ΘΕ6 – Ισχυρή Συνεκτικότητα και Δισυνεκτικότητα ως προς Ακμές

Ισχυρή συνεκτικότητα, ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

Ισχυρή προσβασιμότητα

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, ονομάζουμε *ισχυρή προσβασιμότητα για το* G, την παρακάτω σχέση $R_{\delta\delta}$ πάνω στο σύνολο V:

$a\, R_{\delta\delta}\, b$ όταν: το G έχει μία κλειστή διαδρομή, με την κορυφή a και με την κορυφή b.

Παρατήρηση 1

- $a\, R_{\delta\delta}\, b$, αν και μόνο αν: $a\, R_{\delta}\, b$ και $b\, R_{\delta}\, a$.
- Για οποιοδήποτε μη-κατευθυνόμενο γράφημα, η ισχυρή προσβασιμότητα ταυτίζεται με την προσβασιμότητα – τη σχέση R_{δ}.

Παρατήρηση 2

- Για οποιοδήποτε γράφημα G, η ισχυρή προσβασιμότητα για το G είναι μεταβατική σχέση – βλέπε τη «Συγχώνευση διαδρομών».
- Για οποιοδήποτε γράφημα G, η ισχυρή προσβασιμότητα για το G είναι συμμετρική σχέση.
- Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, η σχέση $R^0_{\delta\delta}$ πάνω στο σύνολο V είναι σχέση ισοδυναμίας:

  $a\, R^0_{\delta\delta}\, b$ όταν: το G έχει μία κλειστή διαδρομή με την κορυφή a και με την κορυφή b, είτε $a=b$.

Ισχυρά συνεκτικό γράφημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται *ισχυρά συνεκτικό,* όταν:

Η δήλωση “ $x\, R_{\delta\delta}\, y$ είτε $x=y$ ” ισχύει στο V.

Παρατήρηση 3

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι ισχυρά συνεκτικό, ανν:

Η δήλωση “ ‘ $x\, R_{\mu}\, y$ και $y\, R_{\mu}\, x$ ’ είτε $x=y$ ” ισχύει στο V.

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα κατευθυνόμενου γραφήματος

Ένα υπο-γράφημα $H = (W, Z)$ του κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$, ονομάζεται *ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του* G, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

A 1) Το H είναι ισχυρά συνεκτικό, και

2) Κάθε υπο-γράφημα του G που επεκτείνει το H, προσθέτοντας στο H κορυφές είτε ακμές του G, δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.

Ένα υπο-γράφημα του G για το οποίο ισχύουν οι συνθήκες $(1, 2)$, ονομάζεται *μέγιστο ισχυρά συνεκτικό* υπο-γράφημα του G.

B Το $H = (W, Z)$ είναι επαγόμενο υπο-γράφημα του G, και το υπο-σύνολο W του V είναι κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $R^0_{\delta\delta} = \{ (a, b) \mid a\, R_{\delta\delta}\, b \text{ είτε } a=b \}$, πάνω στο V.

Γ 1) Για *οποιαδήποτε* κορυφή a του H , $W = \{a\} \cup \{ z \mid a R_{\delta\delta} z \}$.

2) Το Z περιέχει όλες τις ακμές του E , που τα άκρα τους είναι στο W .

Σημείωση Οι συνθήκες (A) , (B) είναι ισοδύναμες (Άσκηση 3).

Οι συνθήκες (Γ) , (B) είναι ισοδύναμες (βλέπε τον «Εγκλεισμό κλάσεων ισοδυναμίας»).

<u>Παρατήρηση 4</u>

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι ισχυρά συνεκτικό, αν και μόνο αν το G είναι η μοναδική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G .

Ιδιότητες των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $H_j = (W_j , Z_j)$, j = 1, ..., n , οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος G = (V, E) .

α Τα σύνολα W_j , j = 1, ..., n , αποτελούν διαμερισμό του V .

β Για κάθε x , y στο V ,

$x R_{\delta\delta} y$ είτε x=y αν και μόνο αν τα x , y ανήκουν στο ίδιο σύνολο W_j .

Σημείωση Οι ιδιότητες (α) , (β) , προκύπτουν από τις αντίστοιχες «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αποδείξτε ότι: Για οποιοδήποτε γράφημα G , η ισχυρή προσβασιμότητα για το G , είναι μεταβατική και συμμετρική.

2 Αποδείξτε ότι: ένα κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) είναι ισχυρά συνεκτικό, αν και μόνο αν: Η δήλωση “ ‘ $x R_\mu y$ και $y R_\mu x$ ’ είτε x=y ” ισχύει στο V .

3 Αποδείξτε την ισοδυναμία των συνθηκών (A) και (B) για την «Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα κατευθυνόμενου γραφήματος». Χρησιμοποιείστε την (β) από τις «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας» .

4 Έστω ότι τα H_1 , H_2 είναι διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G . Αποδείξτε ότι:

α τα H_1 , H_2 δεν θα έχουν κοινή κορυφή,

β στο G δεν θα υπάρχει κλειστή διαδρομή, με κορυφή του H_1 και με κορυφή του H_2 .

5 **α** Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G , με δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H_1 , H_2 , όπου: υπάρχουν ακμές του G , από το H_1 στο H_2 .

β Αποδείξτε ότι: άν ένα κατευθυνόμενο γράφημα G , με δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H_1 , H_2 , έχει ακμές από το H_1 στο H_2 , δεν μπορεί να έχει ακμές από το H_2 στο H_1 .

6 Έστω ότι τα $H_1 = (W_1 , Z_1)$, $H_2 = (W_2 , Z_2)$, είναι ισχυρά συνεκτικά υπο-γραφήματα ενός γραφήματος $G = (V, E)$. Αποδείξτε ότι:

α Άν τα H_1 , H_2 έχουν (μία τουλάχιστον) κοινή κορυφή, το γράφημα $(W_1 \cup W_2 , Z_1 \cup Z_2)$ θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

β Έστω ότι στο G υπάρχει κλειστή διαδρομή δ , με κορυφή του W_1 και με κορυφή του W_2 . Το υπο-γράφημα του G που αποτελείται από: το γράφημα $(W_1 \cup W_2 , Z_1 \cup Z_2)$, μαζύ με τις κορυφές και τις ακμές του G που εμφανίζονται στην κλειστή διαδρομή δ , θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

7 Έστω ότι (i) το $H = (W , Z)$ είναι ισχυρά συνεκτικό υπο-γράφημα ενός γραφήματος $G = (V, E)$, και (ii) στο G υπάρχει διαδρομή δ , με άκρα στο W .
Αποδείξτε ότι: Το υπο-γράφημα του G , που αποτελείται από το H μαζύ με τις κορυφές και τις ακμές του G που εμφανίζονται στη διαδρομή δ , θα είναι ισχυρά συνεκτικό.

8 Αποδείξτε ότι: κάθε κατευθυνόμενο γράφημα έχει μία (τουλάχιστον) ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H , ώστε να μην υπάρχει ακμή, του G , από κορυφή του H σε κορυφή που δεν είναι στο H .

9 Έστω u , v δύο κορυφές ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$.
Ένας διαμερισμός των κορυφών του G σε δύο υπο-σύνολα A , B *διαχωρίζει* τις u , v , αν:

(1) Η u ανήκει στο A και η v ανήκει στο B

(2) *Είτε* κάθε ακμή του G μεταξύ των A , B αρχίζει στο A και καταλήγει στο B ,
ή , κάθε ακμή του G μεταξύ των A , B , αρχίζει στο B και καταλήγει στο A .

α Αποδείξτε ότι: αν υπάρχει διαμερισμός των κορυφών του G που διαχωρίζει τις u , v , οι κορυφές u , v δεν θα είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G .

β Αποδείξτε ότι: αν οι κορυφές u , v δεν είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G , θα υπάρχει διαμερισμός των κορυφών του G που διαχωρίζει τις u , v.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

4.3 Ισχυρή συνεκτικότητα

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

10.4 Connectivity : Connectedness in Directed Graphs.