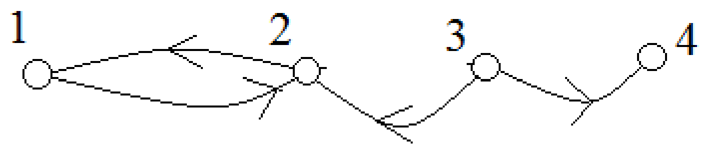
G



Για το παραπάνω γράφημα, ***βρείτε*:**

(1) Υπο-γραφήματα που να είναι *μέγιστα συνεκτικά*.

Ένα γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Για οποιεσδήποτε κορυφές x, y ($x \neq y$) : $\mathbf{R}_{\delta}(x, y) = \text{true}$.

(2) Επαγόμενα υπο-γραφήματα που να είναι

συνεκτικές συνιστώσες κορυφών: $H(u) = (\Sigma(u) , \Theta)$, όπου $u = 1, 2, 3, 4$

$\Sigma(u) = \{u\} \cup \{ x \mid$ αληθεύει ότι $u \mathbf{R}_{\delta} x \}$

Θ = *όλες* οι ακμές του G που συνδέουν κορυφές του $\Sigma(u)$

(3) Διαμερισμούς των κορυφών που να διαμερίζουν *και τις ακμές*,

και κάθε διαμέρισμα να είναι *συνεκτικό* υπο-γράφημα.

(4) Διαμερισμούς των κορυφών όπου:

όταν x, y ($x \neq y$) *είναι στο ίδιο διαμέρισμα*, $R_{\delta}(x, y) = \text{true}$
όταν x, y *δεν είναι στο ίδιο διαμέρισμα*, $R_{\delta}(x, y) = \text{false}$

Ισχυρή προσβασιμότητα

Για ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζουμε *ισχυρή προσβασιμότητα για το* G , την παρακάτω σχέση $R_{\delta\delta}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $R_{\delta\delta}(a, b)$ = true όταν:
$a \; R_\delta \; b$ και $b \; R_\delta \; a$

Συμβολισμός: $a \; R_{\delta\delta} \; b$ σημαίνει $R_{\delta\delta}(a, b)$ = true

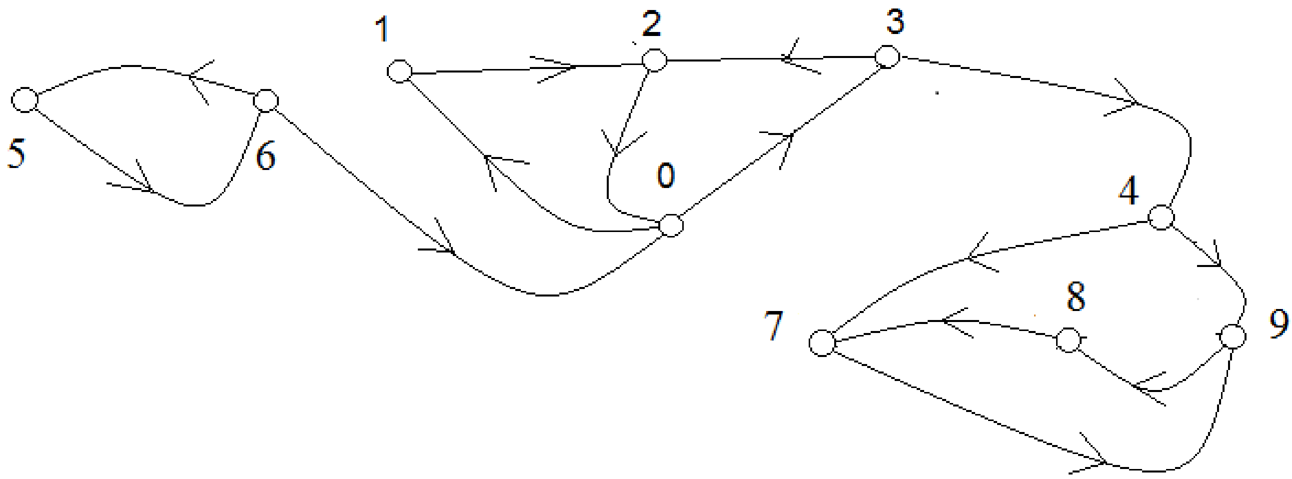
ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε γράφημα:

$a \; R_{\delta\delta} \; b$ *άν και μόνο άν*
υπάρχει κάποια *κλειστή διαδρομή* όπου εμφανίζονται οι a , b .

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Βρείτε ζεύγη κορυφών όπου αληθεύει / δεν αληθεύει η ισχυρή προσβασιμότητα.

Γ1



$R_{\delta\delta}(6, 5) = R_{\delta\delta}(3, 1) = R_{\delta\delta}(8, 8)$ = true

$R_{\delta\delta}(8, 4)$ = false

σε οποιαδήποτε διαδρομή με αρχή την κορυφή 8,
μπορούν να εμφανιστούν *μόνο* οι κορυφές 7, 8, 9.

$R_{\delta\delta}(4, 4)$ = false $R_{\delta\delta}(3, 6)$ = false

1 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) *, η ισχυρή προσβασιμότητα για το* G *είναι συμμετρική.*

<u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο V: $u \ R_{\delta\delta} \ v$ *implies* $v \ R_{\delta\delta} \ u$

Άν υπάρχει κάποια κλειστή διαδρομή όπου εμφανίζονται οι u και v , *η ίδια* κλειστή διαδρομή θα περιέχει τις κορυφές v και u .

2 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) *, η ισχυρή προσβασιμότητα για το* G *είναι μεταβατική.*

<u>Να δείξω ότι</u> ισχύει στο V: $(u \ R_{\delta\delta} \ \mathbf{v}$ *and* $\mathbf{v} \ R_{\delta\delta} \ w)$ *implies* $u \ R_{\delta\delta} \ w$

I) *Υποθέτω ότι αληθεύει* $\alpha \ R_{\delta\delta} \ \boldsymbol{\beta}$ *and* $\boldsymbol{\beta} \ R_{\delta\delta} \ \gamma$

Άρα $\alpha \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta}$ *and* $\boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \alpha$ *and* $\boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \gamma$ *and* $\gamma \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta}$

$\underline{\alpha \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta} \ \textit{and} \ \boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \gamma}$ *and* $\underline{\gamma \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta} \ \textit{and} \ \boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \alpha}$

II) *Θέλω να αληθεύει* $\alpha \ R_{\delta\delta} \ \gamma$

Δηλαδή να αληθεύει $\alpha \ R_{\delta} \ \gamma$ *and* $\gamma \ R_{\delta} \ \alpha$

Εφαρμόζω την μεταβατικότητα της R_{δ} στις περιπτώσεις:

$\underline{\alpha \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta} \ \textit{and} \ \boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \gamma}$ $\underline{\gamma \ R_{\delta} \ \boldsymbol{\beta} \ \textit{and} \ \boldsymbol{\beta} \ R_{\delta} \ \alpha}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ $R_{δδ}$

Για κάθε γράφημα G = (V, E) :

Υπάρχει διαμερισμός του V σε μη-κενά ξένα διαμερίσματα X1 ... Xκ , $κ \geq 1$, όπου:

(1) $V = X1 \cup ... \cup Xκ$,

(2) Για x, y οποιαδήποτε <u>διαφορετικά</u> στοιχεία του V :

όταν x, y είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u>, $R_{δδ}(x, y)$ = true

όταν x, y *δεν* είναι <u>στο ίδιο διαμέρισμα</u>, $R_{δδ}(x, y)$ = false

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ $R_{δδ}$

Κάθε στοιχείο u του v τοποθετείται σε αντίστοιχο διαμέρισμα ΙΣ(u) :

$$ΙΣ(u) = \{u\} \cup \{ z \mid R_{δδ}(u, z) = \text{true} \}$$