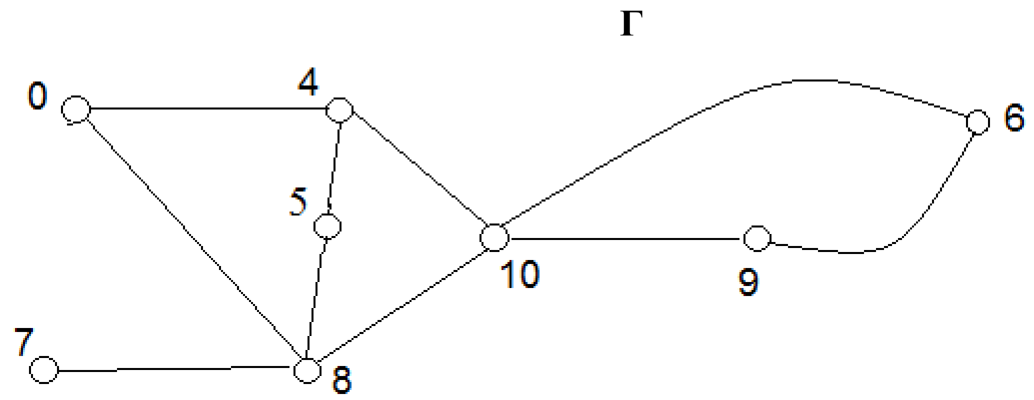
Δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Ένα *επαγόμενο* υπο-γράφημα H = (W, K) ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G ονομάζεται <u>δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές</u> του G *μόνο όταν*:

Είτε: για κάποια <u>ακμή</u> e του G που <u>δεν είναι γέφυρα</u>,
K = {e} ∪ { e′ | υπάρχει κύκλος του G που περιέχει τις <u>ακμές</u> e, e′ } ,
W = { u | η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K } ,

Είτε: για κάποια <u>κορυφή</u> u του G που <u>δεν περιέχεται σε κύκλο</u>,
H = ({u} , ∅)

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Βρείτε τα υπο-γραφήματα του γραφήματος Γ που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές.



ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Για κάθε κορυφή u του παραπάνω γραφήματος Γ , βρείτε το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του Γ με σύνολο κορυφών δ(u) :

$\delta(u) = \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, R_\kappa \, x \}$.

δ(0) = δ(4) = δ(5) = δ(8) = {0, 4, 5, 10, 8}

δ(10) = {0, 4, 5, 10, 8} ∪ {10, 9, 6}

δ(6) = δ(9) = {10, 9, 6}

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Έστω ότι το υπο-γράφημα H ενός γραφήματος G είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Το H θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

β Άν το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, θα είναι H = G
(το G θα είναι το μοναδικό υπο-γράφημα του G που είναι
δισυνεκτική συνιστώσα του G ως προς κορυφές).

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Έστω G = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, x , y δύο διαφορετικές κορυφές του G . Επιβεβαιώστε ότι:

α Υπάρχει δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G που να περιέχει
τις x , y , *άν και μόνο άν* $x \, R_\kappa \, y$.

β Οι (μη-τετριμμένες) δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές του G
διαμερίζουν τις ακμές που δεν είναι γέφυρες.

Κάλυψη με δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές

Έστω Γ = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, H(u1) ... H(uλ) , λ ≥ 1 οι δισυνεκτικές συνιστώσες του Γ ως προς κορυφές.

A Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι *δισυνεκτικά ως προς κορυφές*,
και καλύπτουν τις κορυφές *και τους κύκλους* του Γ .
Κάθε κύκλος του Γ περιέχεται σε ένα μόνο από τα H(u1) ... H(uλ) .

B Τα υπο-γραφήματα H(u1) ... H(uλ) είναι η *μοναδική* κάλυψη
των κορυφών *και των κύκλων* του G , με υπο-γραφήματα
που είναι *δισυνεκτικά ως προς κορυφές*.

Αναδρομικός υπολογισμός των δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς κορυφές

Έστω Γ = (V, E) ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και e1 ... ek , k ≥ 0
οι γέφυρες του G .

1 Έστω Θ το γράφημα που προκύπτει αφαιρώντας από το Γ
τις ακμές e1 ... ek : υπολογίζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες του H ,
έστω Θ1 ... Θm , m ≥ 0 .

2 a Κάθε γράφημα Θk που δεν έχει κομβικό σημείο, είναι δισυνεκτική συνιστώσα
ως προς κορυφές του Γ .
Ειδική περίπτωση: το Θk μπορεί να αποτελείται από μία κορυφή μόνο.

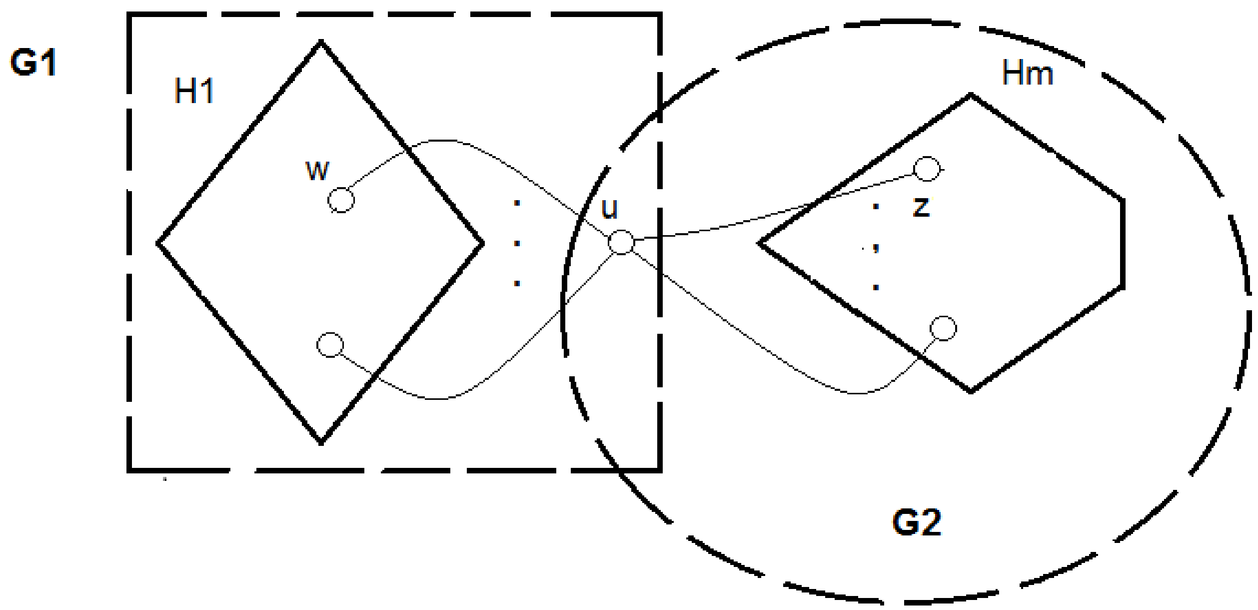
b Για κάθε γράφημα Θk που έχει ένα κομβικό σημείο u :
Έστω H1 = (V1 , E1) , ... Hm = (Vm , Em) , m ≥ 2 ,
οι συνεκτικές συνιστώσες του Θk – u . Θέτουμε:

X1 = V1 ∪ {u} ,

G1 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X1

X2 = V2 ∪ ... ∪ Vm ∪ {u} ,

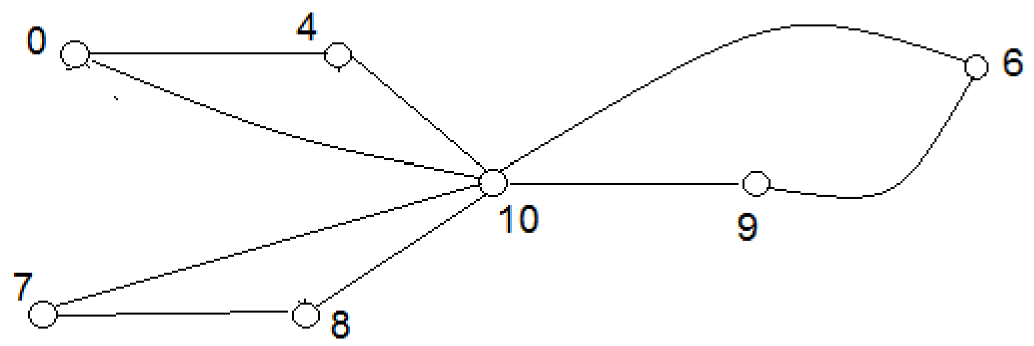
G2 το επαγόμενο υπο-γράφημα του Θk με σύνολο κορυφών X2

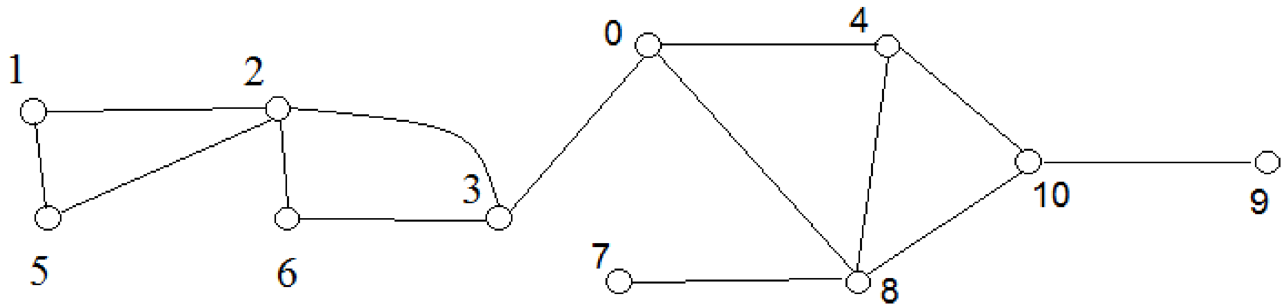


i Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk , θα είναι
δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές *ενός μόνο* από τα G1 , G2 .

ii Κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές, είτε του G1 είτε του G2 ,
θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του Θk .

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Για καθένα από τα παρακάτω γραφήματα, βρείτε όλα τα υπο-γραφήματά του που είναι δισυνεκτικές συνιστώσες του ως προς κορυφές.





ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν H1 , H2 είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος G , και u μία κοινή κορυφή των H1 , H2 : η u θα είναι κομβικό σημείο του G .

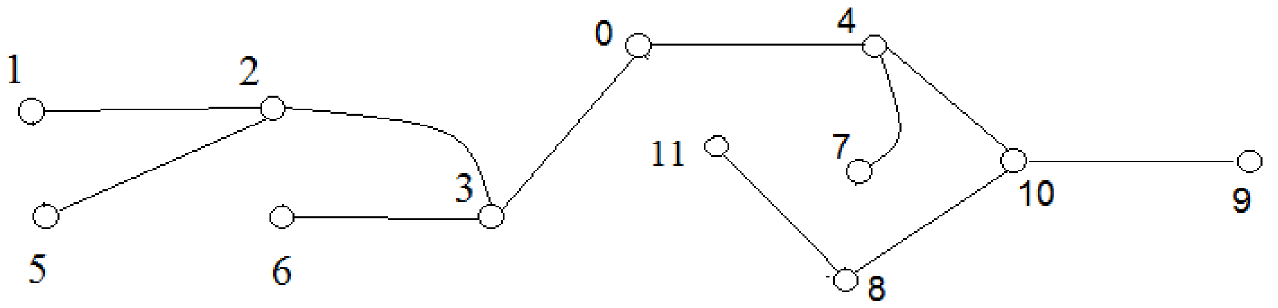
β Άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα δεν έχει κομβικό σημείο, θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

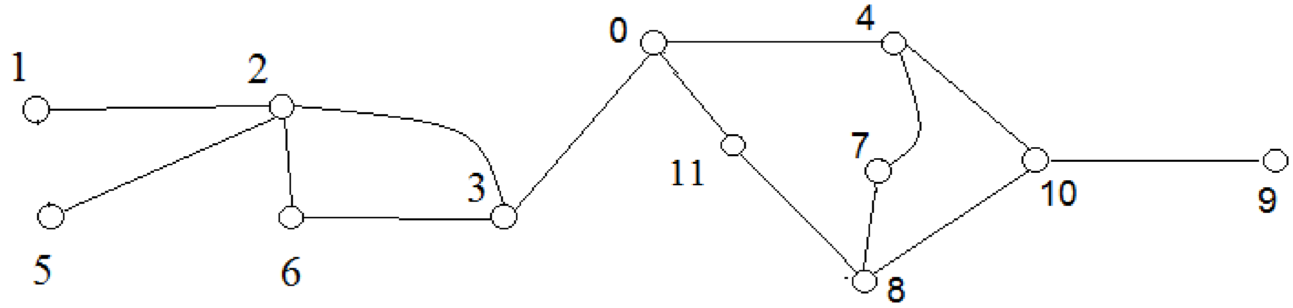
ΕΡΩΤΗΜΑ 7 Επιβεβαιώστε ότι:

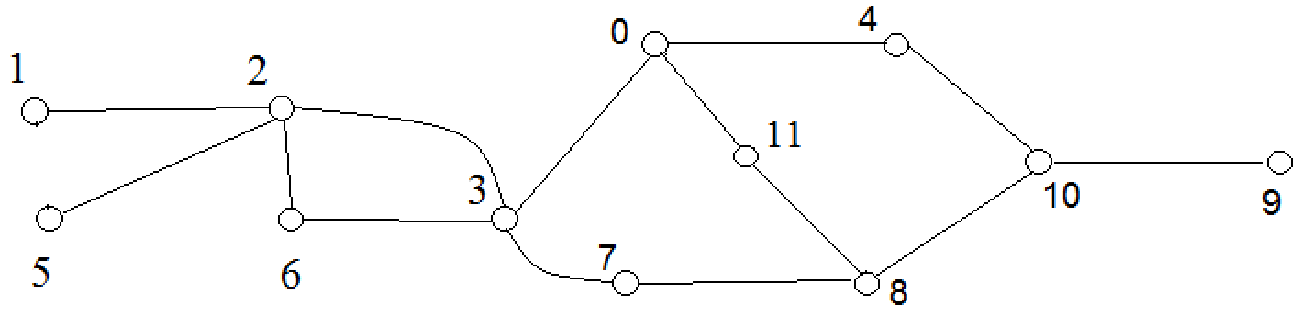
α Άν τα γραφήματα G1 , G2 είναι δισυνεκτικά ως προς κορυφές και έχουν τουλάχιστον δύο κοινές κορυφές: το γράφημα $G1 \cup G2$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

β Άν τα γραφήματα H1 , H2 είναι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος G : τα H1 , H2 δεν μπορούν να έχουν δύο (ή περισσότερες) κοινές κορυφές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 8 Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να είναι η σχέση R_κ μεταβατική στο G .







ΕΡΩΤΗΜΑ 9 Βρείτε μία συνθήκη για ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , που να είναι *ικανή και αναγκαία* για να ταυτίζονται οι σχέσεις R_κ , R_ι στο G .

ΕΡΩΤΗΜΑ 10 Επιβεβαιώστε ότι: Για κάθε κορυφή u που δεν είναι κομβικό σημείο ενός γραφήματος G , το *επαγόμενο* υπο-γράφημα του G με κορυφές $\delta(u) = \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \, R_\kappa \, x \}$
θα είναι δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές του G .