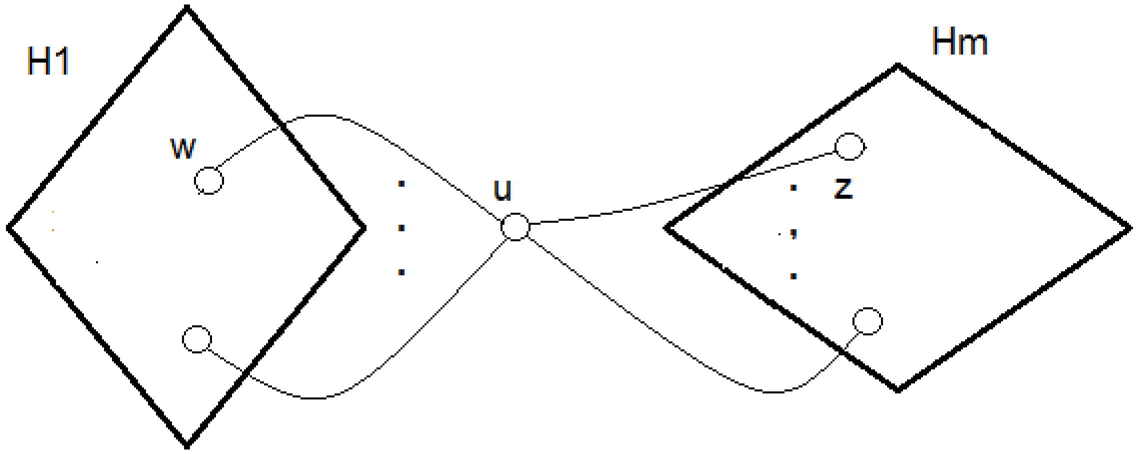
Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με κομβικό u :

H1 . . . Hm , m ≥ 2 , συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους



H1 ... Hm οι συνεκτικές συνιστώσες του **G – u**

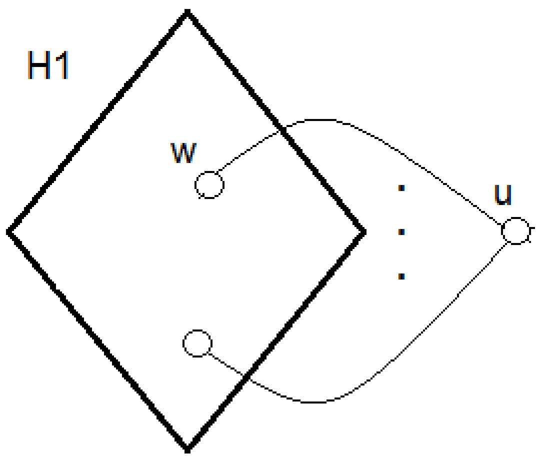
ΘΕΩΡΗΜΑ Ύπαρξη μη-κομβικών σημείων

Κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, έχει δύο (τουλάχιστον) κορυφές που δεν είναι κομβικά σημεία:

Τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού θα είναι μη-κομβικά.

Γενική μορφή συνεκτικού μη-κατευθ/νου γραφήματος G με *μη-κομβικό* u :

H1 συνεκτικό



u *μη-κομβικό* στο G , H1 = G – u

Μαθηματική επαγωγή για *συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα* γραφήματα

1) Για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$: $|E| \geq |V| - 1$.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (1) :

$\boldsymbol{\Pi}$(n) = { *για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα* $G = (V, E)$ με $|V| = n$ κορυφές: $|E| \geq |V| - 1$ } , $n \geq 1$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 1$, $\boldsymbol{\Pi}$(n) .

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύει $\Pi(1)$

Επαγωγικό βήμα:

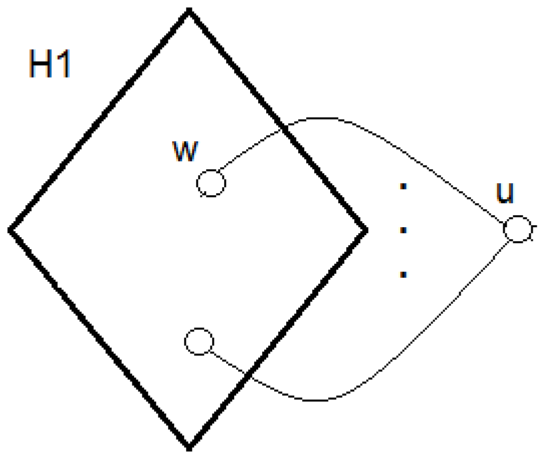
Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 1$: αληθεύει ότι $\Pi(K)$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : **αληθεύει ότι $\boldsymbol{\Pi}(K+1)$**

$\boldsymbol{\Pi}(K+1)$ = { *για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα* $G = (V, E)$ με $|V| = K+1$ κορυφές: $|E| \geq |V| - 1$ }

$\Pi(K)$ = { *για κάθε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα* $G = (V, E)$ με $|V| = K$ κορυφές: $|E| \geq |V| - 1$ }

G



H1 συνεκτικό

Έστω: G = (V, E) <u>τυχαίο</u> συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα
με **|V| = K+1** κορυφές.

i G = H1 ∪ { { u , w } , ... }

ii H1 = (V1 , E1) όπου 1 ≤ |V1| = K % από ορισμό του H1

|E1| ≥ |V1| – 1 % από υπόθεση για K

iii |E| ≥ |E1| + 1 % u δεν ανήκει στο H1

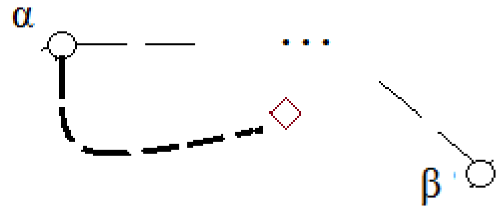
≥ (|V1| – 1) + 1

= |V1| = |V| – 1 % u δεν ανήκει στο H1

Ιδιότητες των άκυκλων γραφημάτων

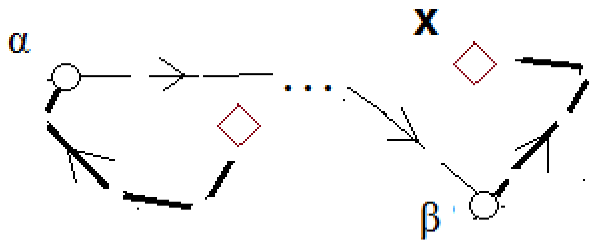
Έστω $\mu = (\alpha , \dots \beta)$ ένα *μη-επεκτάσιμο μονοπάτι* του άκυκλου γραφήματος G :

i Άν το G είναι μη-κατευθυνόμενο, οι κορυφές α , β θα έχουν βαθμό 1 στο G.



Το α θα είναι μη-κομβικό: άν υπάρχουν δύο διαφορετικές ακμές με άκρο το α , θα υπάρχει κύκλος που τις περιέχει.

ii Άν το G είναι κατευθυνόμενο, η κορυφή α θα έχει έσω-βαθμό 0 στο G , και η κορυφή β θα έχει έξω-βαθμό 0 στο G .

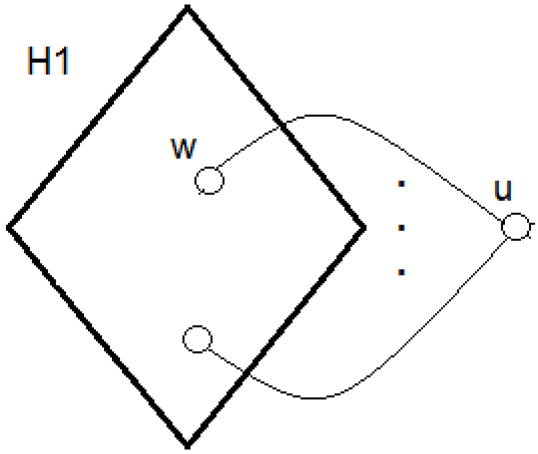


Μια (υποθετική) κορυφή όπως η x θα πρέπει να ανήκει στο μονοπάτι μ (αλλοιώς το μ θα επεκτεινόταν από το άκρο β) : άρα η ακμή (β, x) θα βρισκόταν σε κύκλο.

ΔΕΝΤΡΟ Ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα T ονομάζεται <u>δέντρο</u>, όταν είναι *άκυκλο και συνεκτικό*.

Γενική μορφή συνεκτικού γραφήματος G :

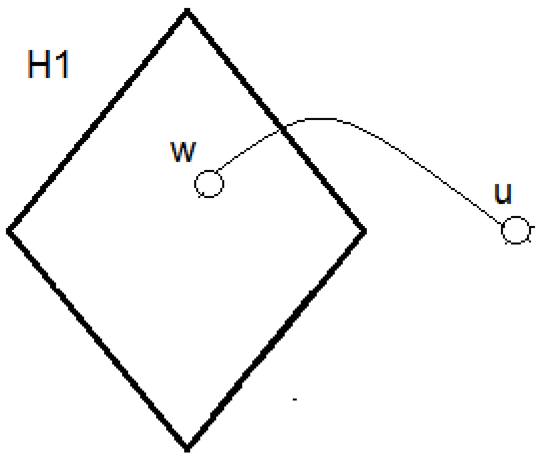
H1 συνεκτικό



u *μη-κομβικό* στο G , H1 = G – u

Γενική μορφή συνεκτικού *άκυκλου* γραφήματος T :

H1 συνεκτικό άκυκλο



u *μη-κομβικό* στο T , H1 = T – u

Μαθηματική επαγωγή ***για δέντρα***

2) Για κάθε δέντρο $T = (V, E)$: $|E| = |V| - 1$.

Παραμετροποίηση της ιδιότητας (2):

$\boldsymbol{\Pi}$(n) = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$
με $|V| = n$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ } , $n \geq 1$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 1$, $\boldsymbol{\Pi}$(n) .

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύει $\Pi(1)$

Επαγωγικό βήμα:

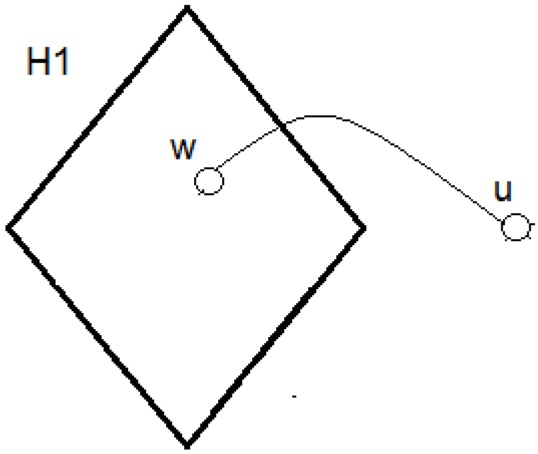
Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 1$: αληθεύει ότι $\Pi(K)$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : **αληθεύει ότι $\boldsymbol{\Pi}$(K+1)**

$\boldsymbol{\Pi}$**(K+1)** = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$
με $|V| = K+1$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

$\Pi(K)$ = { *για κάθε δέντρο* $T = (V, E)$
με $|V| = K$ κορυφές: $|E| = |V| - 1$ }

T



H1 δέντρο

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με $|V| = K+1$ κορυφές.

i $T = H1 \cup \{ \{ u , w \} \}$

ii $H1 = (V1 , E1)$ όπου $1 \leq |V1| = K$ % από ορισμό του H1

$|E1| = |V1| - 1$ % από υπόθεση για K

iii $|E| = |E1| + 1$ % u δεν ανήκει στο H1

$= (|V1| - 1) + 1$

$= |V1| = |V| - 1$ % u δεν ανήκει στο H1

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Επιβεβαιώστε ή βρείτε αντιπαράδειγμα για το ότι:

α Άν το G είναι συνεκτικό και |E| = |V| – 1 , το G θα είναι άκυκλο.

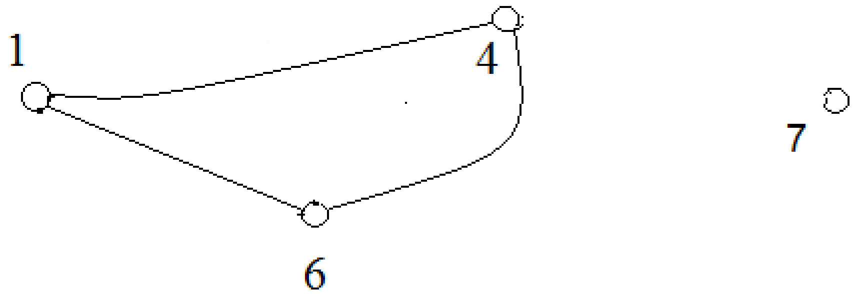
Άν στο G υπάρχει ένας κύκλος, μπορούμε να αφαιρέσουμε μία (τυχαία) ακμή e του κύκλου.
Επειδή η e δεν είναι γέφυρα του G : το G – e θα είναι συνεκτικό, επομένως |E| – 1 ≥ |V| – 1 .

β Άν το G είναι άκυκλο και |E| = |V| – 1 , το G θα είναι συνεκτικό.

Άν το G έχει K συνεκτικές συνιστώσες: |E| = |V| – K .

γ Άν |E| ≥ |V| – 1 , το G θα είναι συνεκτικό.

δ Άν |E| = |V| – 1 , το G θα είναι άκυκλο.



3) Για κάθε δέντρο T = (V, E) :
Υπάρχει τρόπος να *χρωματιστούν* οι κορυφές του T *με δύο χρώματα* κ, λ, ώστε:
τα άκρα οποιασδήποτε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα.

<u>*Παραμετροποίηση*</u> της ιδιότητας (3):

Π(n) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με |V| = n κορυφές:
υπάρχει χρωματισμός του T με τα χρώματα κ, λ } , $n \geq 1$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:
Για κάθε $n \geq 1$, ***Π***(n) .

Αρχική περίπτωση:
<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> αληθεύει *Π*(1) :
Η μοναδική κορυφή του T χρωματίζεται με το λ .

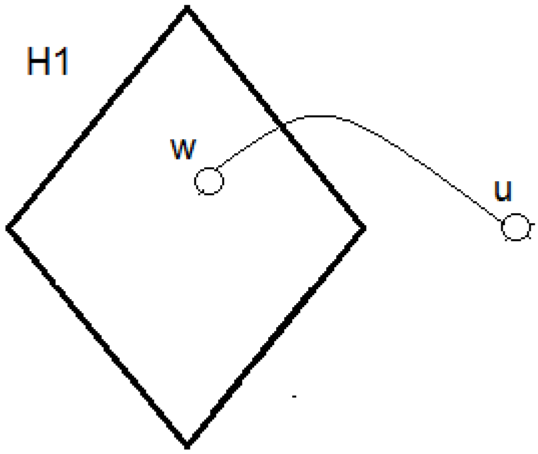
Επαγωγικό βήμα:
<u>Υποθέτουμε ότι</u> <u>για κάποιο τυχαίο</u> $K \geq 1$: αληθεύει ότι *Π*(K)

<u>Ελέγχουμε ότι</u> <u>για το παραπάνω</u> K : **αληθεύει ότι *Π*(K+1)**

***Π*(K+1)** = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με |V| = K+1 κορυφές:
υπάρχει χρωματισμός του T με τα χρώματα κ, λ }

Π(K) = { *για κάθε δέντρο* T = (V, E) με |V| = K+1 κορυφές:
υπάρχει χρωματισμός του T με τα χρώματα κ, λ }

T



H1 δέντρο

Έστω: T = (V, E) <u>τυχαίο</u> δέντρο με |V| = K+1 κορυφές.

i T = H1 ∪ { { u , w } }

ii H1 = (V1 , E1) όπου 1 ≤ |V1| = K % από ορισμό του H1

Υπάρχει χρωματισμός του H1 με τα χρώματα κ, λ

% από υπόθεση για K

iii **Η κορυφή u μπορεί να χρωματιστεί διαφορετικά από ότι η κορυφή w**

% u δεν ανήκει στο H1

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Γράψτε μία συνάρτηση χ(T) που να υπολογίζει με αναδρομή, για κάθε δεδομένο δέντρο T , έναν χρωματισμό του T με δύο χρώματα κ, λ .