Για ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζουμε ***προσβασιμότητα για το* G**,
την παρακάτω σχέση R_δ με πεδίο ορισμού το σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $R_\delta(a, b) = true$ όταν:
στο G υπάρχει μία (τουλάχιστον) διαδρομή με αρχή την a και τέλος την b .

Συνεκτικό γράφημα

Ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζεται **συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_\delta(x, y) = true$.

Ένα G = (V, E) είναι **μη-συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_\delta(x, y) = false$.

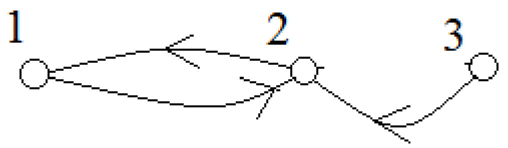
ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει *μόνο μία κορυφή*, είναι συνεκτικό.

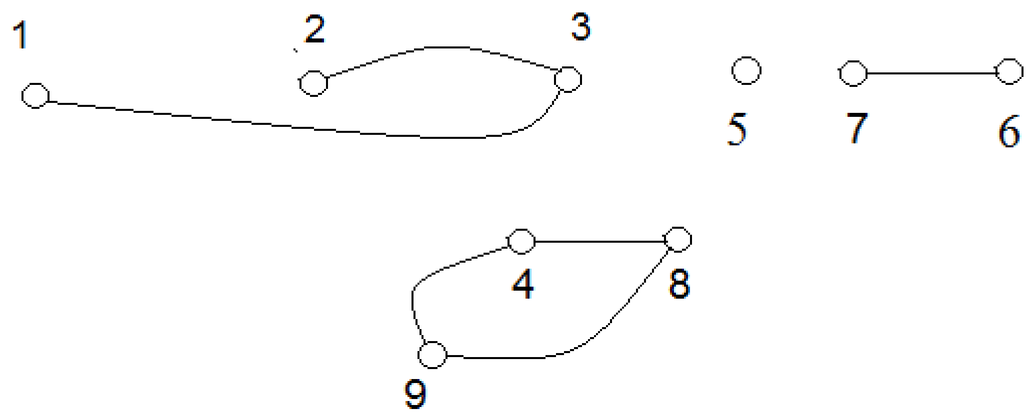
ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Βρείτε άν τα παρακάτω γραφήματα είναι συνεκτικά.

Βρείτε συνεκτικά υπο-γραφήματά τους που (i) να έχουν *όσο το δυνατό περισσότερες κορυφές*, (ii) να έχουν όσο το δυνατό περισσότερες κορυφές *και να μην έχουν την* 2.

Δ1



Z1



ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Ονομάζουμε συνεκτική συνιστώσα του G ,
ένα *επαγόμενο υπο-γράφημα* H = (W, Z) του G το οποίο:

(1) είναι συνεκτικό, **και**

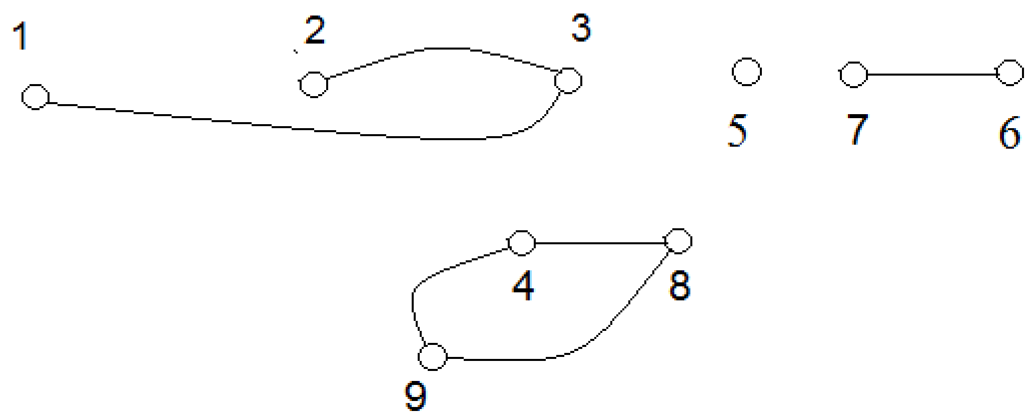
(2) δεν υπάρχει ακμή του G που να συνδέει κορυφή του W
με κορυφή εκτός του W .

ΕΡΩΤΗΜΑ 3

α Βρείτε τις *συνεκτικές συνιστώσες* του γραφήματος Z1 .

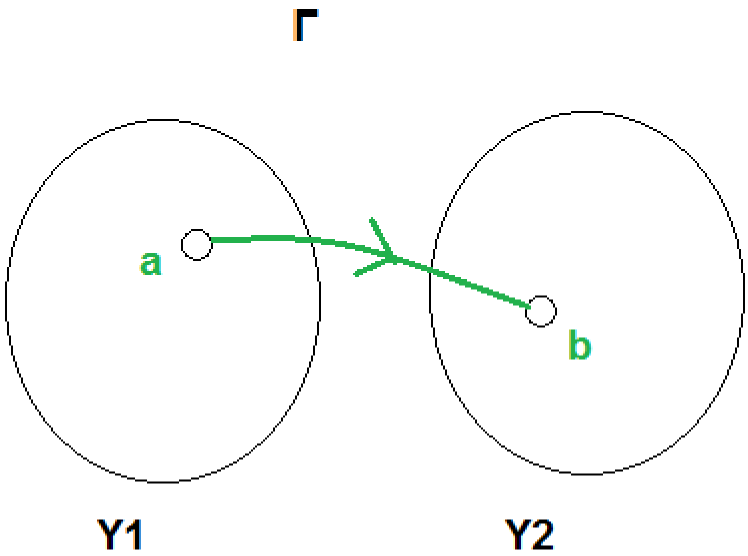
β Βρείτε τις *συνεκτικές συνιστώσες* του Z1, που *δεν περιέχουν την κορυφή* 2.

Z1



ΠΡΟΤΑΣΗ 1 Έστω Γ = (V, E) ένα *συνεκτικό* γράφημα, και Y1, Y2 δύο <u>μη-κενά</u> <u>ξένα</u> υπο-σύνολα του V ώστε **V = Y1 ∪ Y2** .

Αποδείξτε ότι: Υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του Y1 και με τέλος κορυφή του Y2.



ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G . Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι η *μοναδική* συνεκτική συνιστώσα του G .

Χρησιμοποιείστε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 1*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, και H1 , H2 δύο *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν x , y είναι κορυφές των H1 , H2 αντίστοιχα, $R_\delta(x, y) = \text{false}$.

Χρησιμοποιείστε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 1*.

β Δεν υπάρχει κοινή κορυφή των H1 , H2 . Χρησιμοποιείστε το *α* .

Άν x , y είναι κορυφές των H1 , H2 αντίστοιχα και c είναι κοινή κορυφή των H1 , H2 : από την συνεκτικότητα των H1 , H2 , $x\,\mathbf{R}_\delta\,c$ και $c\,\mathbf{R}_\delta\,y$ – και από την μεταβατικότητα της σχέσης $\mathbf{R}_\delta$ θα έχουμε $x\,\mathbf{R}_\delta\,y$, που είναι αδύνατο λόγω του α.

γ Δύο διαφορετικές κορυφές x , y του G είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G , *άν και μόνο άν* $R_\delta(x, y) = \text{true}$.

Χρησιμοποιείστε το *α* .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 1

Ι) ***Δεδομένα***

Γ = (V, E) *δεδομένο* συνεκτικό γράφημα

Y1, Y2 *δεδομένα* μη-κενά ξένα υπο-σύνολα του V ,
όπου $Y1 \cup Y2 = V$

ΙΙ) ***Ζητούμενα***

Δύο κορυφές $a \in Y1$, $b \in Y2$ που συνδέονται με ακμή:
(a, b) είτε {a, b} .

Εύρεση των ζητουμένων

Έστω κορυφές u, v του Γ όπου $u \in Y1$ και $v \in Y2$.

Επειδή το Γ είναι συνεκτικό, υπάρχει διαδρομή δ με αρχή την u και τέλος την v :
$\delta = (u , e_1 , x_1 , \ldots e_m , v)$.

Επειδή $v \in Y2$, δεν είναι όλες οι κορυφές της διαδρομής στο Y1.
Παρακολουθώντας την ακολουθία κορυφών που εμφανίζονται στην διαδρομή, εντοπίζουμε την *τελευταία* κορυφή μετά την u που ανήκει στο Y1 : έστω x_K αυτή η κορυφή. Τότε

$$\delta = (u , e_1 , x_1 , \ldots , \mathbf{x_K} , e_{K+1} , \mathbf{x_{K+1}} , \ldots e_m , v) ,$$ όπου

η ακμή e_{K+1} συνδέει τις κορυφές x_K , x_{K+1} :

$$e_{K+1} = (x_K , x_{K+1}) \text{ είτε } e_{K+1} = \{x_K , x_{K+1}\} \text{ με } \mathbf{x_K} \in Y1 , \mathbf{x_{K+1}} \in Y2 ,$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα γράφημα όπου, για οποιαδήποτε επιλογή δύο <u>μη-κενών</u> <u>ξένων</u> υπο-συνόλων $Y1, Y2$ του V ώστε $V = Y1 \cup Y2$, υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του $Y1$ και με τέλος κορυφή του $Y2$.
Αποδείξτε ότι: Το Γ θα είναι *συνεκτικό*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ι) ***Δεδομένα***

i) $\Gamma = (V, E)$ *δεδομένο* γράφημα με την ιδιότητα ότι:
για οποιαδήποτε επιλογή δύο <u>μη-κενών</u> <u>ξένων</u> υπο-συνόλων του V, $Y1, Y2$, ώστε $V = Y1 \cup Y2$, υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του $Y1$ και με τέλος κορυφή του $Y2$

ii) Δύο κορυφές $u \neq v$ του Γ

ΙΙ) ***Ζητούμενα***

Διαδρομή του Γ με αρχή την u και με τέλος την v

Εύρεση των ζητουμένων

Έστω τα υπο-σύνολα του V: $Y1 = \{u\}$, $Y2 = V - \{u\}$.
Τα $Y1, Y2$ είναι μη-κενά και ξένα, και $V = Y1 \cup Y2$.

Ενημερώνουμε *επαναληπτικά* τα $Y1, Y2$ έτσι ώστε μετά από κάθε ενημέρωση να αληθεύει ότι:

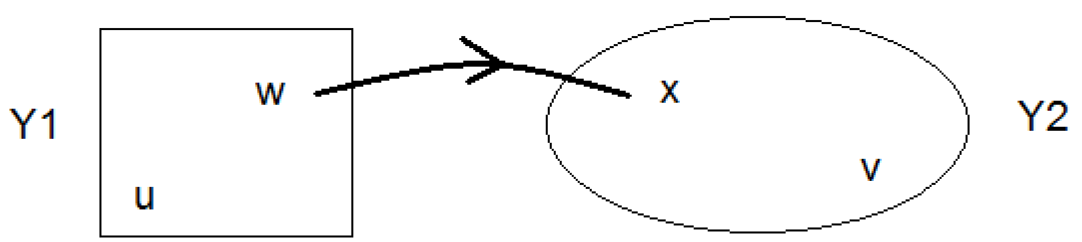
(1) τα $Y1, Y2$ παραμένουν μη-κενά και ξένα, και $V = Y1 \cup Y2$

(2) για κάθε κορυφή $z \neq u$ του $Y1$, υπάρχει διαδρομή του Γ με αρχή την κορυφή u και με τέλος την κορυφή z.

Κάθε ενημέρωση γίνεται ως εξής:

1. Επιλέγουμε ακμή του Γ (υπάρχει λόγω της δεδομένης ιδιότητας του Γ) με αρχή κορυφή w του $Y1$ και με τέλος κορυφή x του $Y2$
2. Μετακινούμε την κορυφή x από το $Y2$ στο $Y1$.

Οι ενημερώσεις σταματούν όταν $Y2 = \{v\}$.



ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ Ελέγξτε ότι μετά από κάθε ενημέρωση των $Y1, Y2$ θα αληθεύουν οι συνθήκες (1), (2).

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω V ένα σύνολο, και X1 ... Xκ , $κ \geq 1$ μία *οικογένεια υπο-συνόλων* του V . Τα σύνολα $\{ X_j \mid j = 1, \ldots κ \}$ είναι ***διαμερισμός*** του V μόνο όταν:

1 Είναι <u>μη-κενά</u> και <u>ξένα</u> μεταξύ τους, και

2 $V = X1 \cup \ldots Xκ$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Για κάθε *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ,
υπάρχει διαμερισμός X1 ... Xκ του V , όπου:

(1) Το επαγόμενο υπο-γράφημα που αντιστοιχεί σε κάθε διαμέρισμα X_j , είναι *συνεκτικό*.

(2) Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u>: $R_δ(x, y)$ = false .

Από τον *ΟΡΙΣΜΟ* της συνεκτικής συνιστώσας και το *ΕΡΩΤΗΜΑ 5* προκύπτει:

Διαμερισμός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος σε συνεκτικές συνιστώσες

Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και H1 ... Hλ , $λ \geq 1$ οι *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του G .

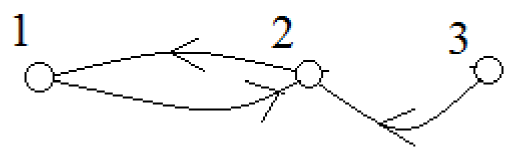
A Τα υπο-γραφήματα H1 ... Hλ του G είναι <u>*συνεκτικά*</u>, και διαμερίζουν τις κορυφές <u>*και τις ακμές*</u> του G .

Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V <u>σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες</u>: $R_δ(x, y)$ = false .

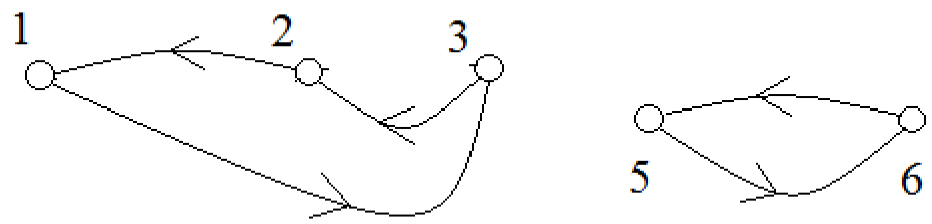
B Τα υπο-γραφήματα H1 ... Hλ του G είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών και των ακμών του G σε συνεκτικά υπο-γραφήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Μπορείτε να βρείτε διαμερισμούς σύμφωνους με το συμπέρασμα του Θεωρήματος για την προσβασιμότητα, στα παρακάτω γραφήματα;

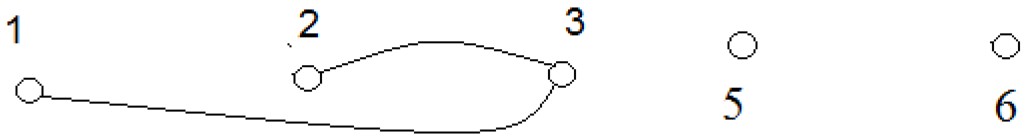
Δ1



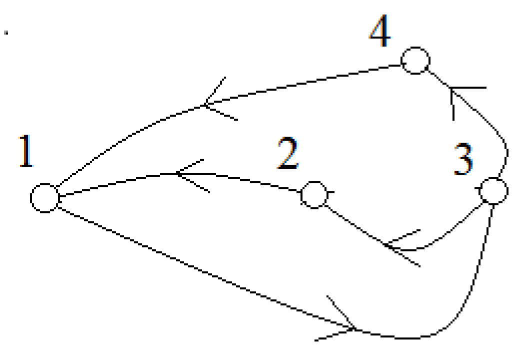
Ε1



Ζ1



Δ2



Παρατήρηση: Το Δ2 είναι *συνεκτικό*

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ,
και X1 ... Xκ ένας διαμερισμός του V όπου:

Δεν υπάρχει ακμή {x, y} του G
που τα άκρα της να ανήκουν <u>σε διαφορετικά διαμερίσματα</u>.

Αποδείξτε ότι:

1 Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V
<u>σε διαφορετικά</u> <u>διαμερίσματα</u>, $R_\delta(x, y)$ = false .

Χρησιμοποιείστε την *ΠΡΟΤΑΣΗ 1.*

2 Άν Θ είναι ένα συνεκτικό υπο-γράφημα του G :
Οι κορυφές του Θ θα βρίσκονται όλες στο ίδιο διαμέρισμα.

Άν το G είναι συνεκτικό: θα έχουμε κ = 1
(το μοναδικό σύνολο τού διαμερισμού θα είναι το V) .

Χρησιμοποιείστε το *1.*

3 Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση συνεκτικών συνιστωσών του G .

Χρησιμοποιείστε το *1.*

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Έστω ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ,
και X1 ... Xκ ένας διαμερισμός του V σε μη-κενά ξένα *συνεκτικά* διαμερίσματα.

Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι <u>υπο-γράφημα κάποιας συνεκτικής συνιστώσας</u> του G .