y είναι καθολικά προσδιοριζόμενη.

(ε) Η ορθή απάντηση είναι «Υπάρχει εργαζόμενος Y για τον οποίο υπάρχει διευθυντής X» ή «κάποιος εργαζόμενος έχει ένα διευθυντή».

(στ) Εδώ οι X και Y προσδιορίζονται ως ζεύγος: «Υπάρχουν δύο εργαζόμενοι X και

Y, που ο ένας (X) είναι διευθυντής του άλλου (Y)». Προσέξτε ότι η τιμή καμίας μεταβλητής δεν εξαρτάται από την τιμή της άλλης.

1.11

Υπάρχουν δύο δυνατές ερμηνείες:

(α) Οτιδήποτε που έχει την ιδιότητα να λάμπει δεν είναι χρυσός ή αλλιώς, αν κάτι λάμπει, τότε αυτό δεν είναι χρυσός.

(β) Υπάρχουν πράγματα που λάμπουν και τα οποία δεν είναι χρυσός.

Φυσικά, αυτό που εννοούσε ο Shakespeare αποδίδεται από τη δεύτερη ερμηνεία.

Ας δούμε όμως το συμβολισμό και των δύο ερμηνειών.

Αν $\Pi(X)$ η προτασιακή συνάρτηση «Το X λάμπει» και $P(X)$ η προτασιακή συνάρτηση «Το X είναι χρυσός», τότε:

(α)

$$\forall X, (\Pi(X) \rightarrow \rceil P(X)).$$

Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε κάποιος πολύ εύκολα να κάνει λάθος και να μη θεωρήσει την πρόταση ως υποθετική. Αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει στην εξής παράσταση:

$$\forall X, \Pi(X) \wedge \rceil P(X)$$

Η έκφραση αυτή σημαίνει ότι για κάθε X ισχύει ότι αυτό λάμπει και δεν είναι χρυσός. Η έκφραση όμως (α) παραπάνω δεν επιχειρηματολογεί για όλα τα αντικείμενα, αλλά μόνο για τα αντικείμενα που λάμπουν (υπόθεση).

(β)

$$\exists X, \Pi(X) \wedge \rceil P(X)$$

Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε κάποιος πολύ εύκολα να κάνει λάθος και να θεωρήσει ότι η πρόταση αυτή είναι υποθετική.

$$\exists X, (\Pi(X) \rightarrow \rceil P(X)).$$

Η υποθετική αυτή έκφραση επιχειρηματολογεί για τα αντικείμενα που λάμπουν (τα οποία μπορεί και να μην υπάρχουν). Η πρόταση αληθεύει και για τα αντικείμενα που δεν λάμπουν.

1.12

Ένα αξίωμα εκφράζει ένα γεγονός το οποίο είναι πάντοτε αληθές. Ένα θεώρημα είναι μια υποθετική πρόταση που αποδεικνύεται αληθής με βάση άλλα θεωρήματα, αξιώματα και ορισμούς.

Όσο αφορά στην απάντηση, πρέπει να δώσετε βαρύτητα τόσο στους προσδιορισμούς «πάντοτε αληθές» και «αποδεικνύεται», αλλά και στη φύση των εκφράσεων «γεγονός» και «υποθετική πρόταση», αντίστοιχα.

1.13

Ένας ορισμός εκφράζει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια έννοια αληθής. Ενας ορισμός ορίζει μια νέα έννοια με βάση απλούστερες έννοιες.

Από την άλλη πλευρά, ένα αξίωμα εκφράζει ένα γεγονός το οποίο είναι πάντοτε αληθές. Το γεγονός αυτό εκφράζει μια ιδιότητα της έννοιας ή μια σχέση μεταξύ εννοιών.

Ένα αξίωμα δεν ορίζει μια νέα έννοια, αλλά προσδιορίζει κάτι που είναι αληθές για μια πρωταρχική έννοια. Δηλαδή, για μια έννοια που δεν ορίζεται από απλούστερες έννοιες.

1.14

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να αποδειχθεί με ευθεία απόδειξη ή με απαγωγή σε άτοπο.

Η ευθεία απόδειξη είναι απλή και θα πρέπει να έχετε τη δυνατότητα να την αναπτύξετε με ευκολία. Παρακάτω θα αποδείξω την αλήθεια της πρότασης με απαγωγή σε άτοπο για να δώσω έμφαση σε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες στις οποίες ίσως να δυσκολευτείτε.

Έστω ότι 100 μπάλες τοποθετούνται σε 9 κουτιά και έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το εξής είναι αληθές:

$\neg$ (*κάποια κουτιά περιέχουν* 12 *ή περισσότερες μπάλες*)

ή

$\neg$ (*υπάρχει κουτί που περιέχει* 12 *μπάλες ή*

υπάρχει κουτί που περιέχει περισσότερες από 12 *μπάλες*)

Εφαρμόζοντας το νόμο του De Morgan, προκύπτει ότι:

για κάθε κουτί ισχύει ότι

$\rceil$ (*περιέχει* 12 *μπάλες*) *και*

$\rceil$ (*περιέχει περισσότερες από* 12 *μπάλες*)

δηλαδή,

για κάθε κουτί ισχύει ότι περιέχει λιγότερες από 12 *μπάλες*

Αν κάθε κουτί περιέχει ακριβώς 11 μπάλες, τότε τα 9 κουτιά περιέχουν 99 μπάλες. Αυτό είναι σε αντίφαση με το γεγονός ότι και οι 100 μπάλες έχουν τοποθετηθεί σε 9 κουτιά και επομένως η αποδεικτική διαδικασία έχει φτάσει σε άτοπο. Άρα η υποθετική πρόταση

Αν 100 μπάλες τοποθετούνται σε 9 *κουτιά, τότε*

κάποια κουτιά περιέχουν 12 *ή περισσότερες μπάλες*

είναι αληθής.

1.15

Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $\alpha\beta = 0$ και υποθέτουμε ότι:

$$\rceil\, (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0)$$

δηλαδή,

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0.$$

Τότε όμως, εφόσον $\alpha\beta = 0 = \alpha 0$ και $\alpha \neq 0$, με βάση την υποθετική πρόταση που υποθέσαμε ότι ισχύει θα πρέπει $\beta = 0$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τις υποθέσεις μας. Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να φτάσουμε σε άτοπο, αν θεωρούσαμε ότι $\alpha\beta = 0 = 0\beta$.

Επομένως, η υποθετική πρόταση «αν $\alpha\beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$» είναι αληθής.

1.16

Βασικό βήμα: Για $n = 0$, ισχύει ότι $a = ar^0 = \dfrac{a(r^{0+1}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r-1)}{r-1} = a$

Επαγωγικό βήμα: Θα δειχθεί ότι αν ισχύει η

$$a + ar^1 + ar^2 + \ldots, + ar^k = \frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}$$

$\kappa = 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύει και η

$$a + ar^1 + ar^2 + \ldots, + ar^{n+1} = \frac{a(r^{n+2}-1)}{r-1} \quad (1)$$

Πράγματι,

$$(a + ar^1 + ar^2 + \ldots, + ar^n) + ar^{n+1} = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1} + ar^{n+1} =$$

$$= \frac{(ar^{n+1}-a)+(ar^{n+2}-ar^{n+1})}{r-1} = \frac{a(r^{n+2}-1)}{r-1}.$$

Επομένως, ισχύει η (1).

1.17

Βασικό βήμα: Για $n = 1$, ισχύει ότι G_1 είναι ακολουθία Gray, εφόσον (α) κάθε δυαδικός αριθμός ενός ψηφίου εμφανίζεται στην ακολουθία, (β) διαδοχικοί αριθμοί στην ακολουθία διαφέρουν σε ένα ακριβώς δυαδικό ψηφίο, και (γ) ο τελευταίος και ο πρώτος αριθμός της ακολουθίας διαφέρουν σε ένα ακριβώς δυαδικό ψηφίο.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αν οι ακολουθίες G_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι κώδικες Gray, τότε αν με τον παραπάνω τρόπο κατασκευάσουμε την $G_{\nu+1}$, αυτή θα είναι κώδικας Gray επίσης.

Πράγματι,

(α) από τον τρόπο κατασκευής (οι ακολουθίες G'_ν και G''_ν έχουν από 2^ν στοιχεία) η νέα ακολουθία έχει $(2^\nu + 2^\nu) = 2^{\nu+1}$ δυαδικούς αριθμούς, διαφορετικούς μεταξύ τους. Επομένως, κάθε δυαδικός αριθμός $(\nu + 1)$ ψηφίων εμφανίζεται στην ακολουθία.

(β) Από τον τρόπο κατασκευής, διαδοχικοί αριθμοί στην ακολουθία G'_ν ή στην ακολουθία G''_ν προκύπτουν από διαδοχικούς αριθμούς της G_ν τοποθετώντας το ψηφίο 0 ή 1 αντίστοιχα, στην αρχή κάθε αριθμού. Επομένως, όποια διαφορά υπάρχει μεταξύ διαδοχικών αριθμών στην G'_ν ή στην G''_ν είναι η διαφορά που υπάρχει μεταξύ τους στην ακολουθία G_ν. Εφόσον η $G_{\nu+1}$ προκύπτει από την συνένωση των G'_ν και G''_ν, πρέπει να δείξουμε ότι ο τελευταίος αριθμός της ακολουθίας G'_ν και ο πρώτος αριθμός της G''_ν διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο. Πράγματι, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών, αν αφαιρέσουμε το πρώτο ψηφίο (0 και 1, αντίστοιχα) των αριθμών αυτών, τότε προκύπτει και στις δύο ακολουθίες ο ίδιος αριθμός. Επομένως, ο τελευταίος αριθμός της ακολουθίας G'_ν και ο πρώτος αριθμός της G''_ν διαφέρουν μόνο στο πρώτο δυαδικό ψηφίο.

(γ) Εφόσον η $G_{\nu+1}$ προκύπτει από την συνένωση των G'_ν και G''_ν, πρέπει επίσης να δείξουμε ότι ο πρώτος αριθμός της ακολουθίας G'_ν και ο τελευταίος αριθμός της G''_ν διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο. Αυτό προκύπτει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο (β) παραπάνω.

2.1

Προφανώς, το σύνολο X των περιοχών που ορίζονται από το χάρτη είναι το $X = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, \Sigma T\}$.

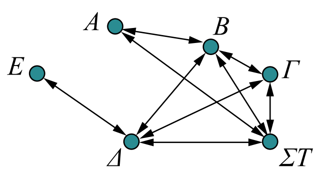
Η σχέση «συνορεύουν» επί του X, μπορείτε να τη συμβολίσετε ως Σ, ορίζεται ως εξής:

$\chi \Sigma \psi$ αν και μόνο αν χ έχει κοινό σύνορο με την ψ.

Η σχέση Σ είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$ και σύμφωνα με τον ορισμό της είναι $\Sigma = \{(A, B), (B, A), (A, \Sigma T), (\Sigma T, A), (B, \Sigma T), (\Sigma T, B), (B, \Gamma), (\Gamma, B), (\Gamma, \Sigma T), (\Sigma T, \Gamma), (\Delta, \Gamma), (\Gamma, \Delta), (\Delta, B), (B, \Delta), (\Delta, \Sigma T), (\Sigma T, \Delta), (E, \Delta), (\Delta, E)\}$.

Προσέξτε ότι για κάθε ζεύγος (χ, ψ) στην Σ, το ζεύγος (ψ, χ) πρέπει να ανήκει στη Σ επίσης.

Το κατευθυνόμενο γράφημα που αντιστοιχεί στη σχέση Σ είναι το εξής:



Σχήμα 2.4
Κατευθυνόμενο γράφημα της σχέσης Σ.

Φυσικά, εσείς ίσως να το έχετε σχεδιάσει με διαφορετική «μορφή» από την παραπάνω. Θα πρέπει να προσέξετε να υπάρχουν όλες οι ακμές με τις σωστές κατευθύνσεις. Επίσης, προσέξετε ότι για κάθε ακμή από το στοιχείο χ στο στοιχείο ψ υπάρχει και η αντίστροφη ακμή.

Οι πίνακες που παριστούν το παρακάτω γράφημα είναι οι πίνακες 2.11 και 2.12:

Πίνακας 2.11

	A	*B*	*Γ*	*Δ*	*E*	*ΣΤ*
A	0	1	0	0	0	1
B	1	0	1	1	0	1
Γ	0	1	0	1	0	1
Δ	0	1	1	0	1	1
E	0	0	0	1	0	0
ΣΤ	1	1	1	1	0	0

Πίνακας 2.12

Περιοχή (1)	Περιοχή (2)
Α	*Β*
Β	*Α*
Α	*ΣΤ*
ΣΤ	*Α*
Β	*Γ*
Γ	*Β*
Β	*Δ*
Δ	*Β*
Β	*ΣΤ*
ΣΤ	*Β*
Γ	*Δ*
Δ	*Γ*
Γ	*ΣΤ*
ΣΤ	*Γ*
Δ	*Ε*
Ε	*Δ*
Δ	*ΣΤ*
ΣΤ	*Δ*

Εσείς, ως απάντηση στο ερώτημα, μπορείτε να έχετε σχηματίσει οποιονδήποτε από τους πίνακες αυτούς.

2.2

Ο ορθός τρόπος συμπλήρωσης του πίνακα είναι ο εξής:

Ιδιότητα	**ΝΑΙ**	**ΟΧΙ**
Συμμετρική	☑	☐
Αντισυμμετρική	☐	☑
Μεταβατική	☐	☑
Ανακλαστική	☐	☑

Ως αντιπαράδειγμα, για να αιτιολογήσετε ότι η αντισυμμετρικότητα δεν ισχύει, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε ζεύγος (χ, ψ) με $\chi \neq \psi$ και $(\chi, \psi) \in \Sigma$, τέτοιο ώστε $(\psi, \chi) \in \Sigma$. Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων του X που ανήκει στη Σ. Για παράδειγμα, για το ζεύγος (A, B) με $A \neq B$, ισχύουν ότι (A, B) και (B, A) ανήκουν στο Σ.

Ως αντιπαράδειγμα, για να αιτιολογήσετε ότι η μεταβατικότητα δεν ισχύει στην Σ, θα πρέπει να βρεθούν ζεύγη τέτοια ώστε αν (χ, ψ) και (ψ, φ) είναι στο Σ, τότε το (χ, φ) δεν είναι στο Σ. Πράγματι, όπως είναι φυσικό, για τη σχέση Σ = «συνορεύουν» υπάρχουν τέτοια ζεύγη. Παράδειγμα τέτοιων ζευγών είναι τα (A, B) και $(B, ΣΤ)$: Το $(A, ΣΤ)$ δεν ανήκει στο Σ.

Τέλος, όσο αφορά στην ανακλαστική ιδιότητα, για κανένα στοιχείο χ του X δεν ισχύει ότι το (χ, χ) ανήκει στη Σ. Π.χ. $(A, A) \notin \Sigma$.

2.3

A) Η σχέση Σ^{-1} μπορεί να οριστεί με τους εξής τρόπους

$\Sigma^{-1} = \{(\chi, \psi) \mid (\psi, \chi) \in \Sigma\}$

$\Sigma^{-1} = \{(A, B), (B, A), (A, ΣΤ), (ΣΤ, A), (B, ΣΤ), (ΣΤ, B), (B, \Gamma), (\Gamma, B), (\Gamma, ΣΤ), (ΣΤ, \Gamma), (\Delta, \Gamma), (\Gamma, \Delta), (\Delta, B), (B, \Delta), (\Delta, ΣΤ), (ΣΤ, \Delta), (E, \Delta), (\Delta, E)\}$.

Παρατηρήστε ότι η σχέση Σ^{-1} είναι ίση με τη σχέση Σ (ισότητα μεταξύ συνόλων). Αυτό άλλωστε φαίνεται από τη «φύση» του κατευθυνόμενου γραφήματος που παριστά τη Σ (και τη Σ^{-1}), όπου μεταξύ δυο οποιωνδήποτε κορυφών υπάρχει μια δι – κατευθυνόμενη ακμή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η σχέση είναι συμμετρική.

B)Υπάρχουν οι εξής τρόποι για να ορίσετε τη σύνθεση των Σ και Σ'

$\Sigma \circ \Sigma' = \{(\chi, \varphi) \mid$ υπάρχει ψ στο X τέτοιο ώστε: $(\chi, \psi) \in \Sigma$ και $(\psi, \varphi) \in \Sigma' \}$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, μπορείτε να ορίσετε τη Σ' ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου μεταξύ του X και του συνόλου των θετικών ακεραίων, παραθέτοντας τα ζεύγη που μπορούν να ανήκουν σε αυτή. Θεωρείστε για παράδειγμα τη σχέση Σ' που ορίζεται ως εξής:

$\Sigma' = \{(A, 1200), (B, 1000), (\Gamma, 2000), (\Delta, 1500), (E, 2500), (ΣΤ, 4000)\}$

Η σύνθεση των Σ και Σ' θα είναι η εξής:

$\Sigma \circ \Sigma' = \{(A, 1000), (B, 1200), (A, 4000), (ΣΤ, 1200), (B, 4000), (ΣΤ, 1000), (B, 2000), (\Gamma, 1000), (\Gamma, 4000), (ΣΤ, 2000), (\Delta, 2000), (\Gamma, 1500), (\Delta, 1000), (B, 1500), (\Delta, 4000), (ΣΤ, 1500), (E, 1500), (\Delta, 2500)\}$.

Η σύνθεση των δύο σχέσεων συνδέει μια περιοχή με τον πληθυσμό μιας γειτονικής περιοχής της.

2.4

Εφόσον τα ιδιώματα της σχέσης ΔΑΝΕΙΟ είναι ΑΡΙΘΜΟΣ και ΠΟΣΟ, για να καθοριστεί η σχέση πλήρως θα πρέπει να οριστούν τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων αυτών. Τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων είναι char(20) και int(10) αντίστοιχα. Η σχέση ΔΑΝΕΙΟ με παραδειγματικές τιμές έχει όπως φαίνεται στον πίνακα 2.13:

Πίνακας 2.13

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΠΟΣΟ
Δ – 7653543	230.000
Δ – 1234569	150.000
Δ – 9876543	20.000

Η σχέση ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ έχει ιδιώματα τα κλειδιά των σχέσεων ΠΕΛΑΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟ, δηλαδή τα ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ και ΑΡΙΘΜΟΣ. Τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων αυτών είναι αυτά που τα ιδιώματα αυτά έχουν και στις σχέσεις ΠΕΛΑΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟ αντίστοιχα. Επομένως,

ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ $\subseteq$ char(10) $\times$ char(20)

Κλειδί για τη σχέση ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ ορίζεται το σύνολο των ιδιωμάτων της σχέσης.

Πίνακας 2.14

ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ
ΧΥ23456	*Δ* – 7653543
ΧΩ12345	*Δ* – 1234569
ΓΗ56789	*Δ* – 9876543

Η φυσική ερμηνεία της σχέσης (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ – ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ) είναι: «Οι πελάτες που έχουν κατάθεση και δεν έχουν δάνειο».

Η φυσική ερμηνεία της σχέσης (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ $\cup$ ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ) είναι: «Οι πελάτες που έχουν κατάθεση ή δάνειο», και τέλος, για τη σχέση (ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ $\cap$ ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ) είναι «οι πελάτες που έχουν κατάθεση και δάνειο».

2.5

Αρχικά πρέπει να υπολογίσετε τις καταθέσεις με ποσό μικρότερο των 10.000 και τα δάνεια με ποσό μεγαλύτερο των 50.000

Οι εκφράσεις για το σκοπό αυτό είναι

Α. $\sigma_{\text{ΠΟΣΟ<'10000'}}$(ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ)

Β. $\sigma_{\text{ΠΟΣΟ>'50000'}}$(ΔΑΝΕΙΟ)

Οι νέες σχέσεις που αποτελούν αποτελέσματα των εκφράσεων *Α* και *Β*, έστω $Σ_Α$ και $Σ_Β$, θα πρέπει να συνδυαστούν μέσω του τελεστή σύνθεσης με τις σχέσεις ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ και ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ αντίστοιχα, ώστε να υπολογιστούν οι αριθμοί ταυτότητας των πελατών με τους λογαριασμούς και τα δάνεια που μας ενδιαφέρουν. Οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι:

Γ.$\tau_{\text{ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΣΑ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}$(ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ · $Σ_Α$)

Δ.$\tau_{\text{ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΣΒ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}$(ΔΑΝΕΙΟΛΗΠΤΗΣ · $Σ_Β$)

Τις σχέσεις που είναι αποτελέσματα των εκφράσεων *Γ* και *Δ* παραπάνω τις συμβολίζουμε $Σ_Γ$ και $Σ_Δ$.

Για να υπολογίσετε τους πελάτες που πληρούν και τις δύο συνθήκες της εκφώνησης, ίσως να πήρατε την τομή των $Σ_Γ$ και $Σ_Δ$. Αυτό είναι λάθος, διότι το αποτέλεσμα της τομής αυτής θα είναι πάντοτε το κενό σύνολο. Σκεφτείτε ότι η $Σ_Γ$ συνδυάζει πελάτες με λογαριασμούς (αριθμό λογαριασμού και ποσό), ενώ η $Σ_Δ$ συνδυάζει πελάτες με δάνεια (αριθμό δανείου και ποσό). Στοιχείο στην τομή μπορεί να υπάρξει μόνο αν υπάρχει δάνειο με τον ίδιο αριθμό και το ίδιο ποσό με τα αντίστοιχα ιδιώματα ενός λογαριασμού.

Αντίθετα, η τομή πρέπει να γίνει για τους πελάτες που είναι καταθέτες και δανειολήπτες και που πληρούν τις αντίστοιχες συνθήκες. Για το λόγο αυτό πρέπει να προβάλλουμε από τις σχέσεις $Σ_Γ$ και $Σ_Δ$ τους αριθμούς ταυτότητας των πελατών που σχετίζονται:

Ε. $\pi_{\text{ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}(Σ_Γ)$

ΣΤ. $\pi_{\text{ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}(Σ_Δ)$

Η τομή των σχέσεων $Σ_Ε$ και $Σ_{ΣΤ}$ που προκύπτουν ως αποτελέσματα εφαρμογής των εκφράσεων *Ε* και *ΣΤ* παραπάνω, σας δίνει τους αριθμούς λογαριασμούς των πελατών με κατάθεση μικρότερη από 10000 και ποσό δανείου μεγαλύτερο από 50000.

2.6

1. Η σχέση «αδερφός του» επί του συνόλου π των προσώπων δεν είναι σχέση μερικής διάταξης. Θα μπορούσατε να έχετε δώσει δύο αιτίες: Η πρώτη αφορά στο γεγονός ότι η σχέση αυτή δεν είναι ανακλαστική. Δεν ισχύει ότι ο χ είναι αδελφός με τον εαυτό του.

Η δεύτερη αιτία αφορά στο γεγονός ότι η σχέση «αδερφός του» δεν είναι αντισυμμετρική. Πράγματι αν ο χ είναι αδερφός του ψ, με $\chi \neq \psi$, τότε και ο ψ είναι αδερφός του χ σε όλες τις περιπτώσεις.

2. Η σχέση «έχουν τους ίδιους γονείς» επί του συνόλου π των προσώπων δεν είναι σχέση μερικής διάταξης, διότι δεν είναι αντισυμμετρική. Πράγματι, αν δύο πρόσωπα χ και ψ έχουν τους ίδιους γονείς, ο χ σχετίζεται με τον ψ, όπως και ο ψ σχετίζεται με τον χ, για $\chi \neq \psi$.

Παρατηρήστε ότι η σχέση είναι ανακλαστική και μεταβατική.

3. Η σχέση «συμπαθεί» επί του συνόλου π των προσώπων επίσης δεν είναι σχέση μερικής διάταξης: Αν θεωρήσουμε ότι ο καθένας συμπαθεί τον εαυτό του, τότε η σχέση είναι ανακλαστική. Επίσης, η σχέση είναι αντισυμμετρική, διότι, αν ο χ συμπαθεί τον ψ, δεν συμβαίνει κατ' ανάγκη ότι και ο ψ συμπαθεί τον χ, αν $\chi \neq \psi$. Όμως, δεν είναι μεταβατική σχέση, διότι, αν ισχύουν ότι $(\chi, \psi) \in$ «συμπαθεί» και $(\psi, \varphi) \in$ «συμπαθεί», τότε δεν συμβαίνει κατ' ανάγκη ότι $(\chi, \varphi)) \in$ «συμπαθεί».

4. Η σχέση «έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1» επί του συνόλου των θετικών ακεραίων δεν είναι σχέση μερικής διάταξης, διότι δεν είναι μεταβατική, ανακλαστική και αντισυμμετρική (φυσικά ως αιτιολόγηση το ένα από τα τρία αρκεί). Για να δείτε ότι δεν είναι μεταβατική, θεωρείστε τα ζεύγη (3, 5) και (5, 9). Και τα δύο ζεύγη αριθμών έχουν ως μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1, όμως το (3, 9) έχει ως μέγιστο κοινό διαιρέτη το 3. Δείξτε μόνοι σας ότι δεν είναι ανακλαστική και αντισυμμετρική.

2.7

Θα δειχθεί ότι η σχέση Σ, όπως αυτή ορίζεται παραπάνω, είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Έστω (x_1, x_2) στο $X_1 \times X_2$. Προφανώς, εφόσον η Σ_1 είναι σχέση μερικής διάταξης, και επομένως ανακλαστική στο X_1, ισχύει ότι $x_1\Sigma_1x_1$. Παρόμοια, για τη Σ_2, ισχύει ότι $x_2\Sigma_2x_2$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της Σ, $(x_1, x_2)\Sigma(x_1, x_2)$.

Έστω (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) στο $X_1 \times X_2$ με $(x_1, x_2) \neq (x'_1, x'_2)$, δηλαδή $(x_1 \neq x'_1)$ και $(x_2 \neq x'_2)$, για τα οποία ισχύει ότι $(x_1, x_2)\Sigma(x'_1, x'_2)$, δηλαδή $x_1\Sigma_1x'_1$ και $x_2\Sigma_2x'_2$. Λόγω του ότι η $Σ_1$ και η $Σ_2$ ως σχέσεις μερικής διάταξης είναι αντισυμμετρικές, δεν ισχύουν τα αντίστροφα, δηλαδή $(x'_1 Σ_1 x_1)$ ή $(x'_2 Σ_2 x_2)$. Επομένως, δεν ισχύει η $(x'_1, x'_2)Σ(x_1, x_2)$, δηλαδή η $Σ$ είναι αντισυμμετρική.

Για να δείξουμε ότι η $Σ$ είναι μεταβατική, θεωρούμε δύο ζεύγη $((x_1, x_2), (ψ_1, ψ_2))$ και $((ψ_1, ψ_2), (φ_1, φ_2))$, για τα οποία ισχύει ότι $(x_1, x_2)Σ(ψ_1, ψ_2)$ και $(ψ_1, ψ_2)Σ(φ_1, φ_2)$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της $Σ$, ισχύουν τα εξής: $x_1Σ_1ψ_1,$ $ψ_1Σ_1φ_1$, $x_2Σ_2ψ_2,$ $ψ_2Σ_2φ_2$.Λόγω της μεταβατικότητας των $Σ_1$ και $Σ_2$, ισχύουν ότι $x_1Σ_1φ_1$ και $x_2Σ_2φ_2$. Επομένως, ισχύει ότι $(x_1, x_2)Σ(φ_1, φ_2)$, δηλαδή η $Σ$ είναι σχέση μεταβατική.

Από τα παραπάνω τελικά συνάγεται ότι η $Σ$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

2.8

Σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας θα πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Αν $χ$ στοιχείο του $Σ$, τότε ισχύει ότι $χPχ$, δηλαδή κάθε σημείο ενώνεται με τον εαυτό του. Επομένως, η σχέση είναι ανακλαστική.

Αν $χ$, $ψ$ στοιχεία του $Σ$ με $χPψ$, τότε υπάρχει δρόμος που συνδέει τα $χ$ και $ψ$, επομένως θα ισχύει ότι και $ψPχ$. Συνεπώς, η σχέση $ρ$ είναι συμμετρική.

Αν $χ$, $ψ$, $φ$ στοιχεία του $Σ$ με $χPψ$ και $ψPφ$, τότε υπάρχει δρόμος που συνδέει το $χ$ με το $ψ$ και το $ψ$ με το $φ$. Συνεπώς, υπάρχει δρόμος που ενώνει τα $χ$ και $φ$, δηλαδή $χPφ$. Συνεπώς, η $ρ$ είναι μεταβατική σχέση.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι η $ρ$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

2.9

1. Σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας, θα πρέπει να δείξουμε ότι αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Αν $χ$ στοιχείο του X, τότε, επειδή $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας, ισχύει ότι $χΣ_1χ$ και $χΣ_2χ$, επομένως $χΣχ$, δηλαδή η σχέση είναι ανακλαστική.

Αν $χ$, $ψ$ στοιχεία του X με $χΣψ$, τότε $χΣ_1ψ$ και $χΣ_2ψ$. Εφόσον $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας, $ψΣ_1χ$ και $ψΣ_2χ$, επομένως ισχύει ότι $ψΣχ$. Συνεπώς, η σχέση $Σ$ είναι συμμετρική.

Αν $χ$, $ψ$, $φ$ στοιχεία του X με $χΣψ$, $ψΣφ$, τότε από τον ορισμό της $Σ$ ισχύουν τα εξής: $χΣ_1ψ$, $ψΣ_1φ$, και $χΣ_2ψ$, $ψΣ_2φ$. Τότε, επειδή $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας, ισχύουν ότι $χΣ_1φ$ και $χΣ_2φ$. Συνεπώς, $χΣφ$, δηλαδή η $Σ$ είναι μεταβατική σχέση.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Μια κλάση ισοδυναμίας της $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, είναι η $[\chi] = \{\psi \mid \chi\Sigma\psi\}$

Σύμφωνα με τον ορισμό της Σ, $[\chi] = \{\psi \mid \chi\Sigma_1\psi$ και $\chi\Sigma_2\psi\}$, δηλαδή $[\chi] = \{\psi \mid \chi\Sigma_1\psi\} \cap \{\psi \mid \chi\Sigma_2\psi\}$.

2.10

$f = \{(0, 0), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

Η f είναι 1 – 1, εφόσον πληροί τον ορισμό των συναρτήσεων αυτών.

Επίσης, είναι επί του X, εφόσον το πεδίο τιμών της είναι το X.

2.11

Θα πρέπει να δείξετε ότι η Σ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση.

Πράγματι, η Σ είναι ανακλαστική, διότι $f(x) = f(x)$ για κάθε x στο X, εφόσον f είναι συνάρτηση.

Επίσης, αν $x\Sigma y$, τότε και $y\Sigma x$, εφόσον $f(x) = f(y)$. Επομένως, η Σ είναι συμμετρική.

Τέλος, προφανώς η Σ είναι μεταβατική, εφόσον αν $f(x) = f(y)$ και $f(y) = f(z)$, τότε και $f(x) = f(z)$, δηλαδή $x\Sigma z$.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.

2.12

($\rightarrow$) Αρχικά αποδεικνύω το ευθύ: Αν η συνάρτηση f είναι 1 – 1, τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση g 1 – 1 από το A στο X η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι 1 – 1.

Έστω α_1 και α_2 στοιχεία του A με $f \circ g(\alpha_1) = f \circ g(\alpha_2)$. Εφόσον η f είναι 1 – 1, από τον ορισμό προκύπτει ότι $g(\alpha_1) = g(\alpha_2)$. Από το γεγονός όμως ότι και η g είναι 1 – 1, προκύπτει ότι $(\alpha_1 = \alpha_2)$. Συνεπώς, η σύνθεση των $f \circ g$ είναι συνάρτηση 1 – 1.

($\leftarrow$) Η απόδειξη του αντιστρόφου είναι αρκετά δύσκολη και ίσως να μην τα καταφέρατε. Θα πρέπει να σκεφτείτε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για οποιαδήποτε 1 – 1 συνάρτηση g από (οποιαδήποτε) σύνολο A στο X.

Αντιστρόφως λοιπόν, αν f συνάρτηση από το X στο Y και για οποιαδήποτε συνάρτηση g 1 – 1 από το A στο X, η σύνθεσή $f \circ g$ είναι 1 – 1, τότε η συνάρτηση f είναι 1 – 1.

Έστω x_1, x_2 στοιχεία του X για τα οποία $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 \neq x_2$, τότε, επειδή η υπόθεση ισχύει για οποιαδήποτε 1 – 1 συνάρτηση g από οποιαδήποτε σύνολο A στο X, μπορούμε να βρούμε συνάρτηση g και διαφορετικά στοιχεία α_1 και α_2 ενός συνόλου A τέτοια ώστε $x_1 = g(\alpha_1) \neq g(\alpha_2) = x_2$. Τότε όμως, δεδομένου ότι η $f \circ g$ είναι 1 – 1, θα πρέπει να ισχύει ότι $f \circ g(\alpha_1) \neq f \circ g(\alpha_2)$, δηλαδή $f(x_1) \neq f(x_2)$, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.

3.1

Τα βήματα που ακολουθεί ο αναδρομικός αλγόριθμος για τη v εύρεση του μκδ(60, 90) είναι τα εξής:

Βήμα 2: Εφόσον $\lambda > 0$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 3.

Βήμα 3: Εφόσον $\lambda > \kappa$, εκτελείται η ενέργεια 4.

Βήμα 4: Καλείται η μκδ(90, 60)

Βήμα 2: Εφόσον $\lambda > 0$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 3.

Βήμα 3: Εφόσον $\lambda < \kappa$, εκτελείται η σύνθετη ενέργεια 3(a) – 3(d).

Βήμα 3(b): Διαιρώντας το κ με το λ, προκύπτει ότι $90 = 60 \cdot 1 + 30$.

Βήμα 3(c): Καλείται η διαδικασία μκδ(60, 30).

Μια νέα διαδικασία μκδ ξεκινά με $\kappa = 60$ και $\lambda = 30$.

Βήμα 2: Εφόσον $\lambda > 0$, ο αλγόριθμος προχωρά στο βήμα 3.

Βήμα 3: Εφόσον $\lambda < \kappa$, εκτελείται η σύνθετη ενέργεια 3(a) – 3(d).

Βήμα 3(b): Διαιρώντας το κ με το λ, προκύπτει ότι $60 = 30 \cdot 2 + 0$.

Βήμα 3(c): Καλείται η διαδικασία μκδ(30, 0).

Μια νέα διαδικασία μκδ ξεκινά με $\kappa = 30$ και $\lambda = 0$.

Βήμα 2: Η νέα μκδ τερματίζει στην εντολή 2 για $\lambda = 0$ και επιστρέφει τη μεταβλητή $\kappa = 30$ στη διαδικασία που την κάλεσε (δηλαδή στην προηγούμενη κλήση της μκδ).

Βήμα 3(c): (συνέχεια) Επιστρέφει την τιμή της μεταβλητής μ, δηλαδή 30, στη διαδικασία που την κάλεσε (δηλαδή στην πρώτη κλήση της μκδ).

Βήμα 3(c): (συνέχεια) Η διαδικασία επιστρέφει επίσης την τιμή 30.

Βήμα 4: (συνέχεια) Η διαδικασία επιστρέφει επίσης την τιμή 30 και ο αλγόριθμος τερματίζει.

3.2

Ο αλγόριθμος που ζητείται είναι ιδιαίτερα απλός και ακολουθεί το παράδειγμα των αριθμών της ακολουθίας Fibonacci, όπως αυτός έχει διατυπωθεί στο παράδειγμα 3.5

1. Procedure A(n)
2. if (n=1) then return(n)
3. κ= A(n–1)
4. μ=κ+(2*κ)
5. return(μ)
6. end A.

Η εντολή 3 θα μπορούσε να είχε παραληφθεί, οπότε η εντολή 4 θα έπαιρνε τη μορφή μ=A(n–1)+(2*A(n–1)). Αντίθετα, προτιμήθηκε η προσθήκη της εντολής 3, ώστε να αποφεύγεται η επιπλέον αναδρομική κλήση του αλγορίθμου στην εντολή 4.

4.1

Είναι $(\nu \cdot (\nu-1))/2$. Το γράφημα είναι απλό και κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες. Συνεπώς, σε κάθε κορυφή εφάπτονται $(\nu-1)$ ακμές. Αφού οι κορυφές είναι ν, ο συνολικός αριθμός ακμών που εφάπτονται στις κορυφές είναι $\nu \cdot (\nu-1)$. Κάθε ακμή όμως εφάπτεται σε δύο κορυφές, επομένως μετριέται δύο φορές. Συνεπώς, το αποτέλεσμα: $(\nu \cdot (\nu-1))/2$.

4.2

Είναι $(\nu \cdot \mu)$, διότι το γράφημα είναι απλό και σε κάθε κορυφή του ενός εκ των δύο συνόλων της διαμέρισης (έστω αυτού με πλήθος στοιχείων ν) εφάπτονται μ ακμές – μια για κάθε κορυφή του άλλου συνόλου.

4.3

Το γράφημα Γ_1 δεν είναι διχοτομίσιμο. Η αιτιολόγηση του ισχυρισμού αυτού μπορεί να γίνει με την σε άτοπο απαγωγή: Έστω ότι το γράφημα είναι διχοτομίσιμο και επομένως υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου V των κορυφών του σε σύνολα V_1 και V_2. Έστω δε ότι η κορυφή ν_1 ανήκει στο σύνολο V_1. Τότε, η κορυφή ν_2, με την οποία η ν_1 συνδέεται με ακμή, θα πρέπει να ανήκει στο V_2. Παρομοίως, η ν_5 θα πρέπει να ανήκει στο V_1. Τότε όμως, και αφού η ν_5 συνδέεται με ακμή με τη ν_1, και η ν_1 θα ανήκει στο σύνολο V_2. Άτοπο, εφόσον υποθέσαμε ότι η ν_1 ανήκει στο σύνολο V_1 και το Γ_1 είναι διχοτομίσιμο. Συνεπώς, το Γ_1 δεν είναι διχοτομίσιμο.

Αντίθετα το γράφημα $Γ_2$ είναι διχοτομίσιμο. Μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του γραφήματος είναι η εξής:

V_1 = {x | x συνδέεται με την κορυφή v_1 με διαδρομή στην οποία συμμετέχουν μηδέν ή με αρτίου πλήθους ακμές}

V_2 = {x | x συνδέεται με την κορυφή v_1 με διαδρομή στην οποία συμμετέχουν περιττού πλήθους ακμές}

Τα παραπάνω σύνολα αποτελούν πράγματι μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του γραφήματος $Γ_2$, διότι: (α) κάθε κορυφή του γραφήματος ανήκει σε ένα από τα δύο σύνολα, (β) μια κορυφή δεν μπορεί να ανήκει σε περισσότερα του ενός σύνολα της διαμέρισης, εφόσον από την κορυφή v_1 προς οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος υπάρχει ακριβώς ένα μονοπάτι (το γράφημα είναι συνδεόμενο και δεν περιέχει κύκλο).

4.4

Πράγματι, αν παραληφθεί για παράδειγμα η ακμή (v_1, v_2), λόγω της ύπαρξης της κυκλικής διαδρομής (v_1, v_2, v_3), υπάρχει εναλλακτική διαδρομή από τη v_1 στη v_2, μέσω της v_3.

Συνεπώς, η απάντηση πρέπει να είναι ότι, εφόσον υπάρχουν κυκλικές διαδρομές στο γράφημα, μπορούν να παραληφθούν ακμές που συμμετέχουν στις διαδρομές αυτές, δίχως τα κομβικά σημεία να πάψουν να επικοινωνούν μεταξύ τους.

Επομένως, ο μέγιστος αριθμός δρόμων που μπορούν να παραληφθούν είναι τόσος όσες και οι κυκλικές διαδρομές, δηλαδή 8.

4.5

Έστω $κ = (v, e_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i, \ldots, v_{j-1}, e_j, v_j, \ldots, e_n, v)$ ο κύκλος από την v στην v. Εάν ο K δεν είναι απλός, υπάρχουν δύο κορυφές v_i, v_j με $v_i = v_j$ για $i < j < n$. Σε αυτή την περίπτωση αντικαθιστούμε τον K με τον $K' = (v, e_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i, e_{j+1}, \ldots, e_n, v)$.

Στην περίπτωση όπου και ο K' δεν είναι απλός, ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία μέχρι να προκύψει απλός κύκλος.

4.6

(α) Έστω v_1, v_2, κορυφές του γραφήματος. Εφόσον το γράφημα είναι συνδεόμενο, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές αυτές. Έστω ότι οι κορυφές συμμετέχουν σε κύκλο $κ = (v_1, e_1, \ldots, v_2, e_κ, \ldots, v_i, e_i, v_{i+1}, e, \ldots, v_1)$, στον οποίο συμμετέχει ακμή *e* του γραφήματος. Η διαγραφή της ακμής *e* δεν καθιστά το γράφημα μη – συνδεόμενο, εφόσον μεταξύ των κορυφών v_1, v_2 συνεχίζει να υπάρχει μονοπάτι $P = (v_1, e_1, \ldots, v_2)$.

(β) Ως απάντηση μπορείτε να δώσετε οποιοδήποτε συνδεόμενο γράφημα που περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο.

4.7

Κάθε ακμή *ε* ενός γραφήματος εφάπτεται σε δύο κορυφές. Επομένως, κάθε ακμή συμβάλλει στο βαθμό δύο κορυφών. Αθροίζοντας τους βαθμούς όλων των κορυφών έχουμε τη σχέση της άσκησης.

4.8

Εάν $\Gamma = (V, E)$. Διαμερίζουμε το σύνολο V των κορυφών του γραφήματος σε δύο σύνολα $V1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $V2 = \{v_1', v_2', \ldots, v_m'\}$. Το $V1$ περιέχει τις κορυφές με άρτιο βαθμό και το $V2$ τις κορυφές με περιττό βαθμό. Τότε, από την άσκηση αυτοαξιολόγησης 4.7

$$\sum_{i=1}^{v} \delta(v_i) + \sum_{i=1}^{m} \delta(v_j') = 2(m+v) \qquad (1)$$

Εφόσον το $\sum_{i=1}^{v} \delta(v_i)$ είναι άρτιος αριθμός, τότε και το $K = \sum_{i=1}^{m} \delta(v_i')$ θα είναι επίσης άρτιος αριθμός, διότι από την (1) παραπάνω το άθροισμά τους είναι άρτιος αριθμός. Το K είναι άθροισμα περιττών αριθμών. Για να είναι άρτιος αριθμός, θα πρέπει το πλήθος των αριθμών να είναι αριθμός άρτιος. Επομένως το m, δηλαδή το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό, είναι άρτιος αριθμός.

4.9

Έστω ότι το γράφημα έχει ένα μονοπάτι με μη επαναλαμβανόμενες ακμές από μία κορυφή v σε μία κορυφή w ($v \neq w$), στο οποίο περιέχονται όλες οι ακμές και όλες οι κορυφές του γραφήματος. Τότε το γράφημα είναι σίγουρα συνδεόμενο. Εάν προσθέσουμε την ακμή (w, v), τότε για το νέο γράφημα προκύπτει ένας κύκλος του Euler, ο οποίος αποτελείται από το δεδομένο μονοπάτι $(v, \ldots, w)$ ακολουθούμενο από τη νέα ακμή (w, v). Το γράφημα που προκύπτει με την προσθήκη της ακμής (w, v) είναι συνδεόμενο και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Συνεπώς, αφαιρώντας την ακμή (w, v), επανερχόμαστε στο αρχικό γράφημα και οι μόνες κορυφές των οποίων ο βαθμός επηρεάζεται (μειώνεται κατά ένα) είναι οι v, w. Άρα, αυτές είναι και οι μοναδικές κορυφές με περιττό βαθμό.

Το αντίστροφο του θεωρήματος αποδεικνύεται ανάλογα (Θεωρείστε το ως δραστηριότητα).

4.10

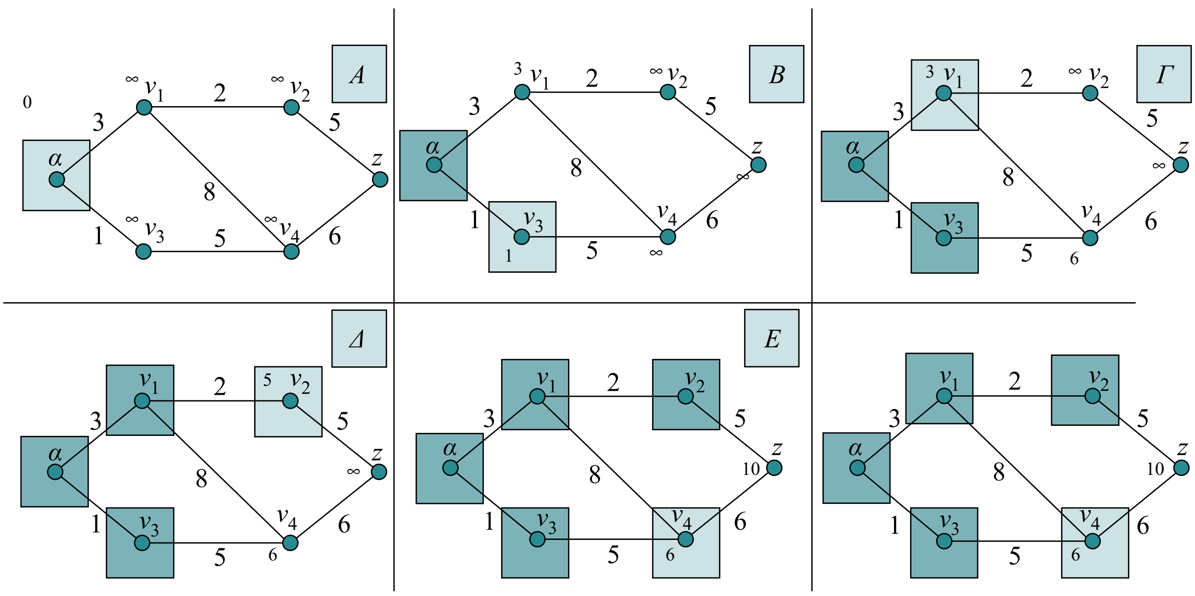
(α) Όταν v είναι περιττός αριθμός, διότι, αφού το γράφημα είναι συνδεόμενο και αφού ο βαθμός κάθε κορυφής είναι $(v–1)$, για να είναι ο $(v–1)$ άρτιος αριθμός, θα πρέπει το v να είναι περιττός.

(β) Όταν v άρτιος και μ άρτιος, ώστε κάθε κορυφή στο συνδεόμενο αυτό γράφημα να έχει άρτιο βαθμό.

(γ) $\mu = v = 1$ και $\mu = v = 2$, διότι σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή περιττού βαθμού.

4.11

Σύμφωνα και με το παράδειγμα εκτέλεσης του αλγόριθμου που δόθηκε παραπάνω, το σχήμα 4.40 δείχνει τα διαδοχικά βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου στο γράφημα που δόθηκε, από την α στη z.



Σχήμα 4.40

4.12

Η λύση στο παρόν πρόβλημα είναι η εισαγωγή μιας νέας ετικέτας K σε κάθε κορυφή v, η οποία αποθηκεύει την κορυφή που ενημερώνει την ετικέτα $L(v)$. Κατ΄αυτόν τον τρόπο φυλάσσεται η τελευταία κορυφή μέσω της οποίας περνάει το μικρότερο μονοπάτι προς τη v.

Τελικά, ξεκινώντας από την τελική κορυφή z και ακολουθώντας την τιμή των ετικετών K, σχηματίζεται το μονοπάτι από την α στη z αντιστρόφως.

Είσοδος – Ενα συνδεόμενο γράφημα με θετικά βάρη.

Οι κορυφές α και z.

Εξοδος – $L(z)$ το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από την α στη z.

1. **procedure** dijkstra(a, z)
2. L(a) :=0
3. **for** all vertices x in V, x≠a **do**
4. L(x) :=∞, K(x):=nil
5. T:= set of vertices
6. **while** z∈T **do**
7. **begin**
8.   επέλεξε κορυφή v∈T με το μικρότερο L(v)
9.   T:=T–{v}
10.   **for** κάθε κορυφή x∈T γειτονική της v **do**
11.   **begin**
12.   E:=L(x)
13.   L(x):=min{L(x), L(v)+w(v, x)}
14.   if L(x)<E then K(x):=v
15.   **end**
16.   **end**
17.   **end dijkstra.**

Παρατηρήστε ότι έχουν γίνει προσθήκες στις εξής εντολές:

Εντολή 4: «$K(x)$: = nil». Κάθε ετικέτα K παίρνει ως τιμή «nil»,

Εντολές 11 – 15: Η τιμή της προσωρινής ετικέτας L κάθε γειτονικής κορυφής της κορυφής v φυλάσσεται σε προσωρινή μεταβλητή E (εντολή 12). Αν η τιμή της L αλλάξει (γίνει μικρότερη), τότε ενημερώνεται και η ετικέτα K με τη μεταβλητή που «ευθύνεται» για την αλλαγή αυτή (εντολή 14).

Ως δραστηριότητα εφαρμόστε τον παραπάνω αλγόριθμο στο γράφημα της άσκησης αυτοαξιολόγησης 4.13

4.13

Έστω ότι υπάρχει κάποιο μονοπάτι $(v_1, v'_2, v'_3, \ldots, v_k)$ με μήκος μικρότερο από αυτό του p'. Τότε και το μονοπάτι $p'' = (v_1, v'_2, v'_3, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ είναι μήκους μικρότερου αυτού του p. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας, άρα το p′ είναι το μικρότερο μονοπάτι από την v_1 στη v_k.

4.14

$(\rightarrow)$ Έστω ότι τα γραφήματα Γ_1 και Γ_2 είναι ισόμορφα. Τότε από τον ορισμό των ισόμορφων γραφημάτων προκύπτει το (β).

$(\leftarrow)$ Έστω ότι ισχύει το (β). Θα δείξουμε ότι τα απλά γραφήματα Γ_1 και Γ_2 είναι ισόμορφα.

Από την υπόθεση υπάρχει συνάρτηση $f{:}V_1 \rightarrow V_2$, 1 – 1 και επί. Για να δείξουμε ότι τα γραφήματα είναι ισόμορφα, θα πρέπει να βρούμε έναν ισομορφισμό (f, g) μεταξύ των δύο γραφημάτων.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g{:}E_1 \rightarrow E_2$, έτσι ώστε εάν δύο κορυφές v_1, v_2 του Γ_1 είναι διαδοχικές, (υπάρχει ακμή (v_1, v_2) στον Γ_1), τότε

$g((v_1, v_2)) = (f(v_1), f(v_2))$.

Αρχικά, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η g έχει οριστεί καλώς, διότι από την υπόθεση έχουμε ότι $(f(v_1), f(v_2))$ είναι ακμή του Γ_2, εάν και μόνο εάν (v_1, v_2) είναι ακμή του Γ_1. Αυτό που θα πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι, αφού τα γραφήματα είναι απλά, οι δυάδες (v, w) και $(f(v), f(w))$ αναπαριστούν δύο ακμές στα γραφήματα Γ_1 και Γ_2, αντίστοιχα, δίχως την ύπαρξη καμίας ασάφειας. Επομένως, η g είναι συνάρτηση από το E_1 στο E_2.

Είναι απλό να δειχτεί ότι η g είναι 1 – 1 και επί (Σας δίνεται ως δραστηριότητα).

4.15

$(\rightarrow)$ Έστω τα απλά ισόμορφα γραφήματα Γ_1 και Γ_2 και (f, g) ισομορφισμός αυτών. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ η διάταξη των κορυφών του Γ_1, την οποία επιλέγουμε για τη δημιουργία του μητρώου σύνδεσης του Γ_1. Τότε, $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ είναι διάταξη των κορυφών του Γ_2, όπου η συνάρτηση f είναι η 1 – 1 και επί συνάρτηση του ισομορφισμού από το V_1 στο V_2.

Θα δείξουμε ότι τα μητρώα σύνδεσης A_1 και A_2 των Γ_1 και Γ_2 αντίστοιχα, που κατασκευάζονται με αυτές τις διατάξεις κορυφών, είναι ίσα. Από την υπόθεση, αν το ζεύγος (v_i, v_j) είναι ακμή του γραφήματος Γ_1, τότε και η $(f(v_i), f(v_j))$ είναι ακμή του γραφήματος Γ_2, και αντιστρόφως. Συνεπώς, τα αντίστοιχα στοιχεία i, j των μητρώων σύνδεσης είναι ίσα. Επομένως, υπάρχουν διατάξεις των κορυφών των δύο γραφημάτων, έτσι ώστε τα μητρώα σύνδεσής τους να είναι ίσα.

(←) Έστω ότι τα μητρώα σύνδεσης A_1 και A_2 που αντιστοιχούν στα δύο γραφήματα Γ_1 και Γ_2 είναι ίσα. Τότε, $\forall i, j$, $1 \leq i, j \leq v$, $A_1[i, j] = A_2[i, j]$.

Ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις

- $f{:}V_1 \rightarrow V_2$ με $f(v_i) = w_i$, όπου w_i (αντίστοιχα, v_i) η κορυφή που αντιστοιχεί στην i – οστή σειρά ή στήλη του πίνακα A_2 (αντίστοιχα, A_1). Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η f είναι 1 – 1 και επί.
- $g{:}E_1 \rightarrow E_2$, με $g((v_i, v_j)) = (f(v_i), f(v_j)) = (w_i, w_j)$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η g είναι 1 – 1 και επί.

Προφανώς, από την ισότητα των δύο πινάκων, $(v_i, v_j) \in E_1$ εάν και μόνο εάν $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$. Άρα, με βάση την άσκηση αυτοαξιολόγησης 4.14 το ζεύγος συναρτήσεων f, g είναι ένας ισομορφισμός του Γ_1 στο Γ_2.

4.16

Θεωρείστε δύο ισόμορφα γραφήματα Γ_1 και Γ_2 και θεωρείστε επίσης ότι ένα από τα δύο, έστω το Γ_1, έχει την ιδιότητα αυτή. Θα δείξουμε ότι και το Γ_2 έχει αυτήν την ιδιότητα.

Έστω απλός κύκλος μήκους κ στον Γ_1, $\neq (v_1, e_1, v_2, e_2\ldots, v_k, e_\kappa, v_1)$. Αν (f, g) ισομορφισμός του Γ_1 επί του Γ_2, τότε θα δείξουμε ότι το μονοπάτι $\rho = (f(v_1), g(e_1), f(v_2), g(e_2)\ldots, f(v_k), g(e_\kappa), f(v_1))$ είναι απλός κύκλος μήκους κ στον Γ_2. Εφόσον η g είναι 1 – 1, δεν μπορεί να υπάρχει επανάληψη της ίδιας ακμής, δηλαδή $g(e_i) = g(e_j)$, εφόσον $e_i \neq e_j$ για $i \neq j$. Επομένως, ο ρ είναι κύκλος στο Γ_2 μήκους κ. Ως δραστηριότητα δείξτε ότι ο ρ είναι απλός κύκλος μήκους κ. Συνεπώς, η ιδιότητα «έχει απλό κύκλο μήκους κ» είναι αναλλοίωτη ιδιότητα.

4.17

Έστω ότι το K_5 είναι επίπεδο γράφημα. Τότε, σε μια αποτύπωση του γραφήματος αυτού κάθε όψη του επιπέδου θα έχει βαθμό τουλάχιστον 3, αφού κάθε κύκλος στον K_5 είναι μήκους τουλάχιστον 3. Επομένως, εάν ε ο αριθμός των ακμών του γραφήματος, 'o' ο αριθμός των όψεων του επιπέδου και κ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος, κατ' αντιστοιχία με όσα ειπώθηκαν και στο θεώρημα 4.6, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$3 \cdot o \leq$ άθροισμα των βαθμών των όψεων $\leq 2 \cdot \varepsilon$

Διότι, κάθε όψη καθορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές και κάθε ακμή του γραφήματος συμμετέχει στο βαθμό δύο όψεων. Τότε από τον τύπο του Euler

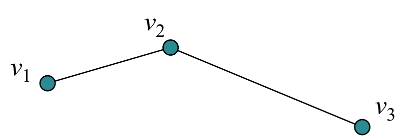
$2 \cdot \varepsilon \geq 3 \cdot (\varepsilon - \kappa + 2)$.

Δηλαδή, για το K_5 ισχύει $20 \geq 3 \cdot (10 - 5 + 2) = 21$, κάτι που είναι φυσικά άτοπο. Επομένως, το K_5 δεν είναι επίπεδο γράφημα.

4.18

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για συνδεόμενα γραφήματα και αφήνουμε την περίπτωση που ο Γ είναι μη συνδεόμενος ως δραστηριότητα.

Εάν $\varepsilon = 2$, τότε ο γράφημα είναι αυτό του σχήματος 4.41 και επομένως, $2 = \varepsilon \leq (3 \cdot \kappa) - 6 = 3$.



Σχήμα 4.41
Επίπεδο απλό γράφημα 2 ακμών

Έστω ότι $\varepsilon > 2$. Εφόσον το γράφημα είναι απλό, σε μια αποτύπωσή του κάθε όψη αυτού θα καθορίζεται από κύκλο μήκους τουλάχιστον 3. Αφού κάθε ακμή καθορίζει το πολύ δύο όψεις, ισχύει η εξής ανισότητα:

$3 \cdot o \leq$ Άθροισμα βαθμών των όψεων του επιπέδου $\leq 2 \cdot \varepsilon$.

Από τον τύπο του Euler $o = 2 - \kappa + \varepsilon$ και επομένως $3 \cdot o = 6 - 3\kappa + 3\varepsilon$. Άρα,

$2 \cdot \varepsilon \geq 3o = 6 - 3\kappa + 3\varepsilon$, δηλαδή $\varepsilon \leq 3\kappa - 6$.

5.1

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Kuratowski, για να δείξω ότι ένα δέντρο είναι επίπεδο, αρκεί να δείξω ότι δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με τον $K_{3,3}$ ή τον K_5. Ως ακυκλικό γράφημα, ένα δέντρο δεν μπορεί να περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με τον $K_{3,3}$ ή τον K_5. Συνεπώς, ένα δέντρο είναι επίπεδο γράφημα.

5.2

Για να δείξουμε ότι κάθε δέντρο είναι διχοτομίσιμο γράφημα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε δέντρο με ρίζα είναι διχοτομίσιμο. Για οποιοδήποτε άλλο δέντρο, αρκεί να επιλέξουμε μια κορυφή του ως ρίζα.

Έστω $T = (V, E)$ δέντρο με ρίζα r. Θα δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ του συνόλου κορυφών του V, τέτοια ώστε κάθε ακμή του δέντρου εφάπτεται σε μια κορυφή του V_1 και σε μια κορυφή του V_2.

Αν

$$V_1 = \{v \mid \text{η } v \text{ βρίσκεται σε άρτιο επίπεδο}\}$$

$$V_2 = \{v \mid \text{η } v \text{ βρίσκεται σε περιττό επίπεδο}\}$$

δύο σύνολα, τότε αυτά αποτελούν διαμέριση του συνόλου V, εφόσον δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή του δέντρου που ανήκει σε δύο επίπεδα, και επομένως στα δύο σύνολα, και κάθε κορυφή του δέντρου βρίσκεται σε ένα επίπεδο.

Κάθε ακμή του δέντρου εφάπτεται σε μια κορυφή του V_1 και σε μια κορυφή του V_2. Αν υπήρχε ακμή $e = (v_1, v_2)$ στο E, όπου v_1, v_2 ανήκουν στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης, τότε στο δέντρο θα σχηματιζόταν ο κύκλος $(r, \ldots, v_{1,} e, v_2, \ldots, .r)$. Άτοπο, αφού το δέντρο είναι ακυκλικό γράφημα.

Συνεπώς, $\{V_1, V_2\}$ αποτελεί διαμέριση του συνόλου κορυφών του δέντρου V και κάθε ακμή στο E εφάπτεται σε μια κορυφή του V_1 και σε μια κορυφή του V_2.

5.3

Το γράφημα αυτό δεν είναι απλό λόγω της ύπαρξης ανακύκλωσης. Συνεπώς από τον ορισμό των δέντρων, αυτό δεν μπορεί να είναι δέντρο. Εξάλλου, η ύπαρξη της ανακύκλωσης (v_2, v_2) δημιουργεί κύκλο. Συνεπώς, το γράφημα δεν είναι ακυκλικό, άρα δεν μπορεί να είναι δέντρο.

5.4

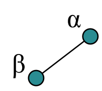
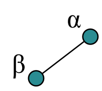
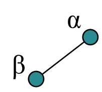
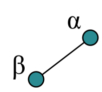
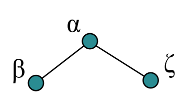
(α) Για την εύρεση του ζητούμενου συστήματος δρόμων θα πρέπει να βρείτε ένα συνδετικό δέντρο του παραπάνω γραφήματος. Για την εύρεση συνδετικού δέντρου μπορείτε να εφαρμόσετε είτε την κατά βάθος διάσχιση ή την κατά πλάτος διάσχιση του δέντρου, επιλέγοντας επίσης μια διάταξη των κορυφών του γραφήματος.

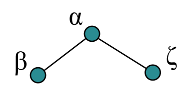
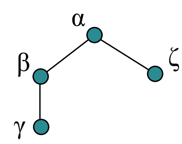
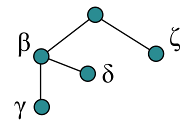
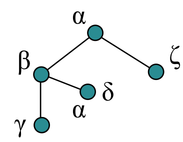
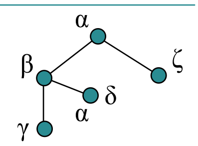
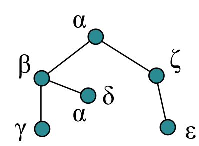
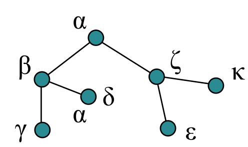
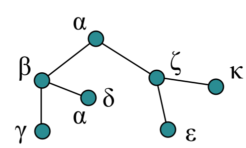
Για την περιγραφή μιας λύσης θα χρησιμοποιήσω την κατά πλάτος διάσχιση του γραφήματος με διάταξη των κορυφών του γραφήματος, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \kappa)$. Ως ρίζα του συνδετικού δέντρου θα θεωρήσουμε την πρώτη κορυφή στην προτεινόμενη διάταξη, δηλαδή την α. Συνεπώς, σύμφωνα με τον αλγόριθμο, όπως αυτός διατυπώθηκε παραπάνω, αρχικά $V' = \{\alpha\}$ και $S = (\alpha)$.

Η 1η στήλη του παρακάτω πίνακα, όπως και στο παράδειγμα 5.6, δείχνει την τιμή της λίστας S, η 2η στήλη την τιμή της V', η 3η την τιμή της μεταβλητής x καθώς αυτή διατρέχει τη λίστα S, η 4η στήλη το σύνολο $V - V'$, η 5η στήλη την τιμή της μεταβλητής y καθώς αυτή διατρέχει το σύνολο $(V - V')$ με σεβασμό στην αρχική διάταξη, η 5η στήλη δείχνει τις ακμές και κορυφές που προστίθενται στο συνδετικό δέντρο και η 6η στήλη δείχνει το συνδετικό δέντρο όπως αυτό σχηματίζεται.

Πίνακας 5.6

Εφαρμογή της κατά πλάτους διάσχισης του γραφήματος στο σχήμα 5.11 με διάταξη κορυφών (α, β, γ, δ, ε, ζ, κ).

S	V’	X	V–V’	Y	(X,Y)	Συνδετικό Δέντρο
(α)	{α}	α	(β,γ,δ,ε,ζ,κ)	β	(α,β)	
(α)	{α,β}	α	(γ,δ,ε,ζ,κ)	γ		
(α)	{α,β}	α	(γ,δ,ε,ζ,κ)	δ		
(α)	{α,β}	α	(γ,δ,ε,ζ,κ)	ε		
(α)	{α,β}	α	(γ,δ,ε,ζ,κ)	ζ	(α,ζ)	

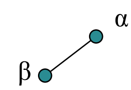
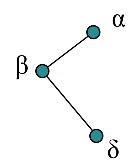
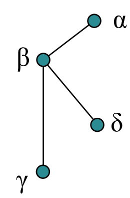
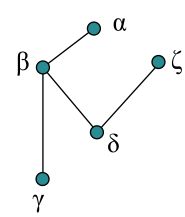
S	**V'**	**X**	**V–V'**	**Y**	**(X,Y)**	**Συνδετικό Δέντρο**
(α)	{α,β,ζ}	α	(γ,δ,ε,κ)	κ		
(β,ζ)	{α,β,ζ}	β	(γ,δ,ε,κ)	γ	(β,γ)	
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ}	β	(δ,ε,κ)	δ	(β,δ)	
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ,δ}	β	(ε,κ)	ε		
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ,δ}	β	(ε,κ)	κ		
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ,δ}	ζ	(ε,κ)	ε	(ζ,ε)	
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ,δ,ε}	ζ	(κ)	κ	(ζ,κ)	
(β,ζ)	{α,β,ζ,γ,δ,ε,κ}	ζ	( )			

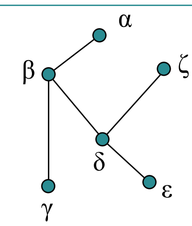
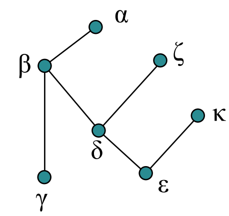
(β) Για την εύρεση του φθηνότερου συστήματος δρόμων που μπορεί να κατασκευαστεί θα εφαρμόσω τον αλγόριθμο του Prim στο αρχικό γράφημα. Ως αρχική κορυφή θεωρούμε την κορυφή *α*.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται (*n*–1) = 6 φορές, όπου *n* = 7 ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Πίνακας 5.7

Εφαρμογή του αλγορίθμου Prim στο γράφημα του σχήματος 5.11.

Κορυφές του υπο κατασκευή δέντρου	**Βάρη των υποψήφιων ακμών**	**Συνδετικό δέντρο**
{α}	w(α,β) = 5√ w(α,ζ) = 10	
{α,β}	w(α,ζ) = 10 w(β.ζ) = 15 w(β,δ) = 5√ w(β,γ) = 6	
{α,β,δ}	w(α,ζ) = 10 w(β.ζ) = 15 w(β,γ) = 6√ w(δ,ζ) = 7 w(δ,ε) = 8 w(δ,γ) = 9	
{α,β,δ,γ}	w(α,ζ) = 10 w(β.ζ) = 15 w(δ,ζ) = 7√ w(δ,ε) = 8 w(γ,ε) = 14	

Κορυφές του υπο κατασκευή δέντρου	**Βάρη των υποψήφιων ακμών**	**Συνδετικό δέντρο**
{α,β,δ,γ,ζ}	w(δ,ε) = 8√ w(γ,ε) = 14 w(ζ,ε) = 12 w(ζ,κ) = 30	
{α,β,δ,γ,ζ,ε}	w(ζ,κ) = 30 w(ε,κ) = 10√	

5.5

Είσοδος. Μια ακολουθία $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ διακριτών δεδομένων. Το μήκος ν της ακολουθίας αυτής.

Έξοδος. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης *T*.

Procedure construct_b_search_tree (δ_1, δ_2, ..., δ_ν, ν)

/* current_vertex : τρέχουσα κορυφή*/

/* D(v) το δεδομένο που αποθηκεύεται στην κορυφή v*/

Δημιούργησε τη ρίζα ρ του δέντρου.

current_vertex := ρ

D(current_vertex) := δ^1.

for i:=2 to ν do

begin

put:=false

while (not put) do

begin

if D(current_vertex) < δ_2 then

```
if   right_child(current_vertex) = nil then current_vertex:= right_child(current_vertex)
               else
               begin
               current_vertex := new(right_child(current_vertex))
               D(current_vertex) := δ2
               put:=true
               end
          ELSE
if   D(current_vertex) > δ2 then
if   left_child(current_vertex) = nil then current_vertex:= left_child(current_vertex)
               else
               begin
               current_vertex := new(left_child(current_vertex))
               D(current_vertex) := δ2
               put:=true
               end
     end
end
end (procedure)
```

5.6.

Ο αλγόριθμος για την παραγωγή της ενθεματικής μορφής πλήρους παρενθέσεων από την παράσταση μιας αριθμητικής παράστασης σε δυαδικό δέντρο είναι μια «παραλλαγή» του αλγορίθμου ενδοδιατεταγμένης διάσχισης, όπως αυτός διατυπώθηκε παραπάνω. Απλώς, πρέπει να προσέξτε να τοποθετήσετε σωστά τις παρενθέσεις στην παραγόμενη ενθεματική μορφή.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος.

Ενδοδιατεταγμένη διάσχιση.

Είσοδος. *R*, η ρίζα ενός δυαδικού δέντρου.

Έξοδος. Εξαρτάται τι σημαίνει «επίσκεψη» στην κορυφή.

```
procedure inorder(R)
1. if R είναι κενή then return
2. write('(')
3. l:= αριστερό παιδί της R
4. inorder(l)
5. write(R) /* Η επίσκεψη στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι είναι εγγραφή*/
6. r:=δεξί παιδί της R
7. inorder(r)
8. write(')')
end
```

Η ενθεματική μορφή πλήρους παρενθέσεων είναι η ίδια η παράσταση (Ι) παραπάνω, δηλαδή (((Α + Β)*Γ) – (Δ/Ε)).

Η μεταθεματική μορφή της εν λόγω παράστασης με την εφαρμογή της μεταδιατεταγμένης διάσχισης στο δέντρο του σχήματος 5.19 είναι η εξής:

ΑΒ + Γ*ΔΕ/ –

Η προθεματική μορφή της εν λόγω παράστασης με την εφαρμογή της προδιατεταγμένης διάσχισης στο δέντρο του σχήματος 5.19 είναι η εξής:

– * + ΑΒΓ/ΔΕ

Ορολογία

Α

Ανακλαστική σχέση (reflexive relation)

Σ επί συνόλου X καλείται η Σ αν $(\chi, \chi) \in \Sigma$, για κάθε χ στο X.

Ανακύκλωση (loop)

Ακμή που εφάπτεται σε μια και μοναδική κορυφή, δηλαδή $\varepsilon = (v, v)$

Αναλλοίωτη ιδιότητα (invariant property)

Ιδιότητα γραφήματος Γ_1 καλείται αναλλοίωτη ιδιότητα, εάν κάθε γράφημα Γ_2 ισόμορφο του Γ_1 έχει επίσης αυτή την ιδιότητα.

«Ανν»

Σύνθετη πρόταση **«*π* εάν και μόνο εάν *ρ*»** ή **«*π* ανν *ρ*»** συμβολίζεται $\pi \leftrightarrow \rho$ και διαβάζεται «π αν και μόνο αν ρ»

Αντιπαράδειγμα (counterexample)

Ένα στοιχείο του Δ για το οποίο μια καθολικά προσδιορισμένη έκφραση γίνεται ψευδής.

Αντίστροφη

Σχέση **(inverse relation)**, σχέσης Σ από σύνολο X σε σύνολο Y, συμβολίζεται Σ^{1}, είναι η εξής σχέση από το Y στο X: $\Sigma^{-1} = \{(\psi, \chi) \mid (\chi, \psi) \in \Sigma\}$.

Αντισυμμετρική (antisymmetric)

Καλείται σχέση επί συνόλου X, αν για κάθε χ, ψ στο X, ισχύει ότι αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$ και $\chi \neq \psi$, τότε $(\psi, \chi) \notin \Sigma$.

Αντίφαση (contradiction)

Πρόταση που είναι πάντοτε ψευδής.

Αξίωμα (axiom)

Είναι μια πρόταση που θεωρείται πάντοτε αληθής

Απαγωγή σε άτοπο

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρούμε ότι η υπόθεση $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ του θεωρήματος

Για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, *εάν* $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ *τότε* $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ (π)

είναι αληθής και το $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ψευδές. Η χρήση των $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $\rceil P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, θεωρημάτων, αξιωμάτων και ορισμών οδηγεί σε πρόταση της μορφής (σ $\wedge\rceil$σ), δηλαδή σε άτοπο. Το άτοπο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αρχικές μας υποθέσεις ήταν ψευδείς. Δηλαδή: (α) είτε η $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ είναι ψευδής είτε (β) η $P(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ αληθής. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η υποθετική πρόταση (π) του γενικευμένου θεωρήματος που διατυπώθηκε παραπάνω είναι αληθής.

Απλή πρόταση (simple proposition)

Πρόταση που δεν είναι σύνθετη.

Απλό γράφημα (simple graph)

Γράφημα Γ δίχως ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές.

Απλός κύκλος (simple cycle)

Σε γράφημα Γ είναι κύκλος δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές (εκτός βέβαια της αρχικής και τελικής κορυφής).

Απλό μονοπάτι (simple path)

Σε γράφημα Γ καλείται μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Απλοποίηση σειράς (series reduction)

Καλείται η διαδικασία κατά την οποία διαγράφουμε την α από τον Γ και αντικαθιστάμε τις ακμές (α, β) και (α, γ) με την ακμή (β, γ). Το νέο γράφημα Γ' που προκύπτει λέγεται ότι *προήλθε από τον* Γ *με μια απλοποίηση σειράς*.

Αποδεικτική διαδικασία (proof procedure)

Διαδικασία (ή επιχειρηματολογία) που δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής (επαληθεύει την πρόταση)

Αποτύπωση

Καλείται κάθε σχηματισμός του γραφήματος στο επίπεδο με μη διασταυρωμένες ακμές.

Άρνηση πρότασης (proposition negation)

ρ συμβολίζεται $\rceil \boldsymbol{\rho}$ και διαβάζεται «δεν ισχύει ότι “ρ”».

Β

Βαθμός κορυφής (degree of vertex)

v ενός γραφήματος $\Gamma = (V, E)$ καλείται ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που εφάπτονται στην v. Θεωρούμε ότι μια ανακύκλωση μετράει «2» στο βαθμό της κορυφής στην οποία εφάπτεται. Ο βαθμός της v συμβολίζεται $\delta(v)$.

Βαθμός όψεως (view degree)

Καλείται ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που καθορίζουν την όψη. Στο βαθμό δεν προστίθενται οι ακμές που εφάπτονται στην όψη δίχως να την καθορίζουν.

Γ

Γράφημα(μη κατευθυνόμενο) (non–directed graph)

Γ είναι μία δυάδα από σύνολα E και V και συμβολίζεται με $\Gamma = (E, V)$. Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος και E το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή ε του γραφήματος ($\varepsilon \in E$) συνδέει δύο κορυφές v_1 και v_2 του συνόλου V. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $\varepsilon = (v_1, v_2)$ ή $\varepsilon = (v_2, v_1)$. (Βλέπε επίσης κατευθυνόμενο γράφημα)

Δ

Δέντρο (tree)

τ είναι απλό γράφημα, όπου εάν v_1 και v_2 δύο κορυφές στο τ, τότε υπάρχει ένα μοναδικό απλό μονοπάτι από την v_1 στη v_2.

Δέντρο με ρίζα (rooted tree)

Είναι δέντρο, στο οποίο μια ιδιαίτερη κορυφή του χαρακτηρίζεται σαν ρίζα του δέντρου.

Διάζευξη προτάσεων (disjunction)

π και ρ συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi \vee \rho}$ και διαβάζεται «π ή ρ»

Διαμέριση (partition)

Ενός συνόλου X καλείται μια συλλογή $\mathcal{L}$ μη κενών υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε από την ένωση των συνόλων του $\mathcal{L}$ προκύπτει το X, και ανά δύο τα σύνολα στο $\mathcal{L}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Διάσχιση γραφήματος (graph traversal)

(Κατά βάθος διάσχιση, Κατά πλάτος διάσχιση). Η συστηματική επίσκεψη των κορυφών ενός γραφήματος.

Διάσχιση δυαδικών δέντρων (binary tree traversal)

(Προδιατεταγμένη, ενδοδιατεταγμένη και μεταδιατεταγμένη). Η συστηματική επίσκεψη των κορυφών ενός δυαδικού δέντρου.

Διμελής (binary)

Σχέση Σ από σύνολο X σε σύνολο Y είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$[1]. Αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$, λέμε ότι το χ σχετίζεται με το ψ και σημειώνουμε $\chi \Sigma \psi$. Στην περίπτωση όπου $X = Y$, λέμε ότι η Σ είναι διμελής σχέση επί του συνόλου X.

Διχοτομίσιμο (bipartite)

Καλείται γράφημα $\Gamma = (V, E)$ εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε κάθε ακμή e στο E εφάπτεται σε μία κορυφή του V_1 και σε μια του V_2.

Δυαδικό δέντρο (binary tree)

Είναι δέντρο με ρίζα, όπου κάθε κορυφή έχει ένα, δύο ή και κανένα παιδιά.

---

[1] Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων $X \times Y$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων δυάδων (χ, ψ), όπου $\chi \in X$ και $\psi \in \Psi$, δηλ. $X \times Y = \{(\chi, \psi) \mid \chi \in X$ και $\psi \in \Psi\}$

Δέντρο αναζήτησης (search tree)

Είναι δυαδικό δέντρο T, σε κάθε κορυφή του οποίου αποθηκεύεται ένα δεδομένο. Τα δεδομένα αποθηκεύονται με τέτοιο τρόπο, ώστε για κάθε κορυφή v στο T, κάθε δεδομένο στο αριστερό υποδέντρο της v είναι μικρότερο από το δεδομένο στη v, και κάθε δεδομένο στο δεξί υποδέντρο της v είναι μεγαλύτερο από το δεδομένο της v.

Ε

Ελάχιστο συνδετικό δέντρο (minimum spanning tree)

Γραφήματος Γ με βάρη είναι ένα συνδετικό δέντρο του Γ με ελάχιστο βάρος (άθροισμα των βαρών των ακμών του).

Επί (onto)

Συνάρτηση f από το X στο Y καλείται συνάρτηση, αν το πεδίο τιμών της είναι το Y.

Επίπεδο (planar)

Καλείται γράφημα που μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι ακμές του να μη διασταυρώνονται.

Επίπεδο (level)

Κορυφής v σε δέντρο τ με ρίζα καλείται το μήκος του απλού μονοπατιού από τη ρίζα του δέντρου στην κορυφή v.

Εσωτερική κορυφή (interal vertex)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Ένα–προς–ένα (one–to–one)

Καλείται συνάρτηση f από το X στο Y (συμβολίζεται και ως $1 - 1$), αν για κάθε ψ στο Y υπάρχει το πολύ ένα χ στο X τέτοιο ώστε $f(\chi) = \psi$.

Ευκλείδειο γράφημα (Euclidian graph)

Καλείται απλό γράφημα $\Gamma = (E, V)$ για το οποίο ισχύει η εξής συνθήκη: Για κάθε τριάδα διαφορετικών κορυφών v_1, v_2, v_3 του γραφήματος ισχύει ότι: $\mathrm{w}(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) \geq w(v_1, v_3)$, όπου $w(v_i, v_j)$ το βάρος της ακμής (v_i, v_j).

Θ

Θεώρημα (theorem)

Είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται (με βάση ορισμούς, αξιώματα και άλλα θεωρήματα) αληθής

Ι

Ισοδύναμες προτάσεις (equivalent propositions)

Προτάσεις π και ρ καλούνται ισοδύναμες, συμβολίζονται $\pi \equiv \rho$, ανν: (α) Είναι απλές και η τιμή αληθείας της π είναι πάντοτε ίση με την τιμή αληθείας της ρ και αντιστρόφως. Ή (β) είναι σύνθετες, αποτελούνται από τις προτάσεις $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$ και, δεδομένων των τιμών αληθείας των $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, οι π και ρ έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

Ισοδυναμίας σχέση (equivalence relation)

Επί συνόλου X καλείται σχέση ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Ισόμορφα γραφήματα (isomorphic graphs)

Δύο γραφήματα $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ και $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ καλούνται ισόμορφα, εάν: (α) υπάρχει μία συνάρτηση $f{:}V_1 \rightarrow V_2$, 1 – 1 και επί, (β) υπάρχει συνάρτηση $g{:}E_1 \rightarrow E_2$, 1 – 1 και επί, (γ) $\forall\ v_1, v_2 \in V_1$ ισχύει ότι, αν $e = (v_1, v_2)$ ανήκει στο E_1, τότε $g(e) = (f(v_1), f(v_2))$ ανήκει στο E_2, και αντιστρόφως. Το ζεύγος των συναρτήσεων f, g καλείται **ισομορφισμός** του Γ_1 επί του Γ_2.

Ισομορφισμός (isomorphism)

Γραφήματος Γ_1 επί γραφήματος Γ_2. Βλέπε Ισόμορφα γραφήματα

Κ

Καθολικά προσδιορισμένη έκφραση (universally quantified)

Είναι έκφραση της μορφής [$\forall X, \Pi(X)$], όπου π προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ και διαβάζεται «για κάθε X, $\Pi(X)$».Το σύμβολο $\forall$ καλείται **καθολικός ποσοδείκτης**

Κορυφή διακλάδωσης (branching vertex)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph)

Γ, αποτελείται από δύο σύνολα, E και V, και συμβολίζεται με $\Gamma = (E, V)$. Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος και E το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή ε στο E σχετίζεται με ένα διατεταγμένο σύνολο κορυφών v_1, v_2. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $\varepsilon = (v_1, v_2)$ και συμβολίζει μία ακμή από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_2.

Κύκλος (cycle)

Σε γράφημα Γ είναι μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες ακμές, όπου η αρχική και η τελική κορυφές συμπίπτουν

Κύκλος του Euler (Euler cycle)

Είναι κύκλος σε γράφημα Γ που περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος και κάθε ακμή αυτού ακριβώς μία φορά.

Κύκλος Hamilton (Hamilton cycle)

Σε γράφημα καλείται κύκλος που περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μια φορά (με εξαίρεση βέβαια την αρχική και την τελική που συμπίπτουν).

Μ

Μαθηματική επαγωγή (mathematical induction) (Αρχή της)

Βλέπε ορισμό 1.18

Μεμονωμένη κορυφή (isolated vertex)

Κορυφή γραφήματος στην οποία δεν εφάπτεται καμία ακμή**.**

Μερικής διάταξης (partial order)

Σχέση επί συνόλου X καλείται σχέση Σ, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Μερικώς διατεταγμένο σύνολο (partially ordered set)

Καλείται το ζεύγος (X, Σ), όπου Σ σχέση μερικής διάταξης επί του συνόλου X.

Μεταβατική (transitive)

Καλείται σχέση επί συνόλου X, αν για κάθε χ, ψ, φ στο X, ισχύει ότι αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$ και $(\psi, \varphi) \in \Sigma$, τότε $(\chi, \varphi)) \in \Sigma$.

Μητρώο σύνδεσης (adjacency matrix)

Γραφήματος Γ με ν κορυφές, όπου $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ μία διάταξη των κορυφών του γραφήματος αυτού, είναι ένας πίνακας A διαστάσεων $\nu x \nu$, του οποίου η γραμμή (στήλη) i, $1 \leq i \leq \nu$, αντιστοιχεί στην κορυφή v_i. Το στοιχείο $A[i, j]$ του πίνακα είναι ίσο με 1 εάν και μόνο εάν υπάρχει ακμή στον Γ που συνδέει τις κορυφές v_i και v_j. Στην αντίθετη περίπτωση, η τιμή του $A[i, j]$ είναι 0.

Μονοπάτι (path)

P μήκους ν από μία κορυφή v_0 σε μια κορυφή v_n σε γράφημα $\Gamma = (V, E)$, $v_0, v_n \in V$ καλείται μία ακολουθία από $\nu + 1$ κορυφές και ν ακμές, όπου οι ακμές εναλλάσσονται των κορυφών, ξεκινώντας από την κορυφή v_0 και καταλήγοντας στην κορυφή v_n. Δηλαδή, $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, .., e_n, v_n)$, όπου κάθε ακμή e_i εφάπτεται των κορυφών v_{i-1}, v_i, με $1 \leq i \leq n$.

Ν

Νόμοι de Morgan

Γενικευμένοι (Βλέπε 1.1.3)

Ο

Ομοιομορφικά (homeomorphic)

Καλούνται δύο γραφήματα Γ_1 και $\Gamma_{2,}$ εάν το Γ_1 και το Γ_2 μπορούν να απλοποιηθούν σε ισόμορφα γραφήματα (διενεργώντας σε αυτά απλοποιήσεις σειράς)

Ολικής διάταξης σχέση επί συνόλου *X* (total order)

Καλείται σχέση Σ, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική και κάθε δύο στοιχεία του X συγκρίνονται μέσω της Σ.

Ολικώς διατεταγμένο σύνολο (totally ordered set)

Καλείται το ζεύγος (X, Σ), όπου Σ σχέση ολικής διάταξης επί του συνόλου X.

Ορισμός (definition)

Έκφραση που καθορίζει μια νέα έννοια με βάση προηγούμενες έννοιες.

Όψη (view)

Του επιπέδου καλείται κάθε τμήμα του επιπέδου το οποίο ορίζεται από έναν κύκλο μιας αποτύπωσης του επίπεδου γραφήματος.

Π

Παιδί κορυφής (child of vertex)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Παράλληλες ακμές (parallel edges)

Σε ένα *μη κατευθυνόμενο* γράφημα Γ καλούνται διαφορετικές ακμές που συνδέουν δύο κορυφές v_1 και v_2.

Πατέρας κορυφής (father of vertex)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Πεδίο αναφοράς (domain of discourse)

(Βλέπε Προτασιακή συνάρτηση)

Πεδίο ορισμού (domain)

Διμελούς σχέσης Σ από σύνολο X σε σύνολο Y καλείται το σύνολο $\{\chi \in X \mid (\chi, \psi) \in \Sigma$ για κάποιο ψ στο $Y\}$

Πεδίο τιμών (range)

Διμελούς σχέσης Σ από σύνολο X σε σύνολο Y καλείται το σύνολο $\{\psi \in Y \mid (\chi, \psi) \in \Sigma$ για κάποιο χ στο $X\}$

Πίνακας αληθείας (truth table)

Σύνθετης πρότασης π, που προκύπτει από συνδυασμό προτάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$. Αυτός παραθέτει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αληθείας των προτάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, και για κάθε τέτοιο συνδυασμό, την τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης π.

Πίνακας εφαπτόμενων ακμών (incidence matrix)

Του γραφήματος Γ με ν και μ κορυφές είναι ένας πίνακας A διαστάσεων $\nu x \mu$, του οποίου η γραμμή i, $1 \leq i \leq \nu$, αντιστοιχεί στην κορυφή v_i και η στήλη j, $1 \leq j \leq \mu$ αντιστοιχεί στην ακμή e_j. Το στοιχείο $A[i, j]$ του πίνακα είναι ίσο με 1, εάν και μόνο εάν η ακμή e_j εφάπτεται στην κορυφή v_i. Στην αντίθετη περίπτωση, η τιμή του $A[i, j]$ είναι 0.

Πλήρες γράφημα ν κορυφών (complete graph of ν vertices)

Συμβολίζεται K_ν, είναι απλό γράφημα με ν κορυφές για το οποίο ισχύει ότι για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $v_1, v_2 \in V$ υπάρχει μία ακμή στο E με $e = (v_1, v_2)$.

Πλήρες δυαδικό δέντρο (full binary tree)

Είναι δυαδικό δέντρο στο οποίο κάθε κορυφή έχει είτε δύο ή κανένα παιδιά.

Πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα (complete bipartite graph)

Με ν και μ κορυφές, συμβολίζεται ως $K_{\nu,\mu}$, είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα, το σύνολο κορυφών του οποίου διαμερίζεται σε δύο σύνολα κορυφών: V_1, με ν κορυφές και V_2, με μ κορυφές, τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών (v_1, v_2), με $v_1 \in V_1$ και $v_2 \in V_2$, υπάρχει μία ακμή που εφάπτεται σε αυτές.

Ποσοδείκτης (quantifier) (υπαρξιακός και καθολικός)

(Βλέπε Καθολικά και Ποσοτικά προσδιορισμένη έκφραση)

Πρόταση (proposition)

Έκφραση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ψευδής ή αληθής, αλλά όχι και τα δύο

Προτασιακή συνάρτηση (prepositional function)

Στο Δ είναι μια έκφραση $\Pi(X)$ σχετικά με μια μεταβλητή X, αν για κάθε X στο Δ, η $\Pi(X)$ είναι πρόταση. Το Δ καλείται πεδίο αναφοράς (domain of discourse).

Σ

Σειρά ακμών (edges in series)

Εάν ένα γράφημα Γ έχει μια κορυφή α βαθμού 2 και ακμές (β, α) και (α, γ) με $\beta \neq \gamma$, οι ακμές (β, α) και (α, γ) λέγεται ότι βρίσκονται σε σειρά.

Συγγενείς κορυφές (relative vertices)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Σύζευξη προτάσεων (conjunction)

π και ρ συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi \wedge \rho}$ και διαβάζεται «π και ρ».

Συμμετρική (symmetric)

Καλείται σχέση επί συνόλου X, αν για κάθε χ, ψ στο X, ισχύει ότι αν $(\chi, \psi) \in \Sigma$, τότε και $(\psi, \chi) \in \Sigma$.

Συνάρτηση (function)

f από σύνολο X σε σύνολο Y, συμβολίζεται και ως $f{:}X \rightarrow Y$, είναι μια σχέση από το X στο Y με τις ακόλουθες ιδιότητες: Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο X και, αν $(\chi, \psi) \in f$ και $(\chi, \psi') \in f$, τότε $\psi = \psi'$.

Συνδεόμενο (connected)

Γράφημα $\Gamma = (V, E)$, εάν για κάθε ζευγάρι κορυφών v_1, v_2 στο V υπάρχει ένα μονοπάτι από τη v_1 στη v_2.

Συνδετικό δέντρο (spanning tree)

Υπό – γράφημα τ γραφήματος Γ που είναι δέντρο και περιέχει όλες τις κορυφές του Γ.

Σύνθετες προτάσεις (composite propositions)

Προτάσεις που προκύπτουν από το συνδυασμό απλούστερων προτάσεων. Προτάσεις που δεν είναι σύνθετες καλούνται **απλές**.

Σύνθεση σχέσεων (composition of relations)

Σ_1 από σύνολο X σε σύνολο Y και Σ_2 από το σύνολο Y σε σύνολο Z, συμβολίζεται $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, είναι σχέση από το X στο Z που ορίζεται ως εξής: $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \{(\chi, \varphi) \mid (\chi, \psi) \in \Sigma_1$ και $(\psi, \varphi) \in \Sigma_2$, για κάποιο ψ στο $Y\}$

Τ

Ταυτολογία

Μία πρόταση που είναι πάντοτε αληθής,

Τερματική κορυφή (terminal vertex, leaf)

(Βλέπε Ορισμό 5.5)

Τμήμα γραφήματος (part of graph)

Γ που περιέχει κορυφή v αυτού καλείται υπο–γράφημα του Γ που αποτελείται από όλες τις ακμές και κορυφές που ανήκουν σε οποιοδήποτε μονοπάτι που ξεκινάει από την v.

Υ

Υπαρξιακά προσδιορισμένη (existentially quantified)

Έκφραση της μορφής [$\exists X, \Pi(X)$] και διαβάζεται «υπάρχει $X, \Pi(X)$» ή «για κάποιο $X, \Pi(X)$». Το σύμβολο $\exists$ καλείται **υπαρξιακός ποσοδείκτης**

Υπό–γράφημα (sub–graph)

Γραφήματος $\Gamma = (V, E)$ καλείται γράφημα $\Gamma' = (V', E')$ εάν,

$$V' \subseteq V,$$

$$E' \subseteq E \text{ και}$$

για κάθε $e \in E'$, η e εφάπτεται σε δύο κορυφές που ανήκουν στο V'.

Υπό–δέντρο (sub–tree)

Δέντρου τ με ρίζα την x είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{w \mid w$ απόγονος της $x\}$ και σύνολο ακμών $E = \{e \mid e$ είναι ακμή σε ένα απλό μονοπάτι από τη x σε κάποια κορυφή του $V\}$.

Υποθετική πρόταση (conditional proposition)

Συμβολίζεται $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$ και διαβάζεται «Αν π, τότε ρ».

Ύψος δέντρου (tree height)

Είναι ο μεγαλύτερος αριθμός επίπεδου κορυφής στο δέντρο.

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

ΔΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

[1] Johnsonbaugh, P. «Essential Discrete Mathematics», Machmillan N.Y. 1987.

[2] Liu C.L «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών» (Κ. Μπους, Δ. Γραμμένος, Θ. Φειδάς, Α. Λαυρέντζος) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

[1] Deo N. «Graph Theory and Applications to Engineering and Computer Science», Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[2] Bondy J.A. and U.S.R. Murty «Graph Theory with Applications» American Elsevier Publishing Company, New York, 1976.

[3] Dijkstra E.N. «A Note on two Problems in Connexion with Graphs» Numerische Mathematik, 1:269 – 271 (1959)

[4] Harary F. «Graph Theory», Addison – Wesley Publishing Company, Reading Mass 1969

[5] Wilson R.J., «Introduction to Graph Theory» Academic Press N.Y. 1972.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ – ΔΟΜΕΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

[1] Knuth D.E. «The Art of Computer Programming», Vol. 3. Sorting and Searching» Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass, 1973.

[2] Knuth D.E. «Optimum Binary Search Trees» Acta Informatica 1:14 – 25 (1971)

[3] Knuth D.E., «The Art of Computer Programming», Vol 1: Fundamental Algorithms, 2nd Ed, Addison – Wesley, Reading Mass 1973.

[4] Aho A.V., J.E.Hopcroft and J.D.Ullman «The Design and Analysis of Computer Algorithms», Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass 1974.

[5] Aho A.V., J.E.Hopcroft and J.D.Ullman «Data Structures and Algorithms» Addison Wesley Publishing Company, Reading Mass 1983.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, ΛΟΓΙΚΗ, ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

[1] Halmos P. «Naïve Set Theory», D.Van Nostrand Company, Princeton, N.J. 1960.

[2] Nilsson N.J. «Problem Solving Methods in A.I.», McGraw Hill N.Y. 1971

[3] Polya G. «Introduction and Analogy in Mathematics» Princeton University Press, Princeton N.J., 1954.

[4] Bode G. «The Laws of Thought» reprinted by Dover New York, 1951.