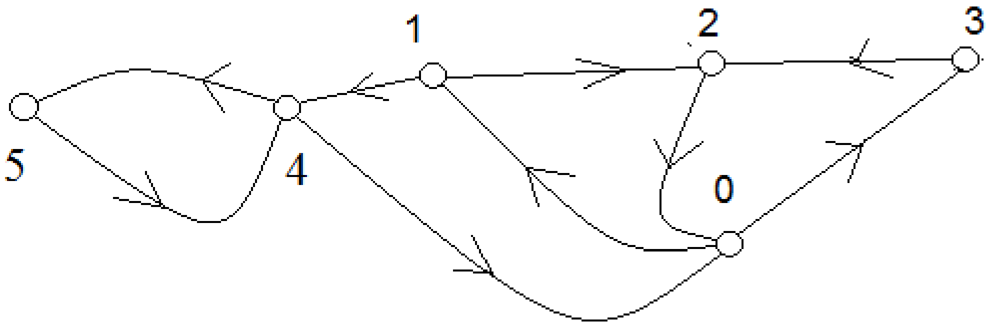
Ισχυρά συνεκτικό γράφημα

Ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_{\delta\delta}(x, y)$ = true .

Ένα γράφημα G = (V, E) είναι **μη-ισχυρά συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_{\delta\delta}(x, y)$ = false .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Ελέγξτε ότι το παρακάτω γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα που έχει *μόνο μία κορυφή*, είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Ελέγξτε ότι: ένα γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό, *άν και μόνο άν* είναι συνεκτικό.
.

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα κορυφής κατευθυνόμενου γραφήματος

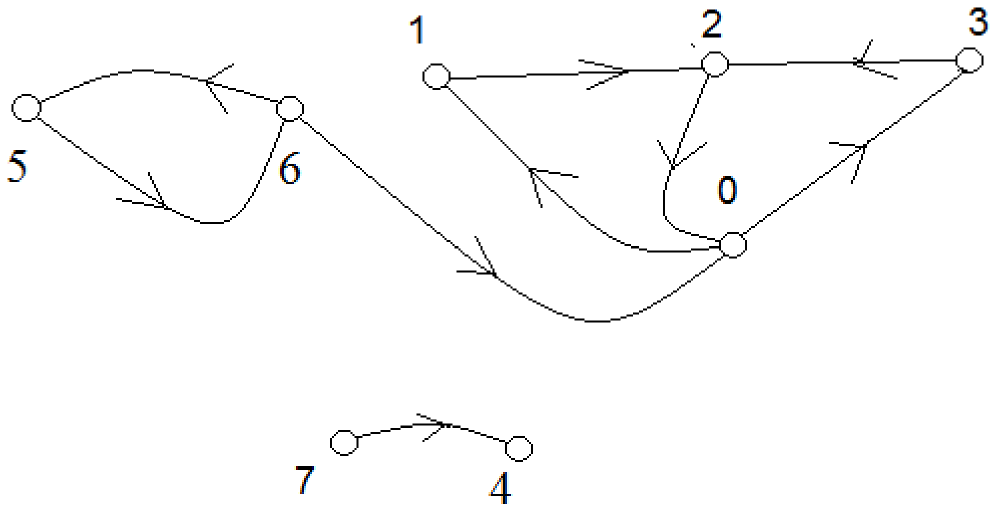
Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και u μία κορυφή του G .

Ονομάζουμε <u>ισχυρά συνεκτική συνιστώσα της κορυφής u του G</u> ,
το *επαγόμενο* υπο-γράφημα <u>H(u)</u> του G :

(1) Με κορυφές <u>ΙΣ(u)</u> $= \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, R_{\delta\delta} \, x \}$,

(2) με όλες τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του ΙΣ(u) .

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Για κάθε κορυφή του παρακάτω γραφήματος, βρείτε την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα της στο γράφημα.



ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και u , v κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Κάθε σύνολο ΙΣ(u) είναι μη-κενό.

β Για κάθε κορυφή v υπάρχει κάποια u ώστε $v \in$ ΙΣ(u) .

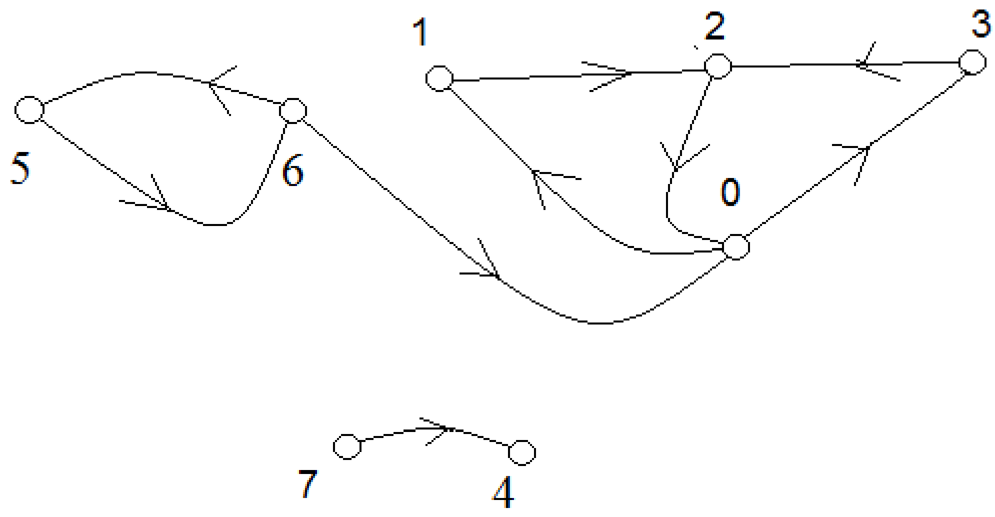
Μέγιστο ισχυρά συνεκτικό υπο-γράφημα

Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα και H ένα υπο-γράφημα του G .

Το H ονομάζεται επεκτάσιμο σε ισχυρά συνεκτικό *μόνο όταν*:
υπάρχει υπο-γράφημα του G που περιέχει *γνήσια* το H και είναι ισχυρά συνεκτικό.

Άν το H είναι ισχυρά συνεκτικό: Το H ονομάζεται μέγιστο ισχυρά συνεκτικό *μόνο όταν*: το H δεν είναι επεκτάσιμο σε ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Βρείτε υπο-γραφήματα του παρακάτω γραφήματος που να είναι είτε (1) επεκτάσιμα σε ισχυρά συνεκτικά, είτε (2) μέγιστα ισχυρά συνεκτικά.

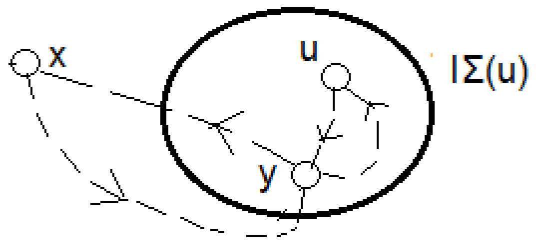


ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα,
u μία κορυφή του G .

a Επιβεβαιώστε ότι, γιά κάθε κορυφή y του ΙΣ(u) :

άν αληθευει ότι y $R_{\delta\delta}$ x στο G , η κορυφή x θα είναι επίσης στο ΙΣ(u) .

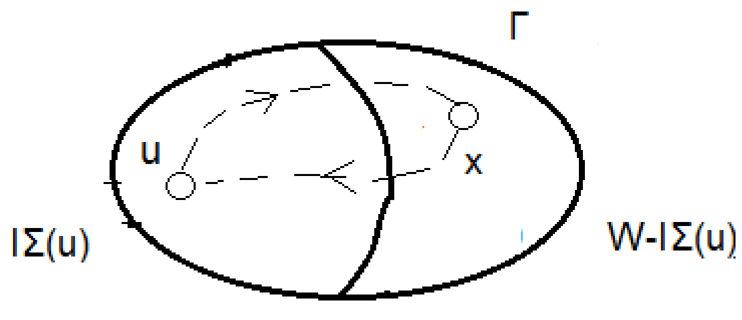
Από y ∈ ΙΣ(u) : *είτε* **u $\mathbf{R_{\delta\delta}}$ y** , με **y $\mathbf{R_{\delta\delta}}$ x** δίνει u $R_{\delta\delta}$ x ($R_{\delta\delta}$ μεταβατική)
είτε y = u , με y $R_{\delta\delta}$ x δίνει u $R_{\delta\delta}$ x .



b Επιβεβαιώστε ότι το γράφημα H(u) είναι μέγιστο ισχυρά συνεκτικό.

Έστω Γ = (W, Z) ένα υπο-γράφημα του G που περιέχει γνήσια το H(u)
και είναι ισχυρά συνεκτικό.

Διαμερίζουμε το W στα υπο-σύνολα ΙΣ(u) , W–ΙΣ(u) : θα υπάρχει κάποια κλειστή διαδρομή του G που θα περιέχει κορυφές: u ∈ ΙΣ(u) , x ∈ W–ΙΣ(u) .
Από το (a) : x ∈ ΙΣ(u) , που είναι άτοπο.



c Έστω H ένα υπο-γράφημα που περιέχει την κορυφή u
και είναι μέγιστο ισχυρά συνεκτικό. Επιβεβαιώστε ότι H = H(u) .

Διαμερισμός κατευθυνόμενου γραφήματος σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και H(u1) ... H(uλ) , λ ≥ 1 οι *διαφορετικές* ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες των κορυφών του.

Τα σύνολα ΙΣ(u1) ... ΙΣ(uλ) αποτελούν διαμερισμό του V σε μη-κενά ξένα <u>*ισχυρά συνεκτικά*</u> διαμερίσματα, όπου:

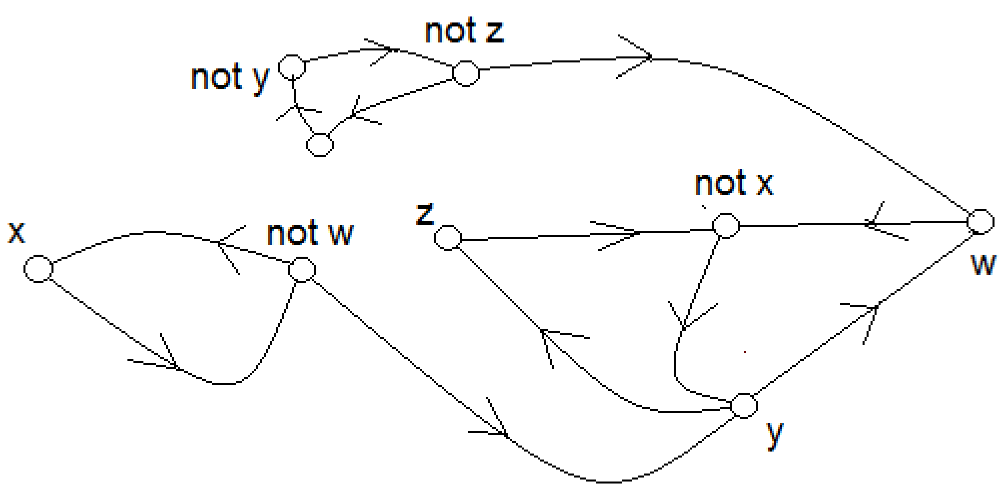
(1) V = ΙΣ(u1) ∪ ... ∪ ΙΣ(uλ)

(2) Δεν υπάρχει κλειστή διαδρομή του G που να περιέχει κορυφές από διαφορετικά διαμερίσματα (Ερώτημα 7) .

A Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) διαμερίζουν τις κορυφές <u>και τις κλειστές διαδρομές</u> του G , και είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών και των κλειστών διαδρομών του G σε ισχυρά συνεκτικά υπο-γραφήματα.

B Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι ο *μοναδικός* διαμερισμός των κορυφών του G σε <u>μέγιστα ισχυρά συνεκτικά</u> υπο-γραφήματα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Για το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα:



α Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να είναι ισχυρά συνεκτικά*.

β Βρείτε διαμερισμούς των κορυφών, ώστε τα επαγόμενα υπο-γραφήματα που αντιστοιχούν στα διαμερίσματα *να διαμερίζουν και τις κλειστές διαδρομές*.

ΕΡΩΤΗΜΑ 9

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $G1 \dots G\kappa$,
ένας διαμερισμός των κορυφών *και των κλειστών διαδρομών* του G
σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα.
Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι ένωση ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και $G1 \dots G\kappa$,
ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε μη-κενά ξένα
ισχυρά συνεκτικά διαμερίσματα.
Επιβεβαιώστε ότι: Κάθε διαμέρισμα θα είναι υπο-γράφημα κάποιας ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας του G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 11

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $x \neq y$ δύο κορυφές του G .
Επιβεβαιώστε ότι: οι κορυφές x , y είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G *άν και μόνο άν* $y \; R_{\delta\delta} \; x$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 12

Έστω $G1 = (V1, E1)$, $G2 = (V2, E2)$, ισχυρά συνεκτικά κατευθυνόμενα γραφήματα. Επιβεβαιώστε ότι: Άν τα $G1$, $G2$ έχουν μία (τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13

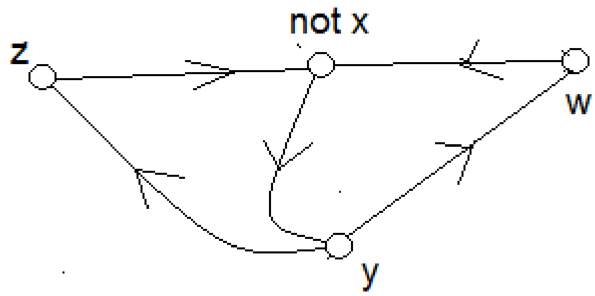
a Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα,
και δ μία κλειστή διαδρομή που περιέχει μία (τουλάχιστον) κορυφή του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

b Έστω G ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα,
και δ μία διαδρομή που τα άκρα της είναι κορυφές του G .
Επιβεβαιώστε ότι: Το γράφημα $G \cup \delta$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 14

α Έστω G = (V, E) ένα κατευθυνόμενο γράφημα, $|V| \geq 2$.
Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι ισχυρά συνεκτικό *άν και μόνο άν* υπάρχει κάποια *κλειστή διαδρομή* του G που περιέχει όλες τις κορυφές του.

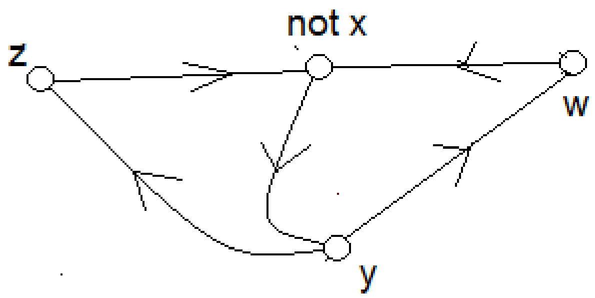
β Επιβεβαιώστε ότι: για το παρακάτω ισχυρά συνεκτικό γράφημα, δεν υπάρχει *κύκλος* που να περιέχει όλες τις κορυφές του.



ΕΡΩΤΗΜΑ 15 Βρείτε ισχυρά συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα

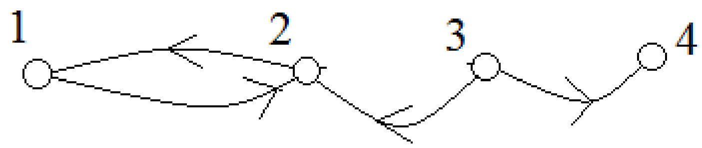
G1 = (V1 , E1) , G2 = (V2 , E2) , ώστε $V1 \cap V2 \neq \emptyset$

και το γράφημα $G1 \cap G2$ να μην είναι ισχυρά συνεκτικό.



V1 = {z , not x , y} V2 = {not x , y , w}

ΕΡΩΤΗΜΑ 16



Για το παραπάνω γράφημα, βρείτε:

(1) Υπο-γραφήματα που να είναι *μέγιστα συνεκτικά*.

Ένα γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Για οποιεσδήποτε κορυφές x, y ($x \neq y$) : $\mathbf{R}_\delta(x, y) = \text{true}$.

(2) Επαγόμενα υπο-γραφήματα που να είναι
συνεκτικές συνιστώσες κορυφών:

$H(u) = (\Sigma(u) , \Theta)$, όπου $u = 1, 2, 3, 4$

$\Sigma(u) = \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, \mathbf{R}_\delta \, x \}$

Θ = *όλες* οι ακμές του G που συνδέουν κορυφές του $\Sigma(u)$

(3) Διαμερισμούς των κορυφών που να διαμερίζουν *και τις ακμές*,
και κάθε διαμέρισμα να είναι *συνεκτικό* υπο-γράφημα.

(4) Διαμερισμούς των κορυφών όπου:

όταν x, y ($x \neq y$) *είναι στο ίδιο διαμέρισμα*, $R_\delta(x, y) = \text{true}$
όταν x, y *δεν είναι στο ίδιο διαμέρισμα*, $R_\delta(x, y) = \text{false}$