ΘΕΩΡΗΜΑ

΄Ενα μη-κατευθυνόμενο γράφημα Η είναι το <u>άθροισμα κάποιων κύκλων</u>,

άν και μόνο άν το Η δεν έχει απομονωμένες κορυφές
και οι βαθμοί όλων των κορυφών του είναι άρτιοι αριθμοί,

άν και μόνο άν το Η είναι *ένωση κύκλων που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή*.

***ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ* Δ(G)**
***ΜΗ-ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ* G**

Διανύσματα Τα υπο-γραφήματα του G που:
έχουν άρτιους βαθμούς και δεν έχουν απομονωμένες κορυφές
= είναι *ένωση κύκλων του* G *που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή*
= <u>είναι άθροισμα κύκλων</u> του G

Πρόσθεση $H1 \oplus H2$

Μηδενικό διάνυσμα Το *κενό υπογράφημα* $\underline{0} = (\varnothing , \varnothing)$

$H \oplus H = \underline{0}$ $H \oplus \underline{0} = H$

Βαθμωτά $\{0 , 1\}$ με τις πράξεις $+ , \cdot$

$0+1 = 1+0 = 1$ $0+0 = 1+1 = 0$

$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Πολλαπλασιασμός βαθμωτού με διάνυσμα

$0 \cdot H = H \cdot 0 = \underline{0}$ $1 \cdot H = H \cdot 1 = H$

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι οι παρακάτω ταυτότητες ισχύουν
στον διανυσματικό χώρο του G :

$A \oplus B = B \oplus A$ *αντιμεταθετικότητα*

$A \oplus (B \oplus \Gamma) = (A \oplus B) \oplus \Gamma$ *προσεταιριστικότητα*

$(\lambda+\mu) \cdot \nu = (\lambda \cdot \nu) + (\mu \cdot \nu)$ $(\lambda+\mu) \cdot H = (\lambda \cdot H) \oplus (\mu \cdot H)$

$\lambda \cdot (H1 \oplus H2) = (\lambda \cdot H1) \oplus (\lambda \cdot H2)$

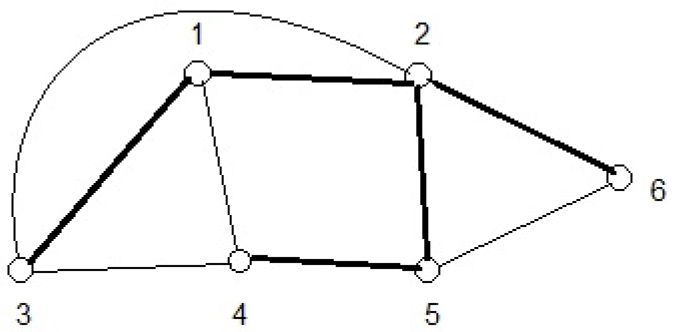
ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Ονομάζουμε ***δέντρο επικάλυψης*** ενός συνεκτικού γραφήματος G , ένα υπο-γράφημα του G που είναι *δέντρο* (συνεκτικό και άκυκλο) και *περιέχει κάθε κορυφή του* G .

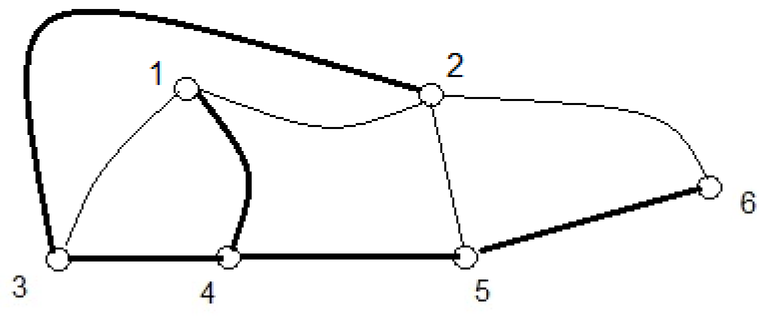
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΚΥΚΛΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΕΝΤΡΟ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

Ονομάζουμε ***χορδή*** ενός συνεκτικού γραφήματος G ***ως προς το δέντρο επικάλυψης* T** : μία ακμή του G που *δεν είναι ακμή* του T .

Ονομάζουμε ***στοιχειώδη κύκλο ως προς το δέντρο επικάλυψης* T** , ένα κύκλο του G που *περιέχει μόνο μία χορδή ως προς το* T .



Ο κύκλος (1 , {1, 4} , 4 , {4, 3} , 3 , {3, 1} , 1) δεν είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.



Ο κύκλος (1 , {1, 4} , 4 , {4, 3} , 3 , {3, 1} , 1) είναι στοιχειώδης ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ
ΜΗ-ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ G

Έστω G = (V, E) ένα συνεκτικό γράφημα:

α Άν το T είναι ένα δέντρο επικάλυψης του G , και e είναι μία χορδή του G ως προς το T : θα υπάρχει *ακριβώς ένας* κύκλος του G που είναι στοιχειώδης ως προς το T και περιέχει την ακμή e .

β Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του G , υπάρχουν *ακριβώς* |E|–|V|+1 κύκλοι του G που είναι στοιχειώδεις ως προς το T .

Ανάλυση κύκλου σε άθροισμα στοιχειωδών κύκλων

Έστω c(T, e) *ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το* T *που περιέχει την χορδή* e .

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω Θ ένας κύκλος του G , και γ1 ... γn (n > 1) οι ακμές του Θ που είναι χορδές ως προς το δέντρο επικάλυψης T :

$$\Theta \;=\; c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \;\ldots\; \oplus c(T, \gamma n) \,.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του G :

Οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς το T αποτελούν *βάση* για τον διανυσματικό χώρο του G .

Ο διανυσματικός χώρος του G έχει *διάσταση* |E|–|V|+1 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1 Οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς ένα δέντρο επικάλυψης είναι *γραμμικά ανεξάρτητοι* και το πλήθος τους είναι |E|–|V|+1 .

2 Κάθε κύκλος του G αναλύεται σε άθροισμα στοιχειωδών κύκλων.

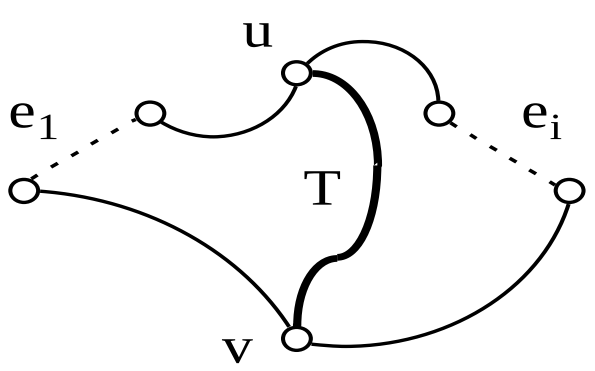
Ανάλυση κύκλου σε άθροισμα στοιχειωδών κύκλων

Έστω c(T, e) *ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το* T *που περιέχει την χορδή* e .

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω Θ ένας κύκλος του G , και γ1 ... γn (n > 1) οι ακμές του Θ που είναι χορδές ως προς το δέντρο επικάλυψης T :

$$\Theta = c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \ \ldots \ \oplus c(T, \gamma n) .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1



Αν ισχύει $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$, όπου $\{c_1,\ldots, c_k\}$ ($k\geq 2$) είναι ένα σύνολο από στοιχειώδεις κύκλους του G ως προς T, και e_l είναι η χορδή ως προς το T που διατρέχει ο στοιχειώδης κύκλος c_l, $l=1,\ldots, k$, μπορούμε να δούμε ότι οι χορδές που διατρέχει ο κύκλος c θα είναι ακριβώς οι $e_1,\ldots, e_k$. Ο λόγος είναι ότι κάθε χορδή e_l, $l=1,\ldots, k$, ανήκει σε έναν μόνο από τους $c_1,\ldots, c_k$, οπότε θα ανήκει και στο άθροισμά τους $\oplus(c_1,\ldots, c_k)=c$. Επίσης, καμμία άλλη χορδή δεν μπορεί να ανήκει στον $c=\oplus(c_1,\ldots, c_k)$, αφού δεν θα ανήκει σε κανέναν από τους $c_1,\ldots, c_k$.

Επομένως οι χορδές $e_1,\ldots, e_k$, και συνακόλουθα οι στοιχειώδεις κύκλοι $c_1,\ldots, c_k$, προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από τον κύκλο c.

Έστω $e_1,\ldots, e_n$ οι χορδές ως προς το T που διατρέχει ένας δεδομένος κύκλος c (προφανώς είναι $n\geq 1$, αφού αλλοιώς ο c θα ήταν κύκλος του T). Για $l=1,\ldots, n$, έστω c_l ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι: είτε ο κύκλος c είναι στοιχειώδης και $c=c_1$ (αν n=1), ή $c=\oplus(c_1,\ldots, c_n)$ (αν n>1).

Αρχική περίπτωση Αν n=1, ο κύκλος c διατρέχει μόνο μία χορδή, οπότε είναι στοιχειώδης και $c=c_1$.

Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι, για οποιεσδήποτε χορδές $e_1,\dots, e_m$, όπου $1\leq m<i$, αν ο c είναι κύκλος που διατρέχει τις $e_1,\dots, e_m$ (και δεν διατρέχει άλλες χορδές), και ο c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\dots, m$, τότε: είτε ο c θα είναι στοιχειώδης και $c=c_1$ (αν m=1), ή $c=\oplus(c_1,\dots, c_m)$ (αν m>1).

Έστω $e_1,\dots, e_i$ οποιεσδήποτε χορδές, και c ένας κύκλος που διατρέχει τις χορδές $e_1,\dots, e_i$ (και δεν διατρέχει άλλες χορδές). Αν αφαιρέσουμε από τον κύκλο c τις ακμές e_1 και e_i, οι κορυφές του c μαζύ με τις υπόλοιπες ακμές του σχηματίζουν δύο μονοπάτια του G. Έστω A, B τα σύνολα των κορυφών αυτών των δύο μονοπατιών. Επειδή το T είναι δέντρο επικάλυψης του G, θα περιέχει όλες τις κορυφές του G και θα είναι συνεκτικό, οπότε για οποιεσδήποτε κορυφές $a \in A$ και $b \in B$ θα υπάρχει διαδρομή του T με άκρα τις a, b. Από την Πρόταση 2.2.2, θα υπάρχει μονοπάτι $\mu=(u,\dots, v)$ του T με αρχή μία κορυφή $u \in A$ και τέλος μία κορυφή $v \in B$, χωρίς καμμία άλλη κορυφή στο $A\cup B$ (έντονη γραμμή στο σχήμα).

Η διαδρομή $\gamma_1=(u,\dots, v,\dots, e_1,\dots, u)$ είναι κύκλος, αφού η υπο-ακολουθία $(v,\dots, e_1,\dots, u)$ είναι μέρος του κύκλου c, και η υπο-ακολουθία $(u,\dots, v)=\mu$ δεν έχει κοινές κορυφές με τον c εκτός από τις u, v. Ο κύκλος γ_1 διατρέχει το πολύ $i-1$ από τις χορδές που διατρέχει ο κύκλος c, αφού η υπο-ακολουθία $(u,\dots, v)=\mu$ είναι μονοπάτι του T (οπότε δεν διατρέχει καμμία χορδή), και η χορδή e_i δεν διατρέχεται από την υπο-ακολουθία $(v,\dots, e_1,\dots, u)$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο γ_1 διατρέχει τις χορδές $e_1,\dots, e_j$, όπου $j<i$ (αλλοιώς μπορούμε να μεταθέσουμε κατάλληλα τις $e_1,\dots, e_i$). Από την επαγωγική υπόθεση, αν c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\dots, i$, θα είναι είτε $\gamma_1=c_1$ (αν j=1), ή $\gamma_1=\oplus(c_1,\dots, c_j)$ (αν j>1).

Αντίστοιχα, η διαδρομή $\gamma_2=(u,\dots, v,\dots, e_i,\dots, u)$ είναι κύκλος, διατρέχει το πολύ $i-1$ από τις χορδές που διατρέχει ο κύκλος c, και μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο γ_2 διατρέχει τις χορδές $e_{j+1},\dots, e_i$. Από την επαγωγική υπόθεση, αν c_l είναι ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το T που διατρέχει τη χορδή e_l, $l=1,\dots, i$, θα είναι είτε $\gamma_2=c_{j+1}$ (αν j+1=i), ή $\gamma_2=\oplus(c_{j+1},\dots, c_i)$ (αν j+1<i).

Από τον ορισμό των γ_1, γ_2, είναι $c=\oplus(\gamma_1, \gamma_2)$. Από τα παραπάνω, μπορούμε να δούμε ότι $c=\oplus(c_1,\dots, c_i)$. □

Ανάλυση κύκλου σε άθροισμα στοιχειωδών κύκλων

Έστω $c(T, e)$ *ο στοιχειώδης κύκλος ως προς το* T *που περιέχει την χορδή* e .

Έστω Θ ένας κύκλος του G , και $\gamma 1 \ldots \gamma n$ $(n > 1)$ οι ακμές του Θ
που είναι χορδές ως προς το δέντρο επικάλυψης T .

ΘΕΩΡΗΜΑ $$\Theta = c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \ \ldots \ \oplus c(T, \gamma n)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2

Εξετάζουμε το υπο-γράφημα του G ,

$$H = \Theta \oplus (\, c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \ \ldots \ \oplus c(T, \gamma n) \,) .$$

1 Το H δεν περιέχει καμμία χορδή του G ως προς το T .
Άρα, κάθε ακμή του H είναι ακμή του T .

2 Το H θα είναι η ένωση κύκλωνπου δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή.

3 Από τα (1) και (2) το H δεν μπορεί να έχει ακμές: επομένως $H = \underline{0}$.

Αφού $\Theta \oplus (\, c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \ \ldots \ \oplus c(T, \gamma n) \,) = \underline{0}$, καταλήγουμε ότι

$$\Theta = c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2) \ \ldots \ \oplus c(T, \gamma n) . \qquad \square$$

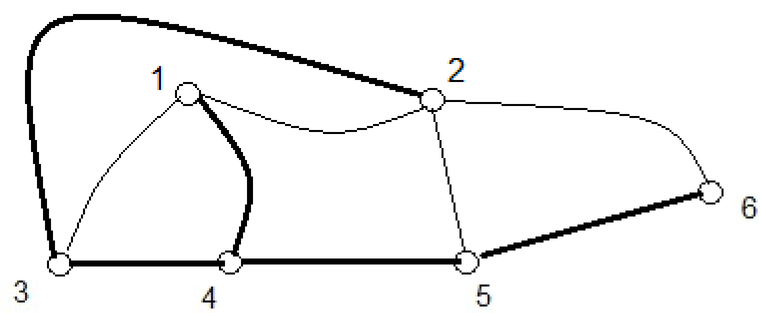
ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω G = (V, E) ένα συνεκτικό γράφημα και T ένα δέντρο επικάλυψης του G . Επιβεβαιώστε ότι:

Ένα υπο-γράφημα H του G που έχει άρτιους βαθμούς και δεν έχει απομονωμένες κορυφές, θα είναι άθροισμα των στοιχειωδών κύκλων ως προς το T που περιέχουν *τις χορδές που ανήκουν στο* H .

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

α Αναλύστε τον κύκλο (3 _ 1 _ 2 _ 6 _ 5 _ 4 _ 3) του Γ σε άθροισμα κύκλων, που να είναι στοιχειώδεις ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

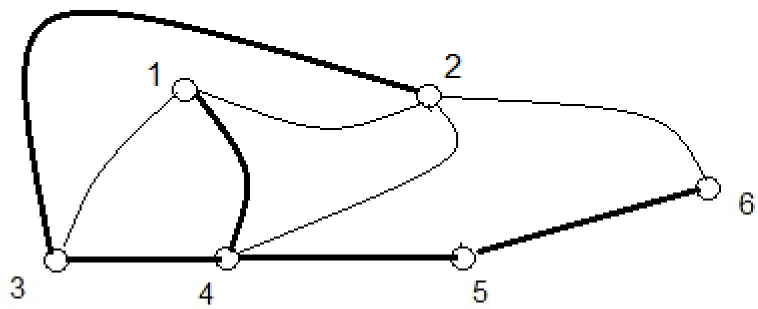
Γ



β Αναλύστε το υπο-γράφημα Γ – 4 σε άθροισμα κύκλων του Γ, που να είναι στοιχειώδεις ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

γ Αναλύστε το υπο-γράφημα Δ – {1 , 3} σε άθροισμα κύκλων του Δ, που να είναι στοιχειώδεις ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

Δ



δ Για καθένα από τα παραπάνω γραφήματα, βρείτε το άθροισμα των στοιχειωδών κύκλων ως προς το δέντρο επικάλυψης με τις έντονες ακμές.

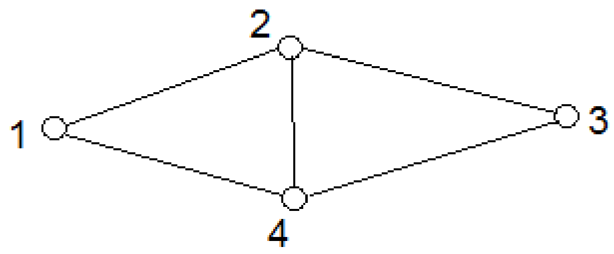
Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα,

V = { 1,... n } , E = { e_1 , … e_m } .

Μητρώο πρόσπτωσης (Incidence matrix) $\mathbf{D_G}$ του G , διαστάσεων n × m :

d(j , k) = 1 όταν η κορυφή j είναι άκρο της ακμής e_k

d(j , k) = 0 σε κάθε άλλη περίπτωση



E = { {1, 2} , {1, 4} , {2, 3| , {2, 4} , {3, 4} }

$\mathbf{D_G}$

1 1 0 0 0

1 0 1 1 0

0 0 1 0 1

0 1 0 1 1

ΛΗΜΜΑ 1 Για κάθε συνεκτικό G : rank($\mathbf{D_G}$) = |V|–1 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το άθροισμα όλων των γραμμών του $\mathbf{D_G}$ είναι μηδενικό.

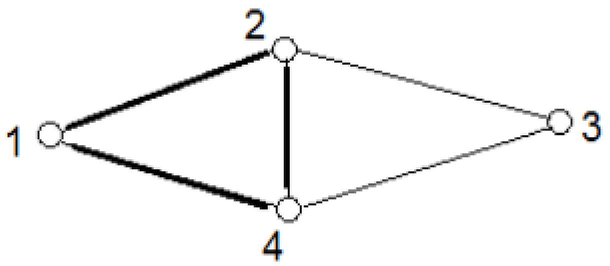
Το άθροισμα οποιουδήποτε συνόλου n–1 γραμμών είναι μη-μηδενικό.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ G , Δ(G) , μέσω συντεταγμένων:

Ένα υπο-γράφημα H του G μπορεί να περιγραφεί με μία *στήλη*

$u(H) = \mathbf{(}\, u_1 , u_2 , \dots u_m \,\mathbf{)}^{\text{Transpose}}$, $u_k = 1$ όταν το H περιέχει την e_k

$u_k = 0$ διαφορετικά



E = { {1, 2} , {1, 4} , {2, 3} , {2, 4} , {3, 4} }

H = { {1, 2} , {1, 4} , {2, 4} }

u(H) = { 1 , 1 , 0 , 1 , 0 }

ΛΗΜΜΑ 2 Για κάθε κύκλο C του G : $\mathbf{D_G}\, u(C) = \underline{0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω w_j η γραμμή του $\mathbf{D_G}$ που αντιστοιχεί στην κορυφή j .

Άν η κορυφή j δεν είναι στον C , η w_j έχει 0 για τις ακμές του C :

$w_j\, u(C) = 0$.

Άν η κορυφή j είναι στον C , η w_j έχει 1 για τις δύο ακμές του C

που προσπίπτουν στην j , και έχει 0 για τις υπόλοιπες ακμές του C :

$w_j\, u(C) = 1{+}1 = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

α Ο διανυσματικός χώρος του G , Δ(G) , έχει διάσταση |E|–|V|+1 .

β Οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς ένα δέντρο επικάλυψης T αποτελούν βάση για τον διανυσματικό χώρο του G .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 3

1 Κάθε υπο-γράφημα H που ανήκει στον Δ(G) είναι ένωση κύκλων του G που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή: επομένως $\mathbf{D_G}\, u(H) = \underline{0}$.

2 Η διάσταση του Δ(G) είναι *το πολύ* $|E| - \mathrm{rank}(\mathbf{D_G}) = |E| - |V| + 1$.

3 Οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς ένα δέντρο επικάλυψης είναι *γραμμικά ανεξάρτητοι*, και το πλήθος τους είναι |E|–|V|+1 .