Αναδρομικός υπολογισμός συναρτήσεων *με ακέραιο όρισμα*

1) *square*(n) =: *square*(n–1) + 2(n–1) + 1
square(0) =: 0

square(n : integer)
If n > 0
then return *square*(n–1) + 2(n–1) + 1
else return 0

square(**5**) =: *square*(4)+9 =: (*square*(3)+7)+9 =: ((*square*(2)+5)+7)+9

1b) *squareb*(n : integer)
If n ≠ 0
then return *squareb*(n–1) + 2(n–1) + 1
else return 0

squareb(**–1**) =: *squareb*(–2) + (–3) =: (*squareb*(–3) + (–5)) + (–3)
=: (*squareb*(–4) + (–7)) + (–5)) + (–3)

2) *cube*(n) =: *cube*(n–1) + 3*square*(n–1) + 3(n–1) + 1
cube(0) =: 0

Επιβεβαίωση ορθότητας της αναδρομής (1) :

square(n : integer)

If $n > 0$

then return *square*(n–1) + 2(n–1) + 1

else return 0

<u>*Δήλωση*</u> *ορθότητας* της αναδρομής (1) , *για τον ακέραιο* $n \geq 0$:

Δ(n) = { ο υπολογισμός της *square*(n) τερματίζει με αποτέλεσμα n^2 }

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, **Δ(n)** .

Για κάθε $n \geq 0$, { ο υπολογισμός της *square*(n) τερματίζει με αποτέλεσμα n^2 }

Αρχική περίπτωση:

<u>Ελέγχουμε</u> <u>ότι</u> αληθεύει Δ(0)

Επαγωγικό βήμα:

<u>Υποθέτουμε ότι</u> <u>για κάποιο τυχαίο</u> $K \geq 0$: αληθεύει ότι Δ(K)

<u>Ελέγχουμε ότι</u> <u>για το παραπάνω</u> K : αληθεύει ότι Δ(K+1)

square(K+1) =:

=: square(K) + 2(K) + 1 % από ορισμό της *square*

= $K^2 + 2(K) + 1$ % από υπόθεση για το K

= $(K+1)^2$.

Ορθότητα της αναδρομής (1) :

Δ(0) : *square*(0) είναι σωστό	*Αρχική περίπτωση*
Δ(1) : *square*(1) είναι σωστό	Δ(0) & *Αναδρομικό βήμα για* K=0
Δ(2) : *square*(2) είναι σωστό	Δ(1) & *Αναδρομικό βήμα για* K=1
Δ(3) : *square*(3) είναι σωστό	Δ(2) & *Αναδρομικό βήμα για* K=2

. . .

Άρα: *για κάθε* $n \geq 0$ αληθεύει η ιδιότητα **Δ(n)** .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε την ορθότητα της αναδρομής (2) :

Χρησιμοποιώντας *μαθηματική επαγωγή*, αποδείξτε ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, { ο υπολογισμός της cube(n) τερματίζει με αποτέλεσμα n^3 }.

3) $fib(n) =: fib(n-1) + fib(n-2)$ όταν $n \geq 2$

$fib(1) =: 1$
$fib(0) =: 1$

$fib(\mathbf{4}) =: fib(3) + fib(2) =: (fib(2) + fib(1)) + (fib(1) + fib(1))$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Χρησιμοποιώντας *μαθηματική επαγωγή*, επιβεβαιώστε ότι:

Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $fib(n) \geq 1{,}6^{\,n-1}$.

<u>*Δήλωση*</u> για την συνάρτηση *fib* , *για τον ακέραιο* $n \geq 0$:

$\boldsymbol{D}(n) = \{$ για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{I}$, $0 \leq \boldsymbol{I} \leq n : fib(\boldsymbol{I}) \geq 1{,}6^{\,I-1} \}$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, $\boldsymbol{D}(n)$.

Αρχική περίπτωση:

<u>Ελέγχουμε ότι</u> αληθεύει $D(0)$

Επαγωγικό βήμα:

<u>Υποθέτουμε ότι</u> <u>για κάποιο τυχαίο</u> $K \geq 0$: αληθεύει ότι $D(K)$

$D(K) = \{$ για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{I}$, $0 \leq \boldsymbol{I} \leq K : fib(I) \geq 1{,}6^{\,I-1} \}$

<u>Ελέγχουμε ότι</u> <u>για το παραπάνω</u> K : αληθεύει ότι $D(K+1)$

$D(K+1) = \{$ για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{I}$, $0 \leq \boldsymbol{I} \leq K+1 : fib(I) \geq 1{,}6^{\,I-1} \}$

$fib(K+1) =: fib(K) + fib(K-1)$ % από ορισμό της *fib*

$\geq 1{,}6^{\,K-1} + 1{,}6^{\,K-2}$ % από υπόθεση για το K

$\geq 1{,}6^{\,K} (1{,}6^{-1} + 1{,}6^{-2})$

$\geq 1{,}6^{\,K}$ % $1{,}6^{-1} + 1{,}6^{-2} = 1{,}015625$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3

Έστω η παρακάτω Δηλώσεις για την συνάρτηση *fib*, *για τον ακέραιο* $n \geq 0$:

E1(n**)** = { $fib(n) \geq (1{,}6)^{n-1}$ } ,

E2(n**)** = { $fib(n) \geq (1{,}6)^{n-1}$ και $fib(n-1) \geq (1{,}6)^{n-2}$ } .

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, *μπορείτε* να επιβεβαιώσετε ότι

Για κάθε $n \geq 0$, **E1(**n**)** ;

Για κάθε $n \geq 0$, **E2(**n**)** ;