ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G θα είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων, *άν και μόνο άν* το G δεν έχει έχει απομονωμένες κορυφές, και έχει <u>μόνο άρτιους βαθμούς</u> (οι βαθμοί όλων των κορυφών του είναι άρτιοι αριθμοί).

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι:

α Άν $|A|$, $|B|$ άρτιοι, $|A \oplus B|$ θα είναι άρτιος.

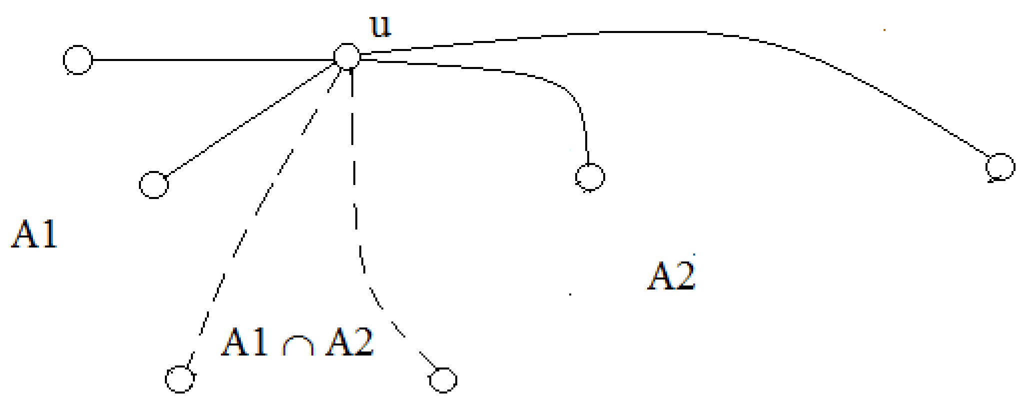
$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} |A \oplus B| &= |A \cup B| - |A \cap B| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - 2\,|A \cap B|\,. \end{aligned}$$

β Άν καθένα από τα γραφήματα H1 , H2 έχει μόνο άρτιους βαθμούς, το γράφημα $H1 \oplus H2$ θα έχει μόνο άρτιους βαθμούς.

Έστω u μία κορυφή του $H1 \oplus H2$,
A το σύνολο των ακμών του $H1 \oplus H2$ που προσπίπτουν στην u ,
A1 το σύνολο των ακμών του H1 που προσπίπτουν στην u ,
A2 το σύνολο των ακμών του H2 που προσπίπτουν στην u .

Θα έχουμε: $A = A1 \oplus A2$, $|A1|$, $|A2|$ άρτιοι. Άρα $|A|$ άρτιος.



$|A1| = 4$, $|A2| = 4$, $|A1 \cap A2| = 2$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Επιβεβαιώστε ότι: Άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων, το G θα έχει μόνο άρτιους βαθμούς.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 Επιβεβαιώστε ότι: Άν ένα γράφημα έχει μόνο άρτιους βαθμούς και έχει μία (τουλάχιστον) ακμή, θα περιέχει κύκλο.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Επιβεβαιώστε ότι: Άν ένα γράφημα έχει μόνο άρτιους βαθμούς και δεν έχει απομονωμένες κορυφές, θα είναι το άθροισμα κάποιων κύκλων.

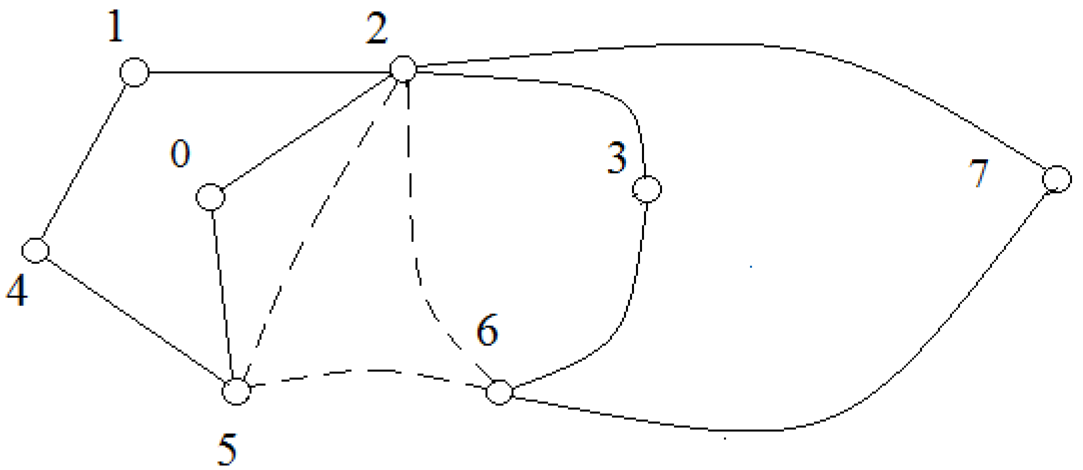
Η παρακάτω αναδρομική συνάρτηση σ(G) υπολογίζει, για κάθε γράφημα
G = (V, E) με μόνο άρτιους βαθμούς και χωρίς απομονωμένες κορυφές,
ένα *σύνολο κύκλων* του G *που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή*, έτσι ώστε:
το γράφημα G να είναι η ένωση των κύκλων του συνόλου σ(G) .

Όταν $E = \{\ \}$: $\Sigma = \varnothing$.

Όταν $E \neq \{\ \}$:

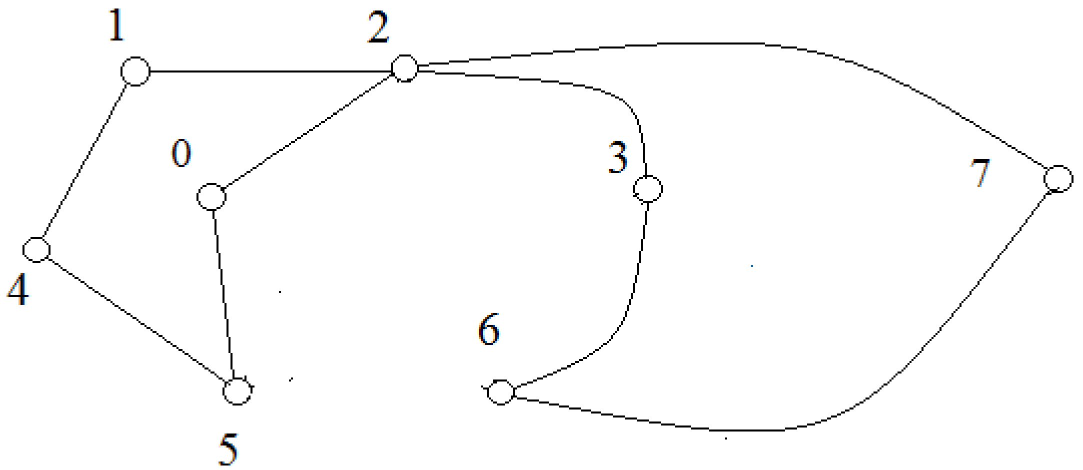
> Έστω C ένας κύκλος του G (βλέπε Ερώτημα 3).
>
> Αφαιρώντας από το G *τις ακμές του* C και όσες κορυφές
> έμειναν απομονωμένες, προκύπτει ένα γράφημα G1
> που έχει μόνο άρτιους βαθμούς.
>
> Υπολογίζεται *αναδρομικά* ένα σύνολο κύκλων σ(G1) του G1,
> που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή, έτσι ώστε:
> το γράφημα G1 να είναι η ένωση των κύκλων του συνόλου σ(G1).
>
> Επιστρέφεται το σύνολο κύκλων $\{C\} \cup \sigma(G1)$.

G



C : (2 _ 5 _ 6 _ 2)

G1



σ(G1) : { (1 _ 2 _ 0 _ 5 _ 4 _ 1) , (7 _ 2 _ 3 _ 6 _ 7) }

σ(G) : { (1 _ 2 _ 0 _ 5 _ 4 _ 1) , (2 _ 5 _ 6 _ 2) , (7 _ 2 _ 3 _ 6 _ 7) }

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΜΗ-ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ G

Διανύσματα Τα υπο-γραφήματα του G που:
έχουν άρτιους βαθμούς και δεν έχουν απομονωμένες κορυφές
= είναι ένωση κύκλων του G που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή
= είναι άθροισμα κύκλων του G

Πρόσθεση $H1 \oplus H2$

Μηδενικό διάνυσμα Το *κενό υπογράφημα* $\underline{0} = (\varnothing , \varnothing)$

$H \oplus H = \underline{0}$ $H \oplus \underline{0} = H$

Βαθμωτά $\{0 , 1\}$

$0+1 = 1+0 = 1$ $0+0 = 1+1 = 0$

$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Πολλαπλασιασμός βαθμωτού με διάνυσμα

$0 \cdot H = H \cdot 0 = \underline{0}$ $1 \cdot H = H \cdot 1 = H$

ΕΡΩΤΗΜΑ 5 Επιβεβαιώστε ότι οι παρακάτω ταυτότητες ισχύουν
στον διανυσματικό χώρο του G .

$(\lambda+\mu) \cdot \nu = (\lambda \cdot \nu) + (\mu \cdot \nu)$

$(\lambda+\mu) \cdot H = (\lambda \cdot H) \oplus (\mu \cdot H)$ $\lambda \cdot (H1 \oplus H2) = (\lambda \cdot H1) \oplus (\lambda \cdot H2)$

ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ
ΜΗ-ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ G

Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, και T ένα *δέντρο επικάλυψης* του G .

Για κάθε ακμή e του G που είναι χορδή ως προς το T :
Έστω c(T, e) *ο μοναδικός στοιχειώδης κύκλος ως προς το* T *που περιέχει την* e .

Ανάλυση κύκλου σε άθροισμα στοιχειωδών κύκλων

Έστω G , T όπως παραπάνω.
Έστω Θ ένας κύκλος του T , και γ1 ... γn (n > 1) οι ακμές του Θ
που είναι χορδές ως προς το δέντρο επικάλυψης T .

ΘΕΩΡΗΜΑ $\Theta = c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2)\ \ldots\ \oplus c(T, \gamma n)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εξετάζουμε το υπο-γράφημα του G ,

$$H = \Theta \oplus (\, c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2)\ \ldots\ \oplus c(T, \gamma n)\,) .$$

1 Το H δεν περιέχει καμμία χορδή του G ως προς το T .
Άρα, κάθε ακμή του H είναι ακμή του T .

2 Επειδή το H είναι άθροισμα κύκλων, θα έχει άρτιους βαθμούς.

3 Από τον ορισμό του αθροίσματος γραφημάτων,
το H δεν έχει απομονωμένες κορυφές.

4 Άρα -- από τα (2) και (3) -- το H θα είναι η ένωση (κορυφών και ακμών) κύκλων που δεν έχουν ανά δύο κοινή ακμή.

5 Από τα (1) και (4) το H δεν μπορεί να έχει ακμές: επομένως $H = \underline{0}$.

Αφού $\Theta \oplus (\, c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2)\ \ldots\ \oplus c(T, \gamma n)\,) = \underline{0}$, καταλήγουμε ότι

$$\Theta = c(T, \gamma 1) \oplus c(T, \gamma 2)\ \ldots\ \oplus c(T, \gamma n) .$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 6 Έστω G = (V, E) ένα συνεκτικό γράφημα. Αποδείξτε ότι:

α Για κάθε δέντρο επικάλυψης T του G , οι στοιχειώδεις κύκλοι του G ως προς το T αποτελούν *βάση* για τον διανυσματικό χώρο του G .

β Ο διανυσματικός χώρος του G έχει *διάσταση* |E|−|V|+1 .