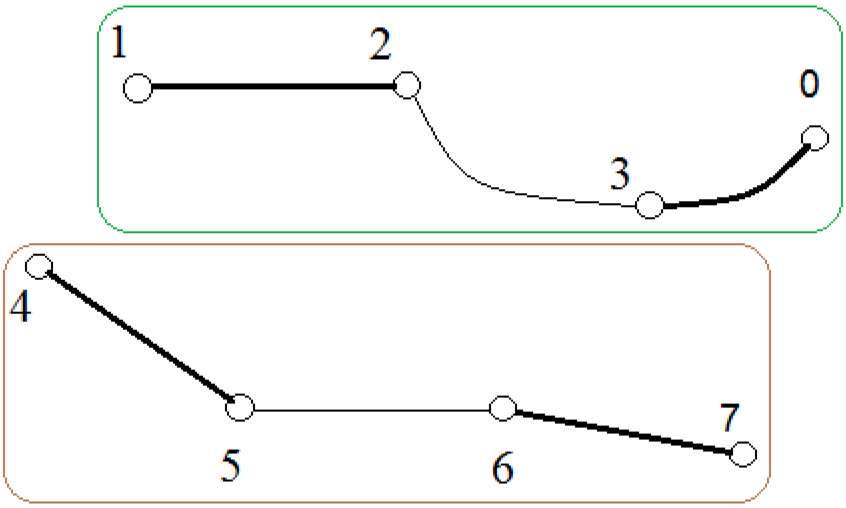
Ταίριασμα σε γράφημα

Για ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ονομάζουμε *ταίριασμα του* G ένα σύνολο ακμών που ανά δύο δεν έχουν κοινό άκρο.

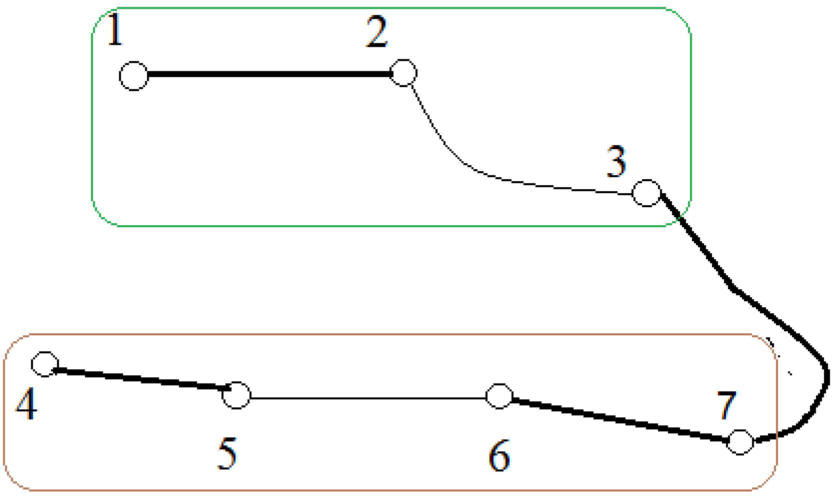
Γ1 = (V1, E1)



Διαμερισμός του **V1**
σε *μη-κενά ξένα* διαμερίσματα **X1** , **X2** :

X1 = {1, 2, 3, 0} **V1 = X1 ∪ X2**
X2 = {4, 5, 6, 7}

Γ2 = (V2, E2)



Y1 = {1, 2, 3} **V2 = Y1 ∪ Y2**
Y2 = {4, 5, 6, 7}

Τα σύνολα **Y1** , **Y2** *είναι διαμερισμός του* **V2** .

Για ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζουμε ***προσβασιμότητα για το* G** ,
την παρακάτω σχέση R_δ με πεδίο ορισμού το σύνολο V :

Για $a \in V$, $b \in V$, $R_\delta(a, b) = true$ όταν:
στο G υπάρχει μία (τουλάχιστον) διαδρομή με αρχή την a και τέλος την b .

Συμβολισμός: $a\ R_\delta\ b$ σημαίνει $R_\delta(a, b) = true$

1 *Για κάθε* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα* G *, η προσβασιμότητα για το* G *είναι συμμετρική.*

2 *Για κάθε γράφημα* G = (V, E) *, η προσβασιμότητα για το* G *είναι μεταβατική.*

Συνεκτικό γράφημα

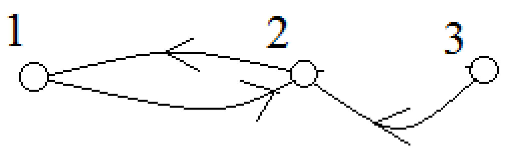
Ένα γράφημα G = (V, E) ονομάζεται **συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Για οποιαδήποτε <u>διαφορετικά</u> στοιχεία x, y του V : $R_\delta(x, y) = true$.

Ένα G = (V, E) είναι **μη-συνεκτικό** *μόνο όταν*:
Υπάρχουν δύο <u>διαφορετικά</u> στοιχεία x, y του V, ώστε: $R_\delta(x, y) = false$.

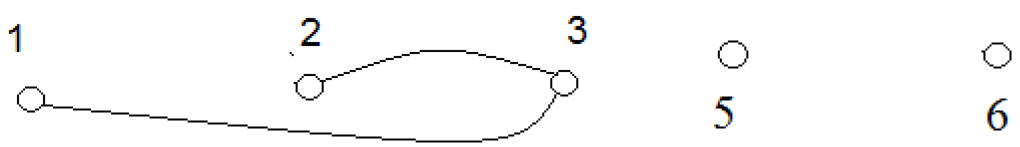
ΕΡΩΤΗΜΑ 1
Επιβεβαιώστε ότι: ένα γράφημα που έχει *μόνο μία κορυφή*, είναι συνεκτικό.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Βρείτε άν τα παρακάτω γραφήματα είναι συνεκτικά. Βρείτε συνεκτικά υπο-γραφήματά τους που να έχουν όσο το δυνατο περισσότερες κορυφές.

Δ1



Z1



ΕΡΩΤΗΜΑ 3Α Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα *συνεκτικό* γράφημα, και Υ1, Υ2 δύο <u>μη-κενά</u> <u>ξένα</u> υπο-σύνολα του V ώστε $V = Y1 \cup Y2$.

Αποδείξτε ότι: Υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του Υ1 και με τέλος κορυφή του Υ2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ι) *Δεδομένα*

$\Gamma = (V, E)$ *δεδομένο* συνεκτικό γράφημα

Υ1, Υ2 *δεδομένα* μη-κενά ξένα υπο-σύνολα του V , όπου $Y1 \cup Y2 = V$

ΙΙ) ***Ζητούμενα***

Δύο κορυφές $a \in Y1$, $b \in Y2$ που συνδέονται με ακμή: (a, b) είτε $\{a, b\}$.

Διαδικασία εύρεσης των ζητουμένων

Έστω κορυφές u, v του Γ όπου $u \in Y1$ και $v \in Y2$.

Επειδή το Γ είναι συνεκτικό, υπάρχει διαδρομή δ με αρχή την u και τέλος την v :
$\delta = (u , e_1 , x_1 , \ldots e_m , v)$.

Επειδή $v \in Y2$, δεν είναι όλες οι κορυφές της διαδρομής στο Υ1. Παρακολουθώντας την ακολουθία κορυφών που εμφανίζονται στην διαδρομή, εντοπίζουμε την *τελευταία* κορυφή μετά την u που ανήκει στο Υ1 : έστω x_K αυτή η κορυφή. Τότε

$$\delta = (u , e_1 , x_1 , \ldots , \mathbf{x_K} , e_{K+1} , \mathbf{x_{K+1}} , \ldots e_m , v) , \text{ όπου } x_K \in Y1 , \ x_{K+1} \in Y2 ,$$

και η ακμή e_{K+1} συνδέει τις κορυφές x_K , x_{K+1} : $e_{K+1} = (x_K , x_{K+1})$ είτε $e_{K+1} = \{x_K , x_{K+1}\}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 3Β Έστω $\Gamma = (V, E)$ ένα γράφημα όπου, για οποιαδήποτε επιλογή δύο <u>μη-κενών</u> <u>ξένων</u> υπο-συνόλων $Y1, Y2$ του V ώστε $V = Y1 \cup Y2$, υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του $Y1$ και με τέλος κορυφή του $Y2$.
Αποδείξτε ότι: Το Γ θα είναι *συνεκτικό*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

I) *Δεδομένα*

i) $\Gamma = (V, E)$ *δεδομένο* γράφημα με την ιδιότητα ότι:
για οποιαδήποτε επιλογή δύο <u>μη-κενών</u> <u>ξένων</u> υπο-συνόλων του V, $Y1, Y2$, ώστε $V = Y1 \cup Y2$, υπάρχει ακμή του Γ με αρχή κορυφή του $Y1$ και με τέλος κορυφή του $Y2$

ii) Δύο κορυφές $u \neq v$ του Γ

II) ***Ζητούμενα***
Διαδρομή του Γ με αρχή την u και με τέλος την v

Διαδικασία εύρεσης των ζητουμένων

Έστω τα υπο-σύνολα του V: $Y1 = \{u\}$, $Y2 = V - \{u\}$.
Τα $Y1, Y2$ είναι μη-κενά και ξένα, και $V = Y1 \cup Y2$.

Ενημερώνουμε *επαναληπτικά* τα $Y1, Y2$ έτσι ώστε μετά από κάθε ενημέρωση να αληθεύει ότι:

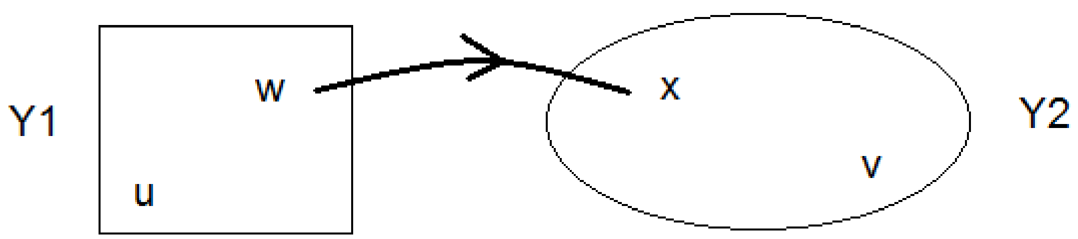
(1) τα $Y1, Y2$ παραμένουν μη-κενά και ξένα, και $V = Y1 \cup Y2$

(2) για κάθε κορυφή $z \neq u$ του $Y1$, υπάρχει διαδρομή του Γ με αρχή την κορυφή u και με τέλος την κορυφή z.

Κάθε ενημέρωση γίνεται ως εξής:

1. Επιλέγουμε ακμή του Γ (υπάρχει λόγω της δεδομένης ιδιότητας του Γ) με αρχή κορυφή w του $Y1$ και με τέλος κορυφή x του $Y2$
2. Μετακινούμε την κορυφή x από το $Y2$ στο $Y1$.

Οι ενημερώσεις σταματούν όταν $Y2 = \{v\}$.



ΕΡΩΤΗΜΑ 3Γ Ελέγξτε ότι μετά από κάθε ενημέρωση των $Y1, Y2$ θα αληθεύουν οι συνθήκες (1), (2).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V ένα σύνολο, και X1 … Xκ , $\kappa \geq 1$ μία *οικογένεια υπο-συνόλων* του V .
Τα σύνολα $\{ X_j \mid j = 1, \ldots \kappa \}$ είναι *διαμερισμός* του V μόνο όταν:

1 Είναι μη-κενά και ξένα μεταξύ τους,

2 $V = X1 \cup \ldots X\kappa$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ

Για κάθε *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) , υπάρχει διαμερισμός X1 … Xκ του V , όπου:

(1) Κάθε διαμέρισμα X_j είναι *συνεκτικό*

(2) Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V σε διαφορετικά διαμερίσματα,
$R_\delta(x, y) = \text{false}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 Έστω ένα *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα G = (V, E) ,
και X1 … Xκ ένας διαμερισμός του V όπου:

Δεν υπάρχει ακμή {x, y} του G
που τα άκρα της να ανήκουν σε διαφορετικά διαμερίσματα.

Αποδείξτε ότι:

1 Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του V
σε διαφορετικά διαμερίσματα, $R_\delta(x, y) = \text{false}$.

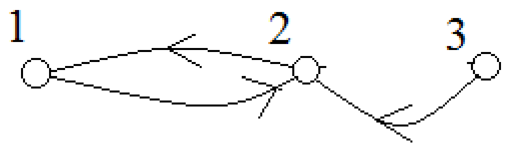
2 Άν Θ είναι ένα συνεκτικό υπο-γράφημα του G :
Οι κορυφές του Θ θα βρίσκονται όλες στο ίδιο διαμέρισμα.

Άν το G είναι συνεκτικό: θα έχουμε κ = 1
(το μοναδικό σύνολο τού διαμερισμού θα είναι το V) .

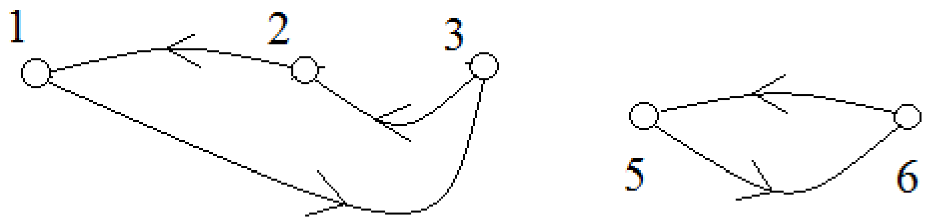
ΕΡΩΤΗΜΑ 5

Μπορείτε να βρείτε διαμερισμούς, σύμφωνους με το συμπέρασμα του Θεωρήματος για την προσβασιμότητα, στα παρακάτω γραφήματα;

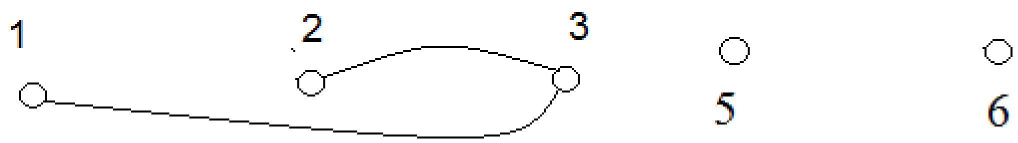
Δ1



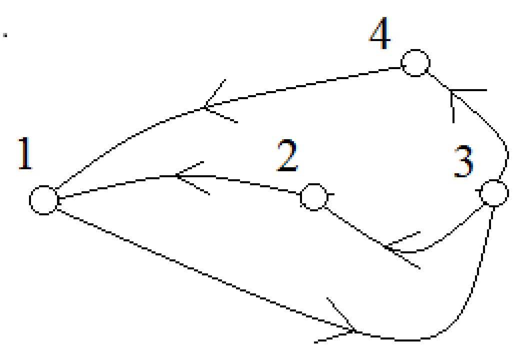
Ε1



Ζ1



Δ2



Παρατήρηση: Το Δ2 είναι *συνεκτικό*