**Δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές μη-κατευθυνόμενου γραφήματος**

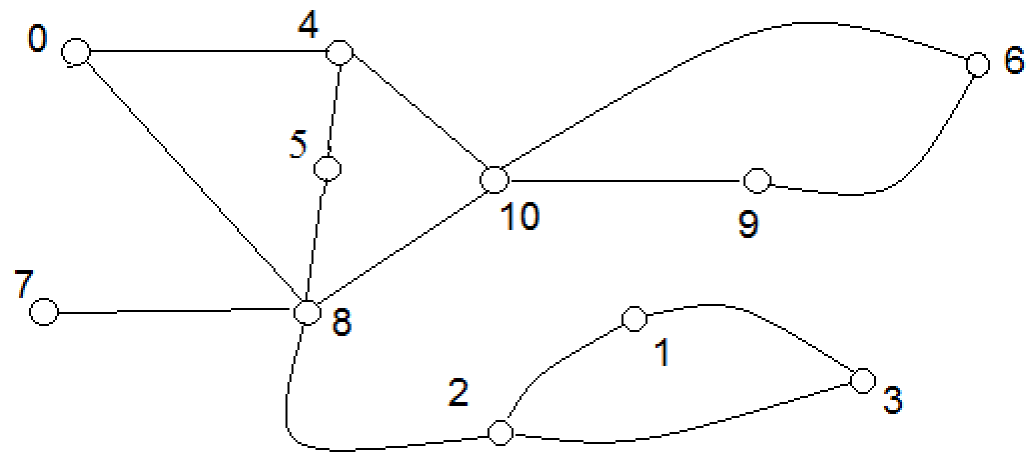
Ένα *επαγόμενο* υπο-γράφημα H = (W, K) ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G ονομάζεται <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> του G *μόνο όταν*:

Είτε: για κάποια <u>ακμή</u> e του G που <u>δεν είναι γέφυρα</u>,
K = { e } ∪ { e′ | υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις <u>ακμές</u> e , e′ } ,
W = { u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K } ,

Είτε: για κάποια <u>κορυφή</u> u του G που <u>δεν περιέχεται σε κύκλο</u>,
H = ( {u} , ∅ )

***ΕΡΩΤΗΜΑ 1*** Βρείτε τα υπο-γραφήματα του γραφήματος Γ που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές.

**Γ**




***ΕΡΩΤΗΜΑ 2*** Για κάθε κορυφή u του παραπάνω γραφήματος Γ , βρείτε το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του Γ με σύνολο κορυφών δ(u) :

$\delta(u) = \{ u \} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, R_\kappa \, x \}$ .

δ(0) = δ(4) = δ(5) = δ(8) = {0, 4, 5, 10, 8}

δ(10) = {0, 4, 5, 10, 8} ∪ {10, 9, 6}

δ(6) = δ(9) = {10, 9, 6}

**Η σχέση $S_\kappa$ μεταξύ ακμών**

Για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$
ορίζουμε την παρακάτω σχέση $S_\kappa$ πάνω στο σύνολο $E$ :

> Για $e \in E$ , $e' \in E$ , $S_\kappa(e , e') = true$ όταν:
> υπάρχει κάποιος *κύκλος* όπου εμφανίζονται οι ακμές $e$ , $e'$ .

**1** *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* $G = (V, E)$ ,
*η σχέση* $S_\kappa$ *για το* $G$ *είναι συμμετρική.*

**2** *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* $G = (V, E)$ ,
*η σχέση* $S_\kappa$ *για το* $G$ *είναι μεταβατική.*

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1*

Έστω $G$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι
δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και $e$ , $e'$ δύο ακμές του $G$ :
θα είναι $S_\kappa(e , e') = true$ .

**Κάλυψη με δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές**

Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, $H(u1)$ ... $H(u\lambda)$ , $\lambda \geq 1$
οι δισυνεκτικές συνιστώσες του $\Gamma$ ως προς κορυφές.

**Α** Τα υπο-γραφήματα $H(u1)$ ... $H(u\lambda)$ είναι <u>*δισυνεκτικά ως προς κορυφές*</u>,
και καλύπτουν τις κορυφές <u>*και τους κύκλους*</u> του $\Gamma$ .
Κάθε κύκλος του $\Gamma$ περιέχεται σε ένα μόνο από τα $H(u1)$ ... $H(u\lambda)$ .

**Β** Τα υπο-γραφήματα $H(u1)$ ... $H(u\lambda)$ είναι η *μοναδική* κάλυψη
των κορυφών *και των κύκλων* του $G$ , με υπο-γραφήματα
που είναι *δισυνεκτικά ως προς κορυφές*.

***ΕΡΩΤΗΜΑ 3*** Έστω ότι το υπο-γράφημα H ενός γραφήματος G είναι <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> του G . Επιβεβαιώστε ότι:

*α* Το H θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

*β* Άν το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, θα είναι H = G
(το G θα είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς κορυφές).

***ΕΡΩΤΗΜΑ 4*** Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, x , y δύο διαφορετικές κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

*α* Υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G που να περιέχει τις x , y , *άν και μόνο άν* $x \, R_\kappa \, y$ .

*β* Οι (μη-τετριμμένες) δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές του G διαμερίζουν τις ακμές που δεν είναι γέφυρες.

***ΕΡΩΤΗΜΑ 5*** Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε κορυφή u που δεν είναι κομβικό σημείο ενός γραφήματος G , το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του G με κορυφές $\delta(u) = \{u\} \cup \{ x \mid \text{αληθεύει ότι } u \, R_\kappa \, x \}$
θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .

## Αναδρομικός υπολογισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς κορυφές

Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και e1 ... ek , $k \geq 0$ *οι γέφυρες* του G .

**1** Έστω Θ το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το Γ τις ακμές e1 ... ek : υπολογίζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες του Η , έστω Θ1 ... Θm , $m \geq 0$ .

**2 a** Κάθε γράφημα Θk που δεν έχει κομβικό σημείο, είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Γ .
*Ειδική περίπτωση*: το Θk μπορεί να αποτελείται από μία κορυφή μόνο.

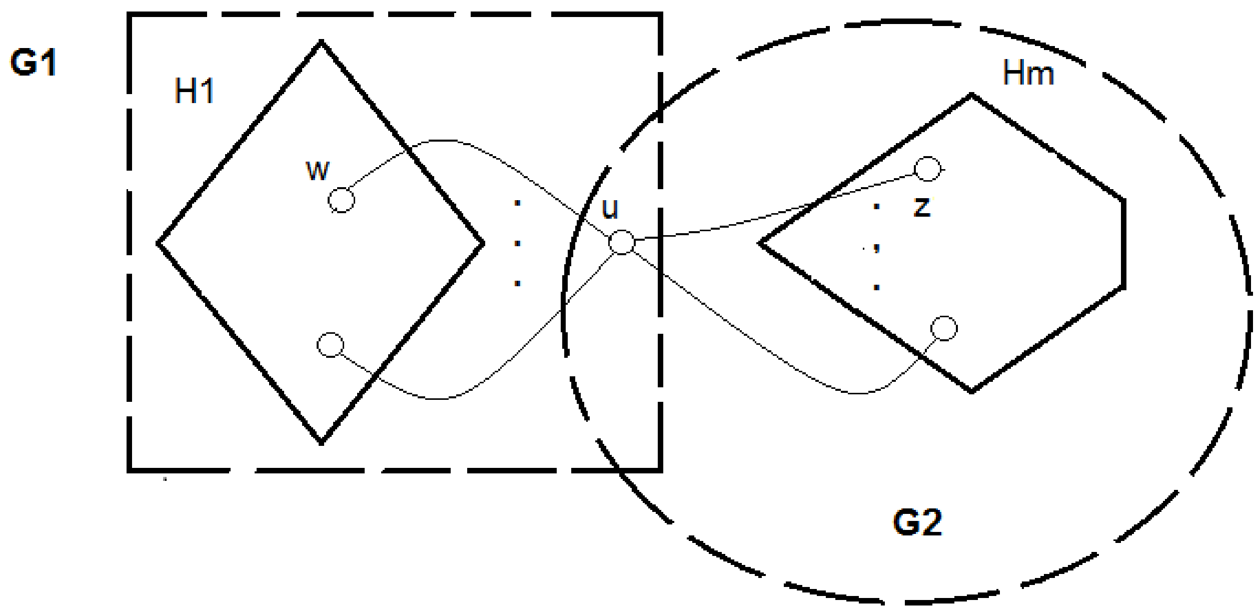
**b** Για κάθε γράφημα Θk που έχει ένα κομβικό σημείο u :
Έστω H1 = (V1 , E1) , ... Hm = (Vm , Em) , $m \geq 2$ ,
οι συνεκτικές συνιστώσες του Θk – u . Θέτουμε:

$X1 = V1 \cup \{u\}$ ,

G1 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X1

$X2 = V2 \cup ... \cup Vm \cup \{u\}$ ,

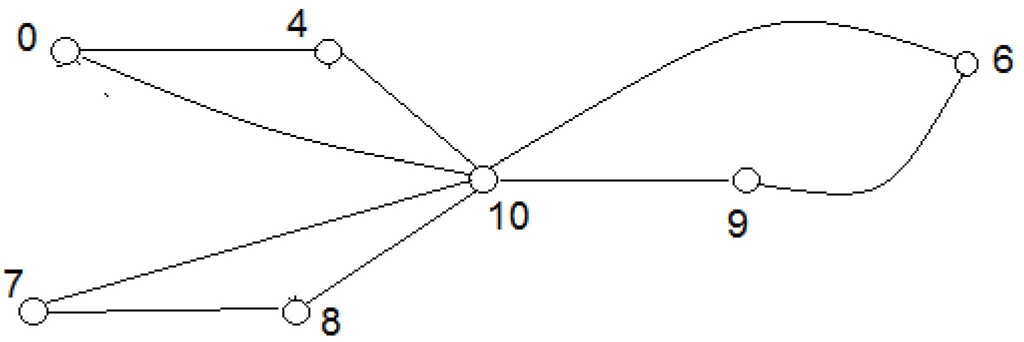
G2 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X2

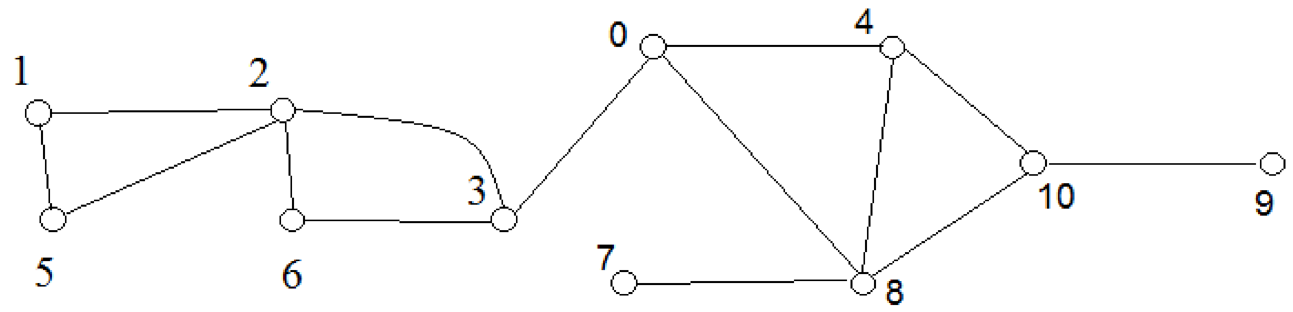



**i** Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk , θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές *ενός μόνο* από τα G1 , G2 .

**ii** Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές, είτε του G1 είτε του G2 , θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk .

***ΕΡΩΤΗΜΑ 6*** Για καθένα από τα παρακάτω γραφήματα, βρείτε όλα τα υπο-γραφήματά του που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του ως προς κορυφές.




***ΕΡΩΤΗΜΑ 7*** Επιβεβαιώστε ότι:

*α* Άν H1 , H2 είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος G , και u μία κοινή κορυφή των H1 , H2 : η u θα είναι κομβικό σημείο του G .

*β* Άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα δεν έχει κομβικό σημείο, θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

***ΕΡΩΤΗΜΑ 8*** Επιβεβαιώστε ότι:

*α* Άν τα γραφήματα G1 , G2 είναι δισυνεκτικά ως προς κορυφές και έχουν τουλάχιστον δύο κοινές κορυφές: το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

*β* Άν τα γραφήματα H1 , H2 είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος G : τα H1 , H2 δεν μπορούν να έχουν δύο (ή περισσότερες) κοινές κορυφές.

***ΕΡΩΤΗΜΑ 9*** Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να είναι η σχέση $R_\kappa$ μεταβατική στο G .

***ΕΡΩΤΗΜΑ 10*** Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να ταυτίζονται οι σχέσεις $R_\kappa$ , $R_\iota$ στο G .