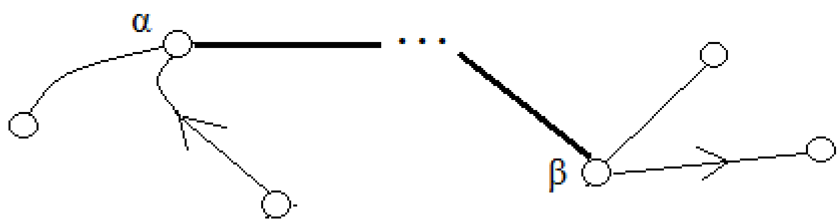
Μη-επεκτάσιμο μονοπάτι

Το μονοπάτι $\mu = (\alpha , \dots \beta)$ του γραφήματος G ονομάζεται *επεκτάσιμο από το άκρο* α , όταν: υπάρχει ακμή του G , $e = (x, \alpha)$ είτε $e = \{x, \alpha\}$, ώστε η ακολουθία $(x , e , \alpha , \dots \beta)$ να είναι μονοπάτι.

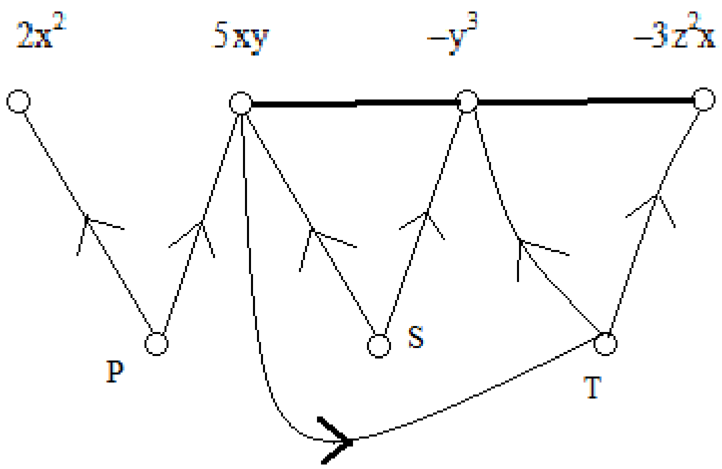
Το μονοπάτι $\mu = (\alpha , \dots \beta)$ του G ονομάζεται *επεκτάσιμο από το άκρο* β , όταν: υπάρχει ακμή του G , $e = (\beta, x)$ είτε $e = \{\beta , x\}$, ώστε η ακολουθία $(\alpha , \dots \beta , e , x)$ να είναι μονοπάτι.

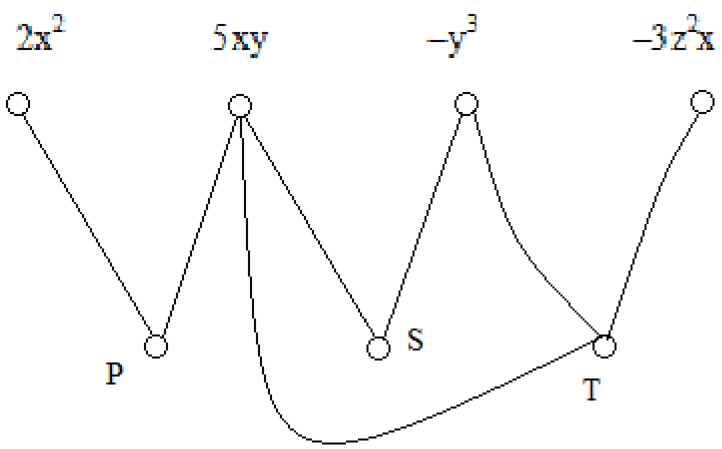


Το μονοπάτι μ ονομάζεται *μη-επεκτάσιμο*, όταν δεν είναι επεκτάσιμο από κάποιο από τα άκρα του.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Γιά κάθε ένα από τα παρακάτω γραφήματα: Βρείτε ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι, που να *μην έχει μέγιστο μήκος* για το γράφημα.





ΕΡΩΤΗΜΑ 2

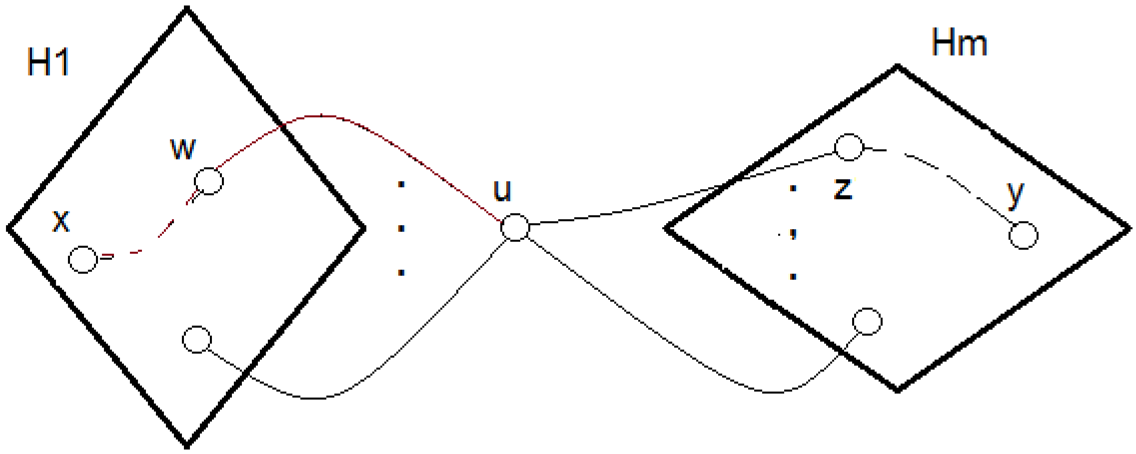
α Έστω G ένα γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή e = (s , u) είτε e = {s , u} .
Βρείτε μια μέθοδο για να υπολογιστεί ένα μονοπάτι (s , e , u , ... β) ,
που να *μην είναι επεκτάσιμο από το άκρο* β .

path ← (s , e , u) % το τρέχον μονοπάτι
used ← { s , u } % το σύνολο των κορυφών που εμφανίζονται στο *path*
last ← u % η τελευταία κορυφή του *path*

L: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ* f = (*last* , v) είτε f = { *last* , v }
If v ∉ *used*
then *path* ← πρόσθεση της f ως τελευταίας ακμής στο *path*
used ← *used* ∪ { v }
last ← v

β Έστω G ένα γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή. Βρείτε μια μέθοδο
για να υπολογιστεί ένα μονοπάτι (α , ... β) του G , που να *μην είναι επεκτάσιμο*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι: Άν μία κορυφή u ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G *είναι κομβικό σημείο*, κάθε μονοπάτι του G *με άκρο* την κορυφή u θα είναι επεκτάσιμο από το u .



Έστω H1 ... Hm , $m \geq 2$, οι συνεκτικές συνιστώσες του G – u ,
και μ = (x , ... w , {w, u} , u) , x ∈ H1 , ένα μονοπάτι του G
με άκρο την κορυφή u .

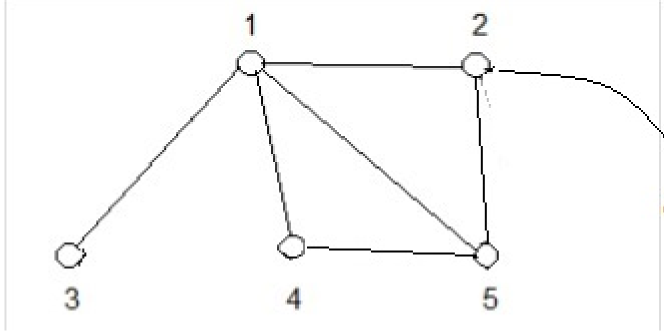
Επειδή δεν υπάρχει ακμή του G που να συνδέει το υπο-γράφημα H1
με υπο-γράφημα Hk , $k \neq 1$: κάθε κορυφή του μονοπατιού μ
εκτός από την u , θα ανήκει στο υπο-γράφημα H1 .

Επειδή δεν υπάρχει κορυφή του H1 που να είναι κοινή με το Hm :
το μ μπορεί να επεκταθεί από το άκρο u ,
προσθέτοντας μία ακμή {u, z}, z ∈ Hm .

ΘΕΩΡΗΜΑ ΄Υπαρξη μη-κομβικών σημείων

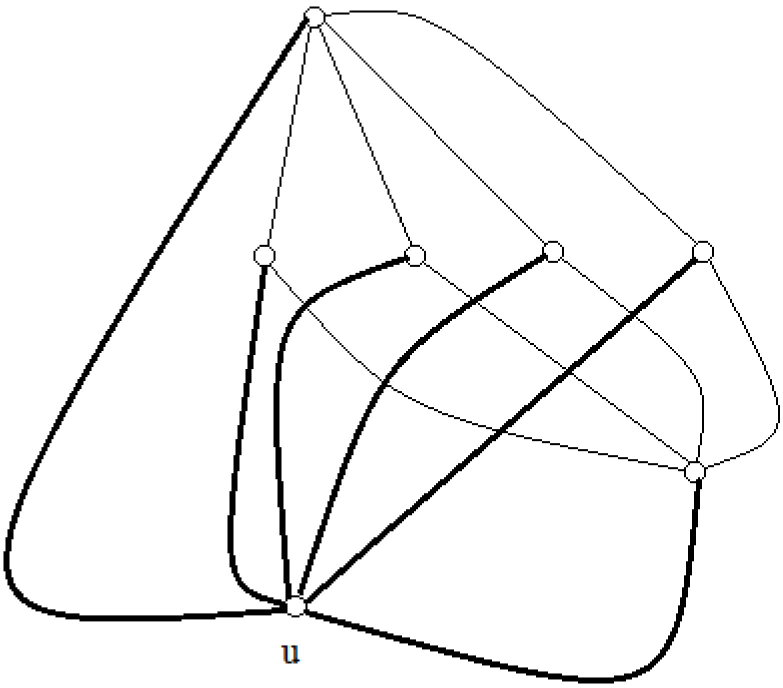
Κάθε μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή
έχει δύο (τουλάχιστον) κορυφές που δεν είναι κομβικά σημεία:
τα άκρα κάθε μη-επεκτάσιμου μονοπατιού θα είναι μη-κομβικά.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Βρείτε όλα τα μη-επεκτάσιμα μονοπάτια που δεν έχουν ως άκρο μία από τις κορυφές 3, 4.



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα Γ και μία κορυφή u που *δεν είναι κομβικό σημείο*, ώστε: Κάθε μονοπάτι του Γ με άκρο την κορυφή u να είναι επεκτάσιμο από το u .

Γ



1: Υπάρχει μονοπάτι του Γ με άκρο την u που δεν είναι επεκτάσιμο από το u, *άν και μόνο άν* στο Γ – u υπάρχει μονοπάτι που περιέχει *όλες* τις κορυφές του Γ – u .

2: Στο Γ – u *δεν υπάρχει* μονοπάτι που να περιέχει όλες τις κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Έστω G ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή, όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό το πολύ 2 .

Επιβεβαιώστε ότι: είτε το G *θα είναι* ένα μονοπάτι, ή το G *θα είναι* ένας κύκλος.

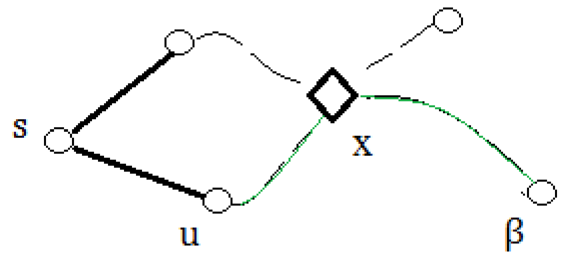
Έστω μ = (α , ... β) ένα μη-επεκτάσιμο μονοπάτι του G :

Εξετάζουμε τις ακμές του G που καταλήγουν σε μία από τις κορυφές α , β , και που δεν είναι ακμές του μονοπατιού μ .

Εξετάζουμε άν υπάρχουν κορυφές του G που δεν είναι κορυφές του μονοπατιού μ .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω G ένα άκυκλο μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και s μία κορυφή βαθμού $d \geq 2$.
Επιβεβαιώστε ότι: το G θα έχει τουλάχιστον d κορυφές βαθμού 1.

Για κάθε μία ακμή e = {s, u} που προσπίπτει στην κορυφή s ,
μπορούμε να βρούμε ένα μονοπάτι (s , e , u , ... β) του G ,
που να μην είναι επεκτάσιμο από το άκρο β .



Άν δύο από αυτά τα μονοπάτια είχαν άλλη κοινή κορυφή εκτός από την s ,
θα σχηματιζόταν κύκλος στο G : άν x η πρώτη κοινή κορυφή
των δύο μονοπατιών μετά την s , στο G θα υπήρχε ο κύκλος
(s , . . . x , . . . u , . . . s) .

ΕΡΩΤΗΜΑ 7

α Έστω G ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου κάθε κορυφή έχει εισερχόμενες και εξερχόμενες ακμές. Επιβεβαιώστε ότι: το G θα έχει κύκλο.

β Είναι σωστό ότι: κάθε κορυφή του G θα ανήκει σε κάποιο κύκλο;