

Διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές

Για ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές* για το G , την παρακάτω σχέση R_K πάνω στο σύνολο V :

Για $a \in V, b \in V$, $R_K(a, b) = \text{true}$ όταν:
υπάρχει κάποιος κύκλος όπου εμφανίζονται οι κορυφές a, b .

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι:

α Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα και κορυφές $a \neq b$, $R_K(a, b) = \text{true}$ αν και μόνο αν υπάρχουν δύο μονοπάτια με άκρα τις a, b , χωρίς κοινές κορυφές.

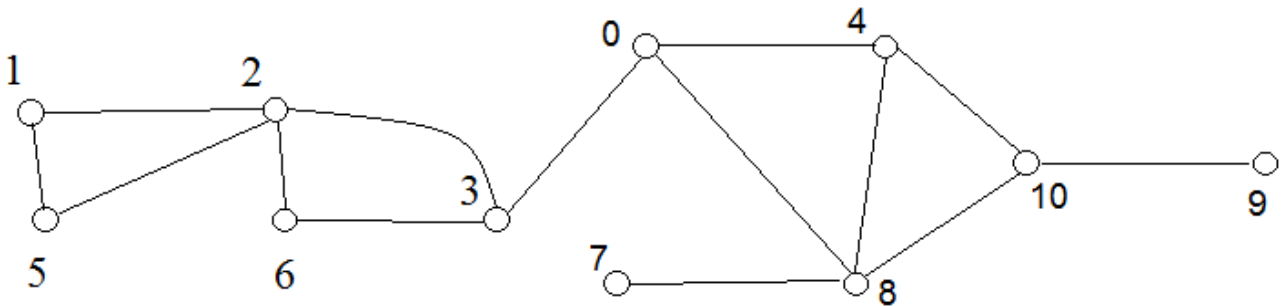
β Αν για τις κορυφές a, b αληθεύει ότι $a R_K b$, θα αληθεύει και ότι $a R_L b$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και a ένα κομβικό σημείο του G . Επιβεβαιώστε ότι, αν οι κορυφές u, v είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - a$: $R_K(u, v) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε κορυφές για τις οποίες:

α Να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.

β Να μην αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές, αλλά να αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς ακμές.



1 Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$,
η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές για το G είναι συμμετρική.

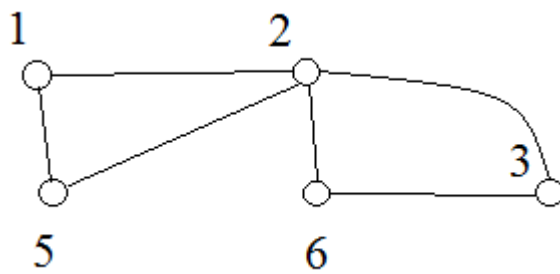
Ισχύει στο V : $u R_K v \text{ implies } v R_K u$

Αν υπάρχει κάποιος κύκλος όπου εμφανίζονται οι u και v ,
ο ίδιος κύκλος θα περιέχει τις κορυφές v και u .

2 Υπάρχουν γράφηματα όπου η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές
δεν είναι μεταβατική.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4

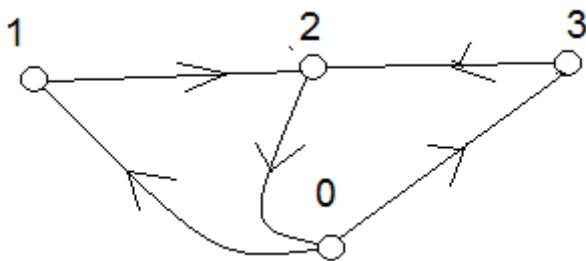
α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_κ δεν είναι μεταβατική.



Αληθεύει ότι $1 R_\kappa 2$ and $2 R_\kappa 3$

Δεν αληθεύει ότι $1 R_\kappa 3$

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_κ να μην είναι μεταβατική.

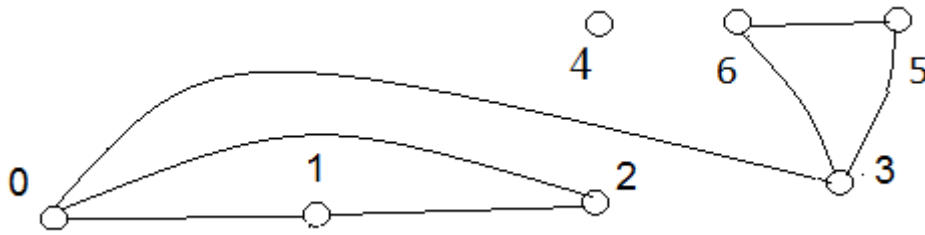


Αληθεύει ότι $1 R_\kappa 2$ and $2 R_\kappa 3$

Δεν αληθεύει ότι $1 R_\kappa 3$

ΕΡΩΤΗΜΑ 5

α Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_K είναι μεταβατική.



$u R_K v$ αν και μόνο αν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

Αν $(u R_K v \text{ and } v R_K w)$: είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{3, 5, 6\}$

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου η R_K είναι μεταβατική.

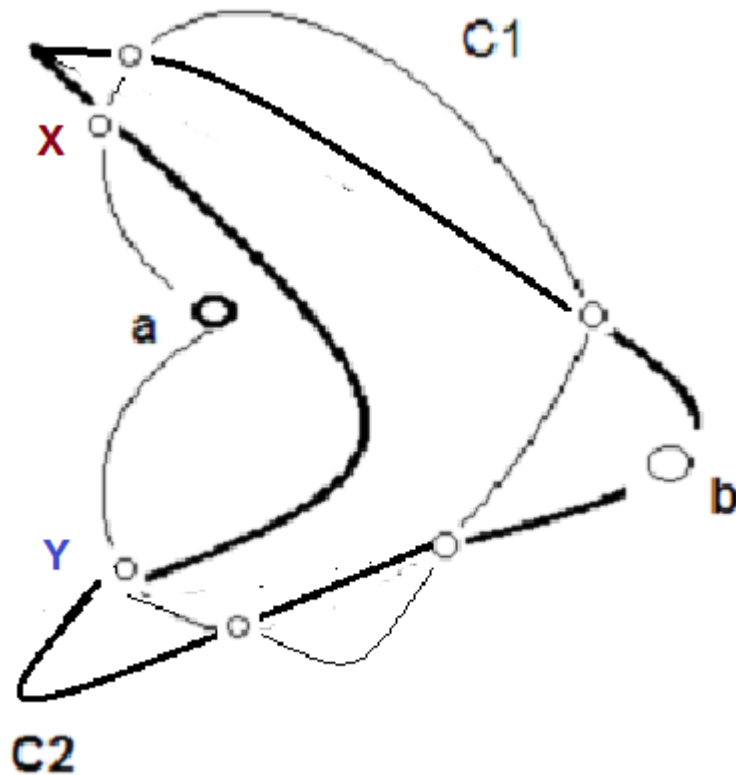


$u R_K v$ αν και μόνο αν: είτε $\{u, v\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v\} \subseteq \{5, 6\}$

Αν $(u R_K v \text{ and } v R_K w)$: είτε $\{u, v, w\} \subseteq \{1, 2\}$, ή $\{u, v, w\} \subseteq \{5, 6\}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει κύκλους $C1$ και $C2$ που έχουν *τουλάχιστον δύο* κοινές κορυφές. Επιβεβαιώστε ότι:

Για οποιεσδήποτε κορυφές $a \in C1$, $b \in C2$, $R_k(a, b) = \text{true}$.



Αρχίζοντας από το a ακολουθώ τον $C1$ δεξιόστροφα: έστω X η πρώτη κορυφή του $C2$ που συναντώ.

Αρχίζοντας από το a ακολουθώ τον $C1$ αριστερόστροφα: έστω Y η πρώτη κορυφή του $C2$ που συναντώ.

Έστω μ_1 το μονοπάτι $(X, \dots a, \dots Y)$ που κατασκευάζεται από τον $C1$.

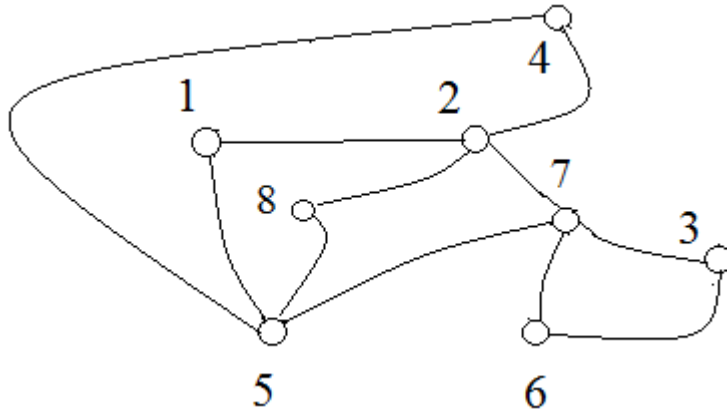
Έστω μ_2 το μονοπάτι $(Y, \dots b, \dots X)$ που κατασκευάζεται από τον $C2$.

Από τα μ_1, μ_2 κατασκευάζω τον κύκλο $(X, \dots a, \dots Y, \dots b, \dots X)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και $C_1 \dots C_n$ μία ακολουθία κύκλων του G , όπου κάθε κύκλος C_j έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο C_{j+1} .

Επιβεβαιώστε ότι: αν η κορυφή u βρίσκεται στον C_1 και η κορυφή v στον C_n , θα είναι $R_k(u, v) = \text{true}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Στο παρακάτω γράφημα βρείτε τα ζεύγη κορυφών για τα οποία αληθεύει η διπροσβασιμότητα ως προς κορυφές.



Γράφημα δισυνεκτικό ως προς κορυφές

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **δισυνεκτικό ως προς κορυφές** μόνο όταν:

Για οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία x, y του V : $R_k(x, y) = \text{true}$.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι **μη- δισυνεκτικό ως προς κορυφές** μόνο όταν:

Υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του V , ώστε: $R_k(x, y) = \text{false}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει μόνο μία κορυφή, είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

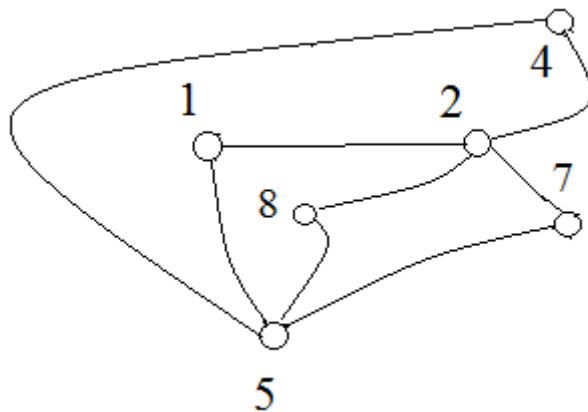
ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Επιβεβαιώστε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που έχει κομβικό σημείο δεν μπορεί να είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Έστω G ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι η ένωση των κύκλων $C_1 \dots C_n$, όπου κάθε κύκλος C_k έχει δύο τουλάχιστον κοινές κορυφές με τον κύκλο $C_{(k+1)}$.

Επιβεβαιώστε ότι: το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

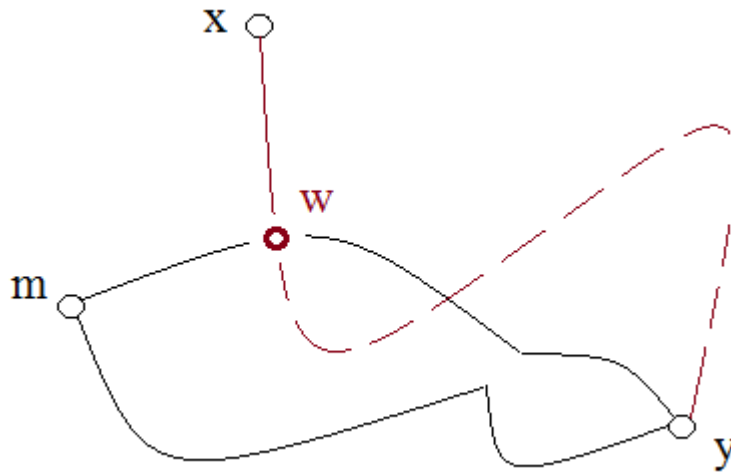
ΕΡΩΤΗΜΑ 11 Επιβεβαιώστε ότι το παρακάτω γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

G



ΕΡΩΤΗΜΑ 12 Επιβεβαιώστε ότι στο γράφημα G δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει όλες τις κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 13 Το γράφημα G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, και x, m, y είναι διαφορετικές κορυφές του G . Να κατασκευαστεί ένα μονοπάτι του G , με άκρα τις x, y , που να περιέχει την m .



- C** ένας κύκλος που περιέχει τις m, y
- μ** ένα μονοπάτι από την x στην m , που δεν περιέχει την y
- w** η πρώτη κορυφή του μ που ανήκει και στον **C**

μονοπάτι N: ακολουθώ το μ από την x ως την w , και συνεχίζω μέσω του **C**, από την w προς την m και μετά ως την y

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΛΥΨΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ R_κ

Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$:

Υπάρχει κάλυψη του V με μη-κενά σύνολα $X_1 \dots X_\kappa$, $\kappa \geq 1$, όπου:

(1) $V = X_1 \cup \dots \cup X_\kappa$,

(2) Για x, y οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του V :

όταν υπάρχει σύνολο που περιέχει τα x, y , $R_\kappa(x, y) = \text{true}$

όταν δεν υπάρχει σύνολο που περιέχει τα x, y , $R_\kappa(x, y) = \text{false}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 14 Βρείτε κάλυψη για την R_κ σε καθένα από τα παρακάτω γραφήματα.

