Θεωρία Γραφημάτων και Εφαρμογές - Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ
Σεπτέμβριος 2017

Όλα τα γραφήματα είναι μη-κατευθυνόμενα*, αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο.*

ΕΓΘΑ : Σ. Κοσμαδάκης, «Εισαγωγή στα Γραφήματα, Θεωρία-Ασκήσεις».

Α1 Έστω τα σύνολα $S_1 = \{1 , 2\}$ και $S_2 = \{0 , 2\}$.
α Είναι η σχέση $\{ (z , w) \mid z-w = 1 \}$ συμμετρική στο S_1 ; Είναι συμμετρική στο S_2 ;
β Είναι η σχέση $\{ (z , w) \mid z-w = 1$ ή $z-w = -1 \}$ μεταβατική στο S_1 ; Είναι μεταβατική στο S_2 ;
Είναι απαραίτητο να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας.

α Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *συμμετρική* αν:
όταν ισχύει x R y , θα ισχύει και y R x – βλέπε *ΕΓΘΑ* 1.2.

Έστω η σχέση $Q = \{ (z , w) \mid z-w = 1 \}$ πάνω στο $S_1 = \{1 , 2\}$:
για τα στοιχεία $x = 2$, $y = 1$ του S_1 , ισχύει x Q y , αλλά δεν ισχύει y Q x ,
οπότε αυτή η τριάδα είναι αντιπαράδειγμα για την συμμετρία της Q .
Άρα, <u>η Q δεν είναι συμμετρική στο S_1</u>.

Έστω η σχέση $Q = \{ (z , w) \mid z-w = 1 \}$ πάνω στο $S_2 = \{0 , 2\}$:
η Q είναι κενή στο S_2 , οπότε δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα για την συμμετρία της Q .
Άρα, <u>η Q είναι συμμετρική στο S_2</u>.

β Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *μεταβατική* αν:
όταν ισχύει x R y και y R z , θα ισχύει και x R z – βλέπε *ΕΓΘΑ* 1.2.

Έστω η σχέση $Q = \{ (z , w) \mid z-w = 1$ ή $z-w = -1 \}$ πάνω στο $S_1 = \{1 , 2\}$:
για τα στοιχεία $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ του S_1 , ισχύει x Q y και y Q z , αλλά δεν ισχύει x Q z ,
οπότε αυτή η τριάδα είναι αντιπαράδειγμα για την μεταβατικότητα της Q .
Άρα, <u>η Q δεν είναι μεταβατική στο S_1</u>.
Επίσης, αντιπαράδειγμα για την μεταβατικότητα της Q στο S_1 είναι και η εξής τριάδα:
$x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

Έστω η σχέση $Q = \{ (z , w) \mid z-w = 1$ ή $z-w = -1 \}$ πάνω στο $S_2 = \{0 , 2\}$:
η Q είναι κενή στο S_2 , οπότε δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα για την μεταβατικότητα της Q .
Άρα, <u>η Q είναι μεταβατική στο S_2</u>.

A2 Να αποδειχτεί ότι: οι κορυφές οποιουδήποτε δέντρου μπορούν να διαμεριστούν σε δύο υποσύνολα (διαμερίσματα), έτσι ώστε: κάθε ακμή του δέντρου να έχει τα άκρα της σε διαφορετικά διαμερίσματα. Χρησιμοποιείστε την επαγωγή για τα δέντρα.

Για την επαγωγή για τα δέντρα, βλέπε *ΕΓΘΑ 3.1*.

Εργαζόμαστε όπως για την Πρόταση 3.1.2: αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η ζητούμενη ιδιότητα ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(n), για κάθε $n \geq 1$.

Αρχική περίπτωση $n = 1$

Κάθε γράφημα στην T(1) έχει μόνο μία κορυφή και καμμία ακμή.
Αφού δεν υπάρχουν ακμές ώστε να διαψευστεί το ζητούμενο, ισχύει.

Επαγωγικό βήμα Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = i-1 \geq 1$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = i$.

Αν το δέντρο G είναι στην T(i), $i>1$, θα είναι $G = (V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b\}\})$,
όπου $G' = (V, E)$ είναι δέντρο της υπο-κλάσης $T(i-1)$, και $a \notin V$, $b \in V$.

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει τρόπος να διαμεριστούν οι κορυφές του G′ σε δύο υποσύνολα, έστω V_1 και V_2 , έτσι ώστε: κάθε ακμή του G′ να έχει τα άκρα της σε διαφορετικά διαμερίσματα.

Για να διαμερίσουμε τις κορυφές του G : χρησιμοποιούμε τον παραπάνω διαμερισμό των κορυφών του G′ , και τοποθετούμε την κορυφή a -- τη μοναδική κορυφή του G που δεν είναι και κορυφή του G′ -- στο διαμέρισμα που *δεν* βρίσκεται η κορυφή b.

Κάθε ακμή του G θα έχει τα άκρα της σε διαφορετικά διαμερίσματα: για τις ακμές του G′ αυτό ισχύει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Για την ακμή {a, b} -- τη μοναδική ακμή του G που δεν είναι και ακμή του G′ -- ισχύει επειδή η κορυφή a τοποθετήθηκε στο διαμέρισμα που δεν βρίσκεται η κορυφή b.

B1 Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, βρείτε άν <u>*ισχύει*</u> ή <u>*δεν ισχύει*</u>.
Δεν είναι απαραίτητο να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας.

1 Για κάθε γράφημα G, η παρακάτω σχέση ανάμεσα στις κορυφές του είναι μεταβατική:
{ (u, v) | υπάρχει ένα κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις u , v } .

ΙΣΧΥΕΙ Έστω Q = { (u, v) | υπάρχει ένα κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις u , v } η σχέση της εκφώνησης, πάνω στο σύνολο των κορυφών ενός γραφήματος G.
Έστω ότι, για τις κορυφές a , b , c του G , ισχύει a Q b και b Q c .

Άν c = a : το κλειστό ίχνος του G που περιέχει τις a , b περιέχει τις a , a -- δηλαδή, περιέχει τις a , c. Άρα ισχύει a Q c .

Άν $c \neq a$: γνωρίζουμε -- βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.2.4. -- ότι υπάρχει μία μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές του G -- έστω H -- που περιέχει την κορυφή b .
Οι κορυφές της H είναι W = {b} ∪ { u | υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις b , u}.
Επειδή έχουμε a Q b και b Q c , οι κορυφές a , c θα ανήκουν στην H.

Γνωρίζουμε -- βλέπε *Ορισμός δισυνεκτικής συνιστώσας ως προς ακμές, ΕΓΘΑ* 4.2. -- ότι το γράφημα H είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές. Επομένως, υπάρχουν δύο μονοπάτια με αρχή την a και τέλος τη c, χωρίς κοινές ακμές. Άρα ισχύει a Q c .

Σε κάθε περίπτωση ισχύει a Q c , οπότε η σχέση Q είναι μεταβατική στο (τυχαίο) G.

2 Άν μία ακμή ενός γραφήματος είναι γέφυρα, δεν μπορεί να περιέχεται σε κύκλο.

ΙΣΧΥΕΙ Βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.3.1.

3 Άν ένα γράφημα περιέχει μία κλειστή διαδρομή, θα περιέχει και κάποιο κύκλο.

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Ένα γράφημα με ακριβώς μία ακμή e = {a , b}, περιέχει κλειστές διαδρομές -- για παράδειγμα, τις (a, e, b, e, a) , (b, e, a, e, b, e, a, e, b) κοκ -- αλλά δεν περιέχει κύκλο.
Βλέπε και *ΕΓΘΑ* 2.2.

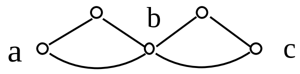
4 Κάθε γράφημα με n κορυφές και m ακμές, έχει ακριβώς m–n+1 στοιχειώδεις κύκλους.

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Άν Σε ένα γράφημα που αποτελείται από δύο απομονωμένες κορυφές έχουμε n=2 και m=0 , οπότε m–n+1 = –1 !
Η πρόταση ισχύει για τα συνεκτικά γραφήματα και *μόνο* γι' αυτά. Βλέπε *ΕΓΘΑ* 3.3.

B2 Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, βρείτε ένα γράφημα όπου <u>*δεν ισχύει*</u>.
Είναι απαραίτητο να δικαιολογήσετε επαρκώς τις απαντήσεις σας. .

1 Για κάθε γράφημα G, η παρακάτω σχέση ανάμεσα στις κορυφές του είναι μεταβατική:
{ (u, v) | υπάρχει ένας κύκλος του G που περιέχει τις u , v } .

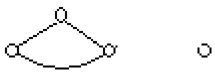
Έστω Q = { (u, v) | υπάρχει ένας κύκλος του G που περιέχει τις u , v }
η σχέση της εκφώνησης, πάνω στο σύνολο των κορυφών του παρακάτω γραφήματος G:



Ισχύει a Q b και b Q c . Όμως, κάθε κλειστή διαδρομή που περιέχει τις a , c
θα επαναλαμβάνει την κορυφή c -- επομένως δεν ισχύει a Q c .
Άρα, η σχέση Q δεν είναι μεταβατική στο γράφημα G.

2 Άν ένα γράφημα με n κορυφές περιέχει κύκλο, θα έχει τουλάχιστον n ακμές.

Το παρακάτω μη-συνεκτικό γράφημα έχει 4 κορυφές και 3 ακμές, και περιέχει κύκλο.



<u>Σημείωση</u> Κάθε *συνεκτικό* γράφημα με n κορυφές που περιέχει κύκλο,
έχει τουλάχιστον n ακμές (γιατί;)

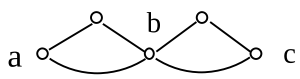
3 Άν η σχέση { (u , v) | υπάρχει διαδρομή του G από την u στη v } ανάμεσα στις κορυφές
ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι συμμετρική: το G θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

Έστω G ένα γράφημα που αποτελείται από δύο απομονωμένες κορυφές:

Στο γράφημα G δεν υπάρχει διαδρομή μεταξύ των δύο κορυφών του,
οπότε το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.
Επίσης, η σχέση { (u , v) | υπάρχει διαδρομή του G από την u στη v } ανάμεσα στις κορυφές
του G είναι κενή, οπότε δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα για την συμμετρία της -- άρα, η σχέση
είναι συμμετρική.
Ενα άλλο παράδειγμα είναι το γράφημα

4 Άν ένα συνεκτικό γράφημα έχει κομβικό σημείο, δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Έστω G το παρακάτω γράφημα:



Η κορυφή b είναι κομβικό σημείο, επειδή δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις ακμές
{b, a} και {b, c} -- βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.3.2.

Το G δεν έχει γέφυρες, επειδή κάθε ακμή του περιέχεται σε κάποιο κύκλο -- *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.3.1.
Επομένως, από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.2.2, το G είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές

Γ1 Αποδείξτε τα παρακάτω, χρησιμοποιώντας ιδιότητες από τη θεωρία.

1 Άν ένα γράφημα περιέχει ένα κλειστό ίχνος, θα περιέχει και κάποιο κύκλο.

Έστω ένα κλειστό ίχνος $\delta = (a, e, a_1, e_1, ..., a_n, e_n, a_{n+1})$, όπου $a_{n+1} = a$, $n \geq 1$.

Θεωρούμε το ίχνος $\delta_1 = (a_1, e_1, ..., a_n, e_n, a_{n+1})$: επειδή $a_{n+1} = a \neq a_1$ (αλλοιώς η ακμή e θα ήταν βρόχος) υπάρχει μονοπάτι μ με αρχή την a_1 και τέλος την $a_{n+1} = a$, το οποίο προκύπτει με απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών στο δ_1 -- βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.2.1.

Από τον τρόπο που γίνεται η απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών, οι ακμές του μ θα είναι και ακμές του ίχνους δ_1. Επειδή το δ είναι ίχνος, η ακμή $e = \{a, a_1\}$ δεν εμφανίζεται στο δ_1 , οπότε δεν θα εμφανίζεται ούτε στο μονοπάτι μ. Άρα, το μ μαζύ με την ακμή e σχηματίζουν ένα κύκλο.

<u>Σημείωση</u> Άν η κλειστή διαδρομή δ δεν είναι ίχνος, δεν προκύπτει πάντα κύκλος.
Βλέπε *ΕΓΘΑ Ασκήσεις* 2.5, 2.

2 Άν σε ένα συνεκτικό γράφημα υπάρχουν δύο τουλάχιστον (διαφορετικές) δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές, θα υπάρχει γέφυρα.

Από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.2.4.: Για κάθε κορυφή a ενός συνεκτικού γραφήματος G, υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές που περιέχει την a, και οι κορυφές της είναι $\{a\} \cup \{ u \mid$ υπάρχει κλειστό ίχνος που περιέχει τις κορυφές a, u $\}$.
Επομένως, άν υπάρχουν δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές, θα υπάρχουν δύο κορυφές a , b που δεν περιέχονται σε κάποιο κλειστό ίχνος.
Από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.2.4., θα υπάρχει ακμή e του G τέτοια ώστε: οι κορυφές a, b να μην είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G-e$. Οπότε το $G-e$ έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες, άρα η ακμή e είναι γέφυρα (βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.3.)

3 Άν τα κατευθυνόμενα γραφήματα $G_1 = (V_1 , E_1)$, $G_2 = (V_2 , E_2)$ έχουν (τουλάχιστον μία) κοινή κορυφή και είναι ισχυρά συνεκτικά: το γράφημα $G = (V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2)$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

Έστω a μία κοινή κορυφή των G_1 , G_2 . Από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.3.4., γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα $H = (W, K)$ του G που περιέχει την a, και οι κορυφές της είναι $W = \{a\} \cup \{ u \mid$ υπάρχει κλειστή διαδρομή του G που περιέχει τις κορυφές a, u $\}$.
Επειδή τα G_1 , G_2 είναι ισχυρά συνεκτικά (βλέπε *ΕΓΘΑ* 4.3.) και η a είναι κοινή τους κορυφή, θα έχουμε $V_1 \subseteq W$ και $V_2 \subseteq W$, άρα $V_1 \cup V_2 = W$.
Επειδή κάθε ακμή με άκρα στο W είναι και ακμή της H, θα έχουμε $H = G$.
Άρα το G είναι ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G, που σημαίνει ότι είναι ισχυρά συνεκτικό (*ΕΓΘΑ* 4.3.)

Γ2 Αποδείξτε τα παρακάτω, χρησιμοποιώντας ιδιότητες από τη θεωρία.

1 Άν μία κορυφή w ενός γραφήματος G είναι κομβικό σημείο, και το G δεν έχει γέφυρες: η κορυφή w θα ανήκει σε δύο τουλάχιστον (διαφορετικές) δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές.

Από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.1.4. γνωρίζουμε ότι, άν μία ακμή e δεν είναι γέφυρα, υπάρχει μοναδική δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές $H = (W, K)$ που περιέχει την e, και είναι $K = \{e\} \cup \{ e' \mid$ υπάρχει κύκλος που περιέχει τις ακμές e, e'$\}$,
$W = \{ u \mid$ η u είναι κορυφή κάποιας ακμής στο K$\}$.

Επειδή η κορυφή w είναι κομβικό σημείο, από την *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.3.2. υπάρχουν ακμές $e_1=\{w, x\}$ και $e_2=\{w, y\}$, ώστε να μην υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις e_1 , e_2 -- επίσης, από την υπόθεση οι ακμές e_1 , e_2 δεν είναι γέφυρες.

Έστω $H_1 = (W_1, K_1)$, $H_2 = (W_2, K_2)$ οι δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές που περιέχουν τις e_1 , e_2 αντίστοιχα. Επειδή $e_1 \in K_1$ θα έχουμε $w \in W_1$ -- αντίστοιχα, $w \in W_2$.

Επειδή δεν υπάρχει κύκλος που να περιέχει τις e_1 , e_2 , θα έχουμε $e_1 \notin K_2$ και $e_2 \notin K_1$, που σημαίνει ότι οι H_1 , H_2 είναι διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές.

2 Κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και n+2 ακμές, περιέχει το πολύ επτά κύκλους.

Σε οποιοδήποτε γράφημα, κάθε κύκλος είναι είτε στοιχειώδης είτε το άθροισμα κάποιων στοιχειωδών κύκλων – βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 3.3.1. Άρα, οι μόνοι δυνατοί κύκλοι είναι οι τρείς στοιχειώδεις, και όποια από τα αθροίσματά τους είναι κύκλοι.

Οι στοιχειώδεις κύκλοι – *ΕΓΘΑ* 3.3 – είναι όσες οι χορδές του γραφήματος ως προς κάποιο δέντρο επικάλυψης, δηλαδή $(n+2)-(n-1) = 3$.
Τα (διαφορετικά μεταξύ τους) αθροίσματα στοιχειωδών κύκλων είναι: τρία αθροίσματα δύο κύκλων, και ένα άθροισμα τριών κύκλων.
Συνολικά, οι δυνατοί κύκλοι είναι το πολύ $3+3+1 = 7$.