Διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές για το* G, την παρακάτω σχέση R_κ πάνω στο σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $R_\kappa(a, b) = \text{true}$ όταν:
υπάρχει κάποιος *κύκλος* όπου εμφανίζονται οι κορυφές a, b .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι:

α Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα και κορυφές $a \neq b$,
$R_\kappa(a, b) = \text{true}$ *άν και μόνο άν* υπάρχουν *δύο μονοπάτια* με άκρα τις a, b, *χωρίς κοινές κορυφές* εκτός από τις a, b .

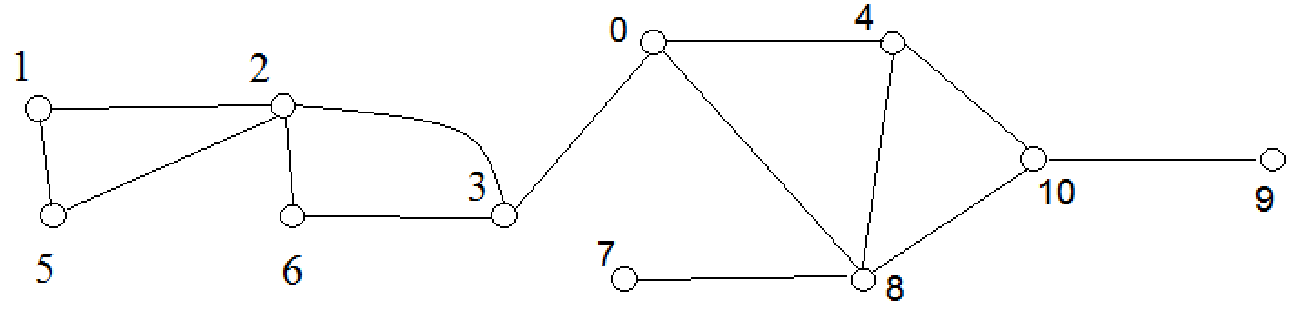
β Άν για τις κορυφές a, b αληθεύει ότι $a\, R_\kappa\, b$, θα αληθεύει και ότι $a\, R_\iota\, b$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και a ένα κομβικό σημείο του G . Επιβεβαιώστε ότι, άν οι κορυφές u, v είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - a$: $R_\kappa(u, v) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε κορυφές για τις οποίες:

α Να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.

β Να μην αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές,
αλλά να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές.



1 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) ,
η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές για το G *είναι συμμετρική*.

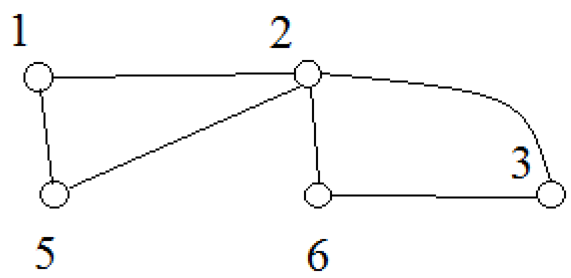
<u>Ισχύει στο V</u> : u R_κ v *implies* v R_κ u

Άν υπάρχει κάποιος κύκλος όπου εμφανίζονται οι u και v ,
ο ίδιος κύκλος θα περιέχει τις κορυφές v και u .

2 *Υπάρχουν γραφήματα* όπου *η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές* δεν είναι *μεταβατική*.

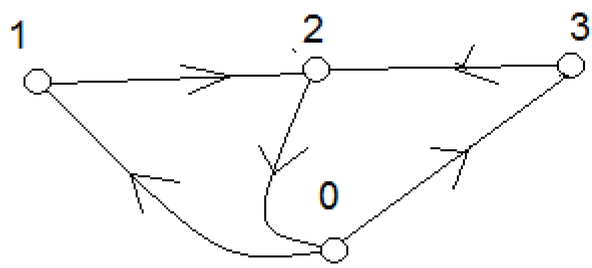
ΕΡΩΤΗΜΑ 4

α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_κ δεν είναι μεταβατική.



Αληθεύει ότι 1 R_κ 2 *and* 2 R_κ 3 Δεν αληθεύει ότι 1 R_κ 3

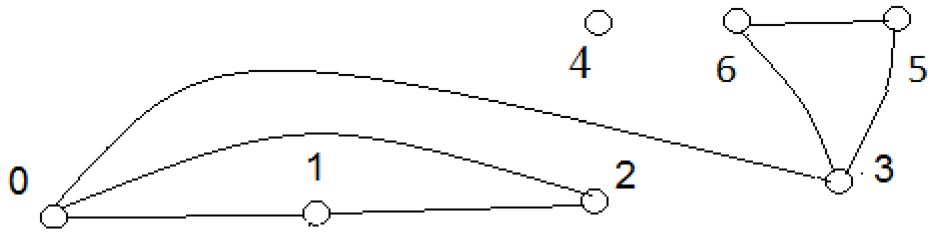
β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο *ισχυρά συνεκτικό* γράφημα
όπου η R_κ να μην είναι μεταβατική.



Αληθεύει ότι 1 R_κ 2 *and* 2 R_κ 3 Δεν αληθεύει ότι 1 R_κ 3

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

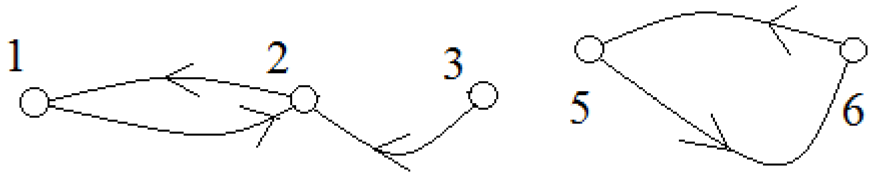
α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_κ είναι μεταβατική.



$u\ R_\kappa\ v$ άν και μόνο άν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

Άν ($u\ R_\kappa\ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v}\ R_\kappa\ w$) : είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_κ είναι μεταβατική.

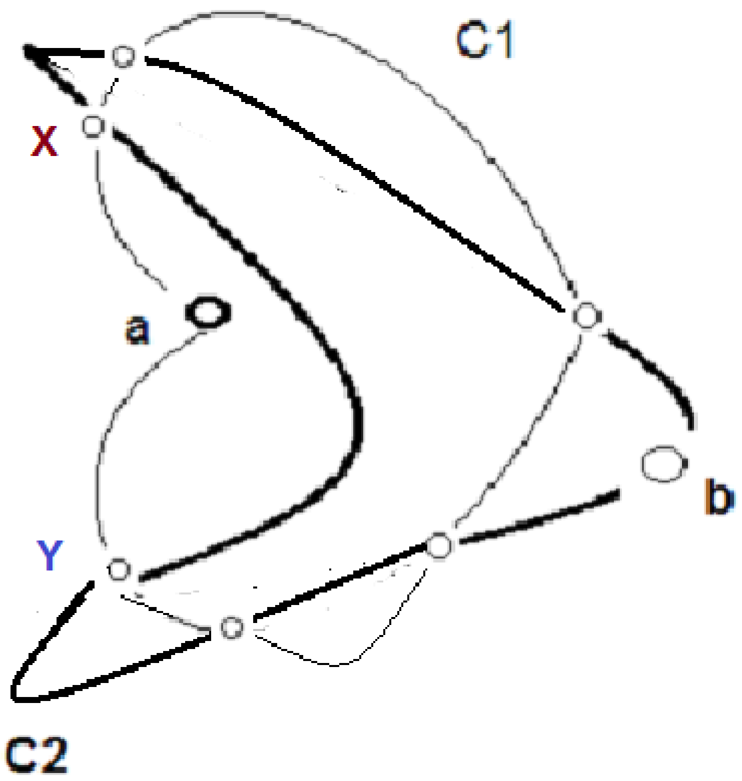


$u\ R_\kappa\ v$ άν και μόνο άν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{5, 6\}$

Άν ($u\ R_\kappa\ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v}\ R_\kappa\ w$) : είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{5, 6\}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει κύκλους C1 και C2 που έχουν *τουλάχιστον δύο* κοινές κορυφές. Επιβεβαιώστε ότι:

Για οποιεσδήποτε κορυφές $a \in C1$, $b \in C2$: $R_{\kappa}(a, b) = \text{true}$.



Αρχίζοντας από το **a** ακολουθώ τον **C1** *δεξιόστροφα*:
έστω **X** η πρώτη κορυφή του **C2** που συναντώ.

Αρχίζοντας από το **a** ακολουθώ τον **C1** *αριστερόστροφα*:
έστω **Y** η πρώτη κορυφή του **C2** που συναντώ.

Έστω μ1 το μονοπάτι (X , ... a , ... Y) που κατασκευάζεται από τον C1 .

Έστω μ2 το μονοπάτι (Y , ... b , ... X) που κατασκευάζεται από τον C2 .

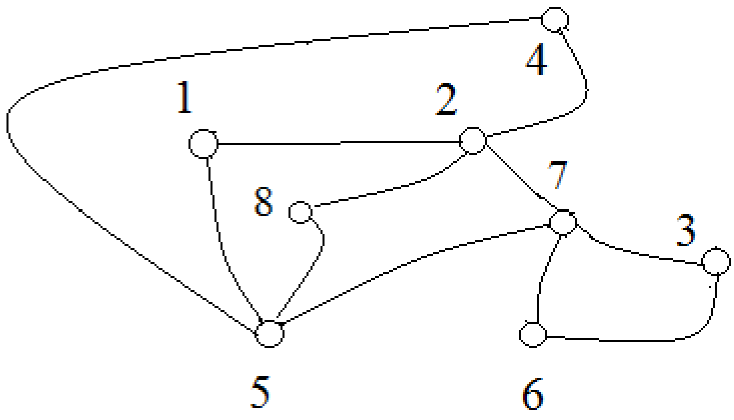
Από τα μ1 , μ2 κατασκευάζω τον κύκλο (X , ... a , ... Y , ... b , ... X) .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα
και C1 . . . Cn μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος Cj
έχει *δύο τουλάχιστον* κοινές κορυφές με τον κύκλο C(j+1) .

Άν η κορυφή u βρίσκεται στον C1 και η κορυφή v στον Cn :
θα είναι $R_{\kappa}(u, v)$ = true .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε τα ζεύγη κορυφών
για τα οποία αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.



Γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) ονομάζεται
δισυνεκτικό ως προς κορυφές *μόνο όταν*:
Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_κ(x, y)$ = true .

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E)
είναι **μη- δισυνεκτικό ως προς κορυφές** *μόνο όταν*:
Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_κ(x, y)$ = false .

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει
μόνο μία κορυφή, είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

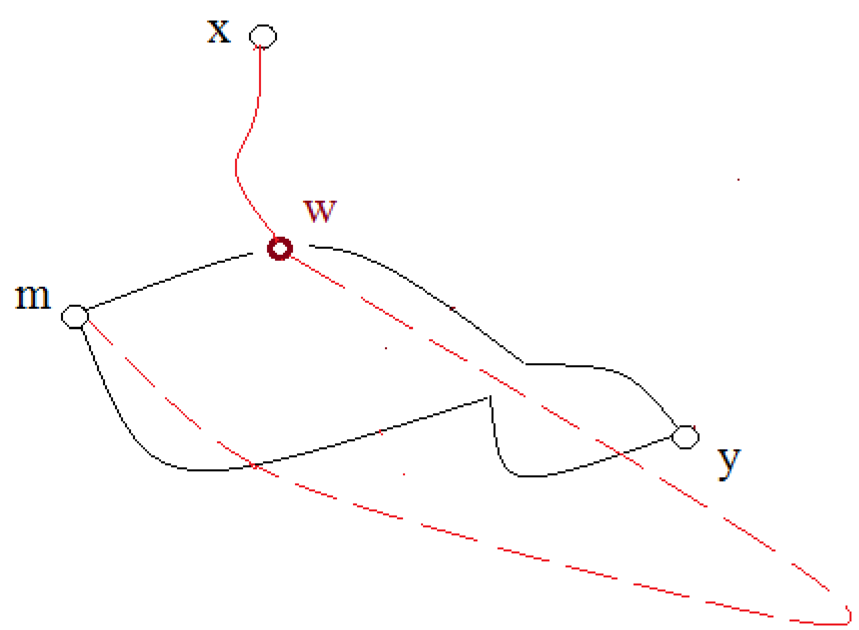
ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα
που έχει *κομβικό σημείο* δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 1

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα
και C1 . . . Cn μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος Cj
έχει *δύο τουλάχιστον* κοινές κορυφές με τον κύκλο C(j+1) :

Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των C1 . . . Cn ,
είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10   Το γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές,
και x , m , y είναι *διαφορετικές* κορυφές του G . Να κατασκευαστεί
ένα μονοπάτι του G , με άκρα τις x , y , που να περιέχει την m .



C   ένας κύκλος που περιέχει τις **m** , **y**
μ   ένα μονοπάτι από την **x** στην **m** , που *δεν περιέχει* την **y**
w   η *πρώτη* κορυφή του **μ** που ανήκει και στον **C**

<u>μονοπάτι</u> **N** : ακολουθώ το **μ** από την **x** ως την **w** ,
και συνεχίζω μέσω του **C** , από την **w** προς την **m** και μετά ως την **y**

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και C ένας κύκλος που έχει *δύο τουλάχιστον* κοινές κορυφές με το G .

α Άν η κορυφή u βρίσκεται στο G και η κορυφή v στον C : θα είναι $R_\kappa(u, v) = true$.

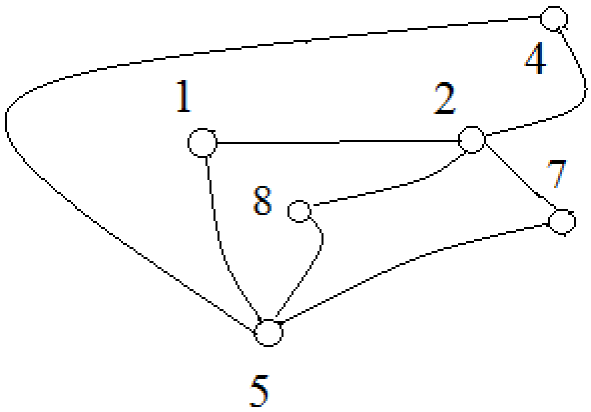
β Το γράφημα που αποτελείται από την ένωση των G , C είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 11 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που *είναι* η ένωση των κύκλων C1 . . . Cn , όπου κάθε κύκλος Ck έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο C(k+1) .

Χρησιμοποιώντας το *ΘΕΩΡΗΜΑ 2* επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

G



Επιβεβαιώστε ότι στο G δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει όλες τις κορυφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΛΥΨΗΣ *ΓΙΑ ΤΗΝ* $R_κ$

Για κάθε μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G = (V, E) :

Υπάρχει κάλυψη του V με μη-κενά σύνολα X1 ... Xκ , κ ≥ 1 , όπου:

(1) V = X1 ∪ ... ∪ Xκ ,

(2) Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :

όταν υπάρχει σύνολο *που περιέχει τα* x, y, $R_κ(x, y)$ = true

όταν δεν υπάρχει σύνολο *που περιέχει τα* x, y, $R_κ(x, y)$ = false

ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Βρείτε κάλυψη για την $R_κ$ σε καθένα από τα παρακάτω γραφήματα.