ΘΕ3 – Συνεκτικότητα

Συνεκτικά γραφήματα, συνεκτικές συνιστώσες

Προσβασιμότητα

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζουμε *προσβασιμότητα για το* G την παρακάτω σχέση R_δ πάνω στο σύνολο V :

$a\,R_\delta\,b$ όταν: το G έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b .

Επαγόμενο υπο-γράφημα

Ένα γράφημα $H = (W, Z)$ ονομάζεται *υπο-γράφημα* του γραφήματος $G = (V, E)$, όταν: $W \subseteq V$ και $Z \subseteq E$.

Το υπο-γράφημα $H = (W, Z)$ του $G = (V, E)$ ονομάζεται *επαγόμενο υπο-γράφημα* του G , όταν:

Το Z περιέχει (όλες) τις ακμές του E , που τα άκρα τους είναι στο W .

<u>Παρατήρηση 1</u>

Για να ορίσουμε ένα επαγόμενο υπο-γράφημα H ενός δεδομένου γραφήματος G , αρκεί να ορίσουμε το σύνολο των κορυφών του G .

Προσβασιμότητα με μονοπάτι

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, *προσβασιμότητα με μονοπάτι για το* G είναι η παρακάτω σχέση R_μ πάνω στο σύνολο V :

$a\,R_\mu\,b$ όταν: το G έχει ένα μονοπάτι με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b .

Συνεκτικό* μη-κατευθυνόμενο *γράφημα

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται *συνεκτικό*, όταν:

Η δήλωση “ αν $x \neq y$ τότε $x\,R_\delta\,y$ ” ισχύει στο V .

Ισοδύναμα της συνεκτικότητας

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν:

Η δήλωση “ αν $x \neq y$ τότε $x\,R_\mu\,y$ ” ισχύει στο V .

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν:

Οι δηλώσεις “ $x\,R_\delta\,y$ είτε $x=y$ ” και “ $x\,R_\mu\,y$ είτε $x=y$ ” ισχύουν στο V .

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ *δεν* είναι συνεκτικό αν και μόνο αν:

Υπάρχουν δύο *διαφορετικές* κορυφές a, b στο V , για τις οποίες δεν ισχύει ότι $a\,R_\delta\,b$ – άρα, ούτε και $a\,R_\mu\,b$.

Ένωση συνεκτικών γραφημάτων

Έστω ότι τα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ είναι συνεκτικά, και έχουν μία τουλάχιστον κοινή κορυφή. Η *ένωσή* τους, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2)$, θα είναι συνεκτικό γράφημα.

Απόδειξη

Πρέπει να επαληθευτεί ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b στο $V_1 \cup V_2$, ισχύει ότι $a\ R_\delta\ b$.

1) Άν οι κορυφές a, b ανήκουν και οι δύο στο V_1 (αντίστοιχα στο V_2) : ισχύει ότι $a\ R_\delta\ b$, επειδή τα G_1, G_2 είναι συνεκτικά.

2) Άν $a \in V_1$ και $b \in V_2$: έστω u μία κοινή κορυφή των G_1, G_2 . Επειδή $a \neq b$, θα είναι $a \neq u$ είτε $b \neq u$.

Έστω ότι $a \neq u$ -- η περίπτωση $b \neq u$ είναι ανάλογη: επειδή το G_1 είναι συνεκτικό, ισχύει $a\ R_\delta\ u$.

Άν $b=u$, προφανώς ισχύει $a\ R_\delta\ b$.

Άν $b \neq u$, θα ισχύει $u\ R_\delta\ b$ επειδή το G_2 είναι συνεκτικό. Από τις σχέσεις $a\ R_\delta\ u$, $u\ R_\delta\ b$, εφαρμόζοντας την «Συγχώνευση διαδρομών», βλέπουμε ότι ισχύει $a\ R_\delta\ b$.

Συνεκτική συνιστώσα μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και u μία κορυφή του G .

Ονομάζουμε *συνεκτική συνιστώσα της* u στο G , το *επαγόμενο* υπο-γράφημα **H(u)** του G με σύνολο κορυφών το $\mathbf{\Sigma(u)} = \{u\} \cup \{\ x \mid$ αληθεύει ότι $u\ R_\delta\ x\ \}$.

Δηλαδή, κορυφές του $H(u)$ είναι: η κορυφή u , και οι κορυφές του G που είναι προσβάσιμες από την u .

Ιδιότητες των συνεκτικών συνιστωσών μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, και $H(u) = (\Sigma(u)\ ,\ Z)$ η συνεκτική συνιστώσα μίας κορυφής u του G .

1) Το γράφημα $H(u)$ είναι συνεκτικό.

2) Άν $x \in \Sigma(u)$ και υπάρχει ακμή $\{x , y\}$ του G : θα έχουμε $y \in \Sigma(u)$ και $\{x , y\} \in Z$.

3) Έστω $H(v) = (\Sigma(v) , \Theta)$ η συνεκτική συνιστώσα μίας κορυφής v του G :
Άν τα υπο-γραφήματα $H(u)$, $H(v)$ έχουν μία τουλάχιστον κοινή κορυφή, θα είναι $H(u) = H(v)$.

Απόδειξη

1) Πρέπει να ελεγχθεί ότι, για οποιεσδήποτε διαφορετικές κορυφές a, b στο $\Sigma(u)$, αληθεύει ότι $a\ R_\delta\ b$. Επειδή $a \neq b$, θα είναι $a \neq u$ είτε $b \neq u$.

Έστω ότι $a \neq u$ -- η περίπτωση $b \neq u$ είναι ανάλογη: Από τον ορισμό του συνόλου $\Sigma(u)$, αληθεύει ότι $u\ R_\delta\ a$. Χρησιμοποιώντας την «Αντιστροφή μη-κατευθυνόμενης διαδρομής», βλέπουμε ότι αληθεύει $a\ R_\delta\ u$.

Άν $b=u$, προφανώς αληθεύει $a\ R_\delta\ b$.

Άν $b \neq u$, θα αληθεύει $u\ R_\delta\ b$ από τον ορισμό του συνόλου $\Sigma(u)$. Από τις $a\ R_\delta\ u$ και $u\ R_\delta\ b$, εφαρμόζοντας την «Συγχώνευση διαδρομών», βλέπουμε ότι αληθεύει $a\ R_\delta\ b$.

2) Από τον ορισμό του συνόλου $\Sigma(u)$, αληθεύει ότι $u\ R_\delta\ x$ είτε $x=u$. Επίσης, $x\ R_\delta\ y$:
Άν $u\ R_\delta\ x$, εφαρμόζοντας την «Συγχώνευση διαδρομών» έχουμε ότι $u\ R_\delta\ y$. Άν $x=u$, έχουμε πάλι ότι $u\ R_\delta\ y$. Άρα, $y \in \Sigma(u)$. Επειδή το $H(u) = (\Sigma(u) , Z)$ είναι επαγόμενο υπο-γράφημα του G και $x , y \in \Sigma(u)$, θα είναι $\{x , y\} \in Z$.

3) Αφού τα $H(u)$, $H(v)$ είναι επαγόμενα υπο-γραφήματα, αρκεί να δειχτεί ότι έχουν τις ίδιες κορυφές.

Δείχνουμε ότι $H(u) \subseteq H(v)$ -- ανάλογα μπορεί να δειχτεί ότι $H(v) \subseteq H(u)$.

Θα δείξουμε ότι, άν $x \in \Sigma(u)$, τότε και $x \in \Sigma(v)$.

Άν $x=v$: προφανώς $x \in \Sigma(v)$.

Άν $x \neq v$: από την (1) , τα υπο-γραφήματα $H(u)$, $H(v)$ είναι συνεκτικά. Αφού έχουν μία τουλάχιστον κοινή κορυφή, η ένωσή τους $H(u) \cup H(v)$ θα είναι συνεκτικό υπο-γράφημα του G -- βλέπε την «Ένωση συνεκτικών γραφημάτων».

Επειδή οι x , v είναι κορυφές του $H(u) \cup H(v)$ και $x \neq v$, θα αληθεύει $v \, R_\delta \, x$ -- επομένως, $x \in \Sigma(v)$.

<u>Παρατήρηση 2</u>

- Από τον ορισμό του συνόλου $\Sigma(u)$ έχουμε ότι: $u \in H(u)$, για κάθε κορυφή u του G .
- Από την Ιδιότητα (3) έχουμε ότι: τα σύνολα κορυφών δύο διαφορετικών συνεκτικών συνιστωσών του G είναι ξένα μεταξύ τους.

Επομένως, τα σύνολα κορυφών των συνεκτικών συνιστωσών του G αποτελούν *διαμερισμό* του V .

***Υπολογισμός του συνόλου κορυφών* Σ(u)**

Result ← { }
Active ← { u }

L1: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΚΟΡΥΦΗ* z ∈ *Active*

    Result ← *Result* ∪ { z }
    Active ← *Active* − { z }
  L2: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΜΗ* {z, y} *του* G
      If y ∉ *Active* ∪ *Result* *then* *Active* ← *Active* ∪ { y }

Από τις «Ιδιότητες της αναζήτησης διαδρομών» , μια κορυφή $x \neq u$ περιέχεται στο σύνολο *Result* *άν και μόνο άν* αληθεύει ότι $u \, R_\delta \, x$. Αφού και $u \in$ *Result* , τελικά *Result* = Σ(u) .

***Υπολογισμός των κορυφών των συνεκτικών συνιστωσών του* G**

Rest ← V
Components ← { }

L: *ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΚΟΡΥΦΗ* u ∈ *Rest*

    Component [u] ← Σ(u)   % το σύνολο Σ(u) υπολογίζεται όπως παραπάνω
    Rest ← *Rest* – *Component* [u]
    Components ← *Components* ∪ { *Component* [u] }

Προδιαγραφή συνεκτικής συνιστώσας μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Ένα υπο-γράφημα $H = (W, Z)$ του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι *συνεκτική συνιστώσα κάποιας κορυφής του* G, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

A 1) Το H είναι συνεκτικό, και

2) Το H είναι *μέγιστο* συνεκτικό υπο-γράφημα του G : *Οποιοδήποτε* υπο-γράφημα του G επεκτείνει το H, προσθέτοντας στο H κορυφές είτε ακμές του G, *δεν είναι* συνεκτικό..

Βασικές ιδιότητες συνεκτικής συνιστώσας μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Ένα υπο-γράφημα $H = (W, Z)$ του μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι *συνεκτική συνιστώσα κάποιας κορυφής του* G, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

B Το $H = (W , Z)$ είναι επαγόμενο υπο-γράφημα του G, και το υπο-σύνολο W του V είναι κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $R^0_\delta = \{ (a , b) \mid a R_\delta b \text{ είτε } a=b \}$ πάνω στο V.

Γ <u>Για</u> <u>*οποιαδήποτε*</u> κορυφή a του H : $W = \{a\} \cup \{ z \mid a R_\delta z \}$,

$Z = \{ e \mid e \text{ είναι ακμή του } E \text{, με άκρα στο } W \}$.

Δηλαδή, <u>για</u> <u>οποιαδήποτε</u> κορυφή a του H, το υπο-γράφημα H ταυτίζεται με την συνεκτική συνιστώσα του a στο G, $H(a)$.

Σημείωση Οι συνθήκες (Α) , (Β) , (Γ) είναι ισοδύναμες:

για την ισοδυναμία των (Α) , (Β) , βλέπε την Άσκηση 8,

για την ισοδυναμία των (Γ) , (Β) , βλέπε τον «Εγκλεισμό κλάσεων ισοδυναμίας».

<u>Παρατήρηση 3</u>

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν: το G είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του G (Άσκηση 6).

Ιδιότητες των συνεκτικών συνιστωσών μη-κατευθυνόμενου γραφήματος

Έστω $H_j = (W_j , Z_j)$, $j = 1, ..., n$, οι συνεκτικές συνιστώσες των κορυφών ενός *μη-κατευθυνόμενου* γραφήματος $G = (V, E)$.

α Τα σύνολα W_j , $j = 1, ..., n$, αποτελούν *διαμερισμό* του V .

β Για κάθε x , y στο V,

$x R_\delta y$ είτε $x=y$ αν και μόνο αν τα x , y ανήκουν στο ίδιο σύνολο W_j .

Σημείωση Οι ιδιότητες (α) , (β) , προκύπτουν από τις αντίστοιχες «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας».

Σχετική βιβλιογραφία

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

2.3 Συνεκτικές συνιστώσες

Rosen - Discrete Mathematics

10.4 Connectivity , μέχρι την παράγραφο VERTEX CONNECTIVITY.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α** Αποδείξτε ότι: άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) είναι συνεκτικό, η δήλωση " αν $x \neq y$ τότε $x\ R_\mu\ y$ " ισχύει στο V .

β Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα όπου: δεν υπάρχει μονοπάτι που να περιέχει όλες τις κορυφές.

2 Αποδείξτε ότι: άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό, υπάρχει διαδρομή που περιέχει όλες τις κορυφές.

3 Έστω F = (W, D) ένα συνεκτικό υπο-γράφημα ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G , και z μία κορυφή του F . Αποδείξτε ότι: το F είναι υπο-γράφημα του H(z) .

4 Έστω ότι H = (W , Z) είναι ένα συνεκτικό υπο-γράφημα ενός γραφήματος G = (V, E) , και δ είναι μία διαδρομή του G , με αρχή κάποια κορυφή του H. Αποδείξτε ότι:
Το υπο-γράφημα του G που αποτελείται από το γράφημα H , μαζύ με τις κορυφές και τις ακμές του G που εμφανίζονται στη διαδρομή δ , θα είναι συνεκτικό.

5 Έστω ότι τα H_1 , H_2 είναι διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G .
Αποδείξτε ότι: στο G δεν υπάρχει διαδρομή, από κορυφή του H_1 σε κορυφή του H_2 .

6 Αποδείξτε ότι: ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G είναι συνεκτικό, αν και μόνο αν το G είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του G .

7 Έστω ότι το γράφημα G = (V, E) είναι συνεκτικό, και e είναι μία ακμή του G .
Αποδείξτε ότι: άν το γράφημα (V, E−{e}) δεν είναι συνεκτικό, θα έχει μόνο δύο συνεκτικές συνιστώσες.

8 Αποδείξτε την ισοδυναμία των συνθηκών (A) και (B) για τις «Συνεκτικές συνιστώσες μη-κατευθυνόμενου γραφήματος». Χρησιμοποιείστε την (β) από τις «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας» .

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

3 Έστω $F = (W, D)$ ένα συνεκτικό υπο-γράφημα ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G, και z μία κορυφή του F. Αποδείξτε ότι: το F είναι υπο-γράφημα του $H(z)$.

Επειδή το F είναι συνεκτικό θα έχουμε $z\, R_\delta\, x$, για κάθε κορυφή $x \in W$ διαφορετική από την z -- επομένως, $W \subseteq \Sigma(z)$.

Το $H(z)$ είναι επαγόμενο υπο-γράφημα του G, άρα περιέχει κάθε ακμή του G με άκρα στο $\Sigma(z)$. Επομένως, το $F = (W, D)$ είναι υπο-γράφημα του $H(z)$.