Διαδρομές, μονοπάτια, ίχνη, κύκλοι

Γραφήματα

Ένα *γράφημα* $G = (V, E)$ αποτελείται από ένα *σύνολο κορυφών* V (μη-κενό), και ένα *σύνολο ακμών* E : μία ακμή e έχει *άκρα* δύο κορυφές u , v , και μπορεί να είναι είτε *μη-κατευθυνόμενη* -- $e = \{u , v\}$, είτε *κατευθυνόμενη* -- $e = (u , v)$. Όταν $u = v$, έχουμε μία ακμή $e = \{u , u\}$, είτε $e = (u , u)$, που ονομάζεται *βρόχος*.

Διαδρομές

Για ένα δεδομένο γράφημα G , *διαδρομή του* G λέγεται οποιαδήποτε ακολουθία $(a_1, e_1,..., a_n, e_n, a_{n+1})$, με $n\geq 1$, όπου: κάθε a_i είναι κορυφή του γραφήματος, κάθε e_i είναι (κατευθυνόμενη είτε μη-κατευθυνόμενη) ακμή του γραφήματος, και για $i=1, 2,..., n$, είτε $e_i = (a_i, a_{i+1})$, είτε $e_i = \{a_i, a_{i+1}\} = \{a_{i+1}, a_i\}$.

Το *μήκος* της διαδρομής είναι ο αριθμός n .

Οι κορυφές a_1, a_{n+1} είναι τα *άκρα* της διαδρομής, και ονομάζονται *αρχή* και *τέλος* της αντίστοιχα.

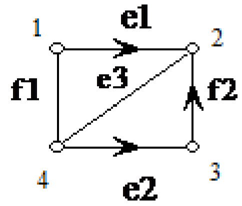
Όταν τα άκρα μιάς διαδρομής ταυτίζονται, η διαδρομή λέγεται *κλειστή* -- αλλοιώς λέγεται *ανοιχτή*.

<u>Παρατήρηση 1</u>

Επειδή $n\geq 1$, σε μιά διαδρομή εμφανίζεται πάντα μία τουλάχιστον ακμή.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Στο γράφημα $\Gamma = (V, E)$ που εικονίζεται στο σχήμα έχουμε $V = \{1, 2, 3, 4\}$ και $E = \{e_1 , e_2 , e_3 , f_1 , f_2 \}$, όπου $e_1= (1, 2)$, $e_2 = (4, 3)$, $e_3 = \{4, 2\} = \{2, 4\}$, $f_1 = \{1, 4\} = \{4, 1\}$, $f_2 = (3, 2)$.
Η ακολουθία $(4, f_1 , 1, e_1 , 2, f_2 , 3)$ δεν είναι διαδρομή, επειδή το πρώτο άκρο της κατευθυνόμενης ακμής f_2 δεν είναι η κορυφή 2.
Η ακολουθία $(4, f_1 , 1, e_1 , 2, e_3 , 4)$ είναι διαδρομή, επειδή η ακμή e_3 είναι μη-κατευθυνόμενη και τα άκρα της είναι τα 2, 4.



Συγχώνευση διαδρομών

Έστω ότι ένα γράφημα G έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή α και τέλος την κορυφή β, και επίσης έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή β και τέλος την κορυφή γ . Τότε το G θα έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή α και τέλος την κορυφή γ .

<u>Απόδειξη</u>

Μπορούμε να "συγχωνεύσουμε" τις δύο διαδρομές, έστω $\delta_1 = (\alpha, e,..., f, \boldsymbol{\beta})$ και $\delta_2 = (\boldsymbol{\beta}, e',..., f', \gamma)$, ταυτίζοντας το τέλος της πρώτης και την αρχή της δεύτερης (αφού πρόκειται για την ίδια κορυφή): δημιουργούμε έτσι μιά ακολουθία $\delta = (\alpha, e,..., f, \boldsymbol{\beta}, e',..., f', \gamma)$.
Επειδή οι ακολουθίες δ_1 και δ_2 είναι διαδρομές του G , η ακολουθία δ που κατασκευάστηκε είναι επίσης διαδρομή του G (δείτε τον παραπάνω ορισμό), με αρχή την κορυφή α και τέλος την κορυφή γ .

Αντιστροφή μη-κατευθυνόμενης διαδρομής

Έστω ότι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή α και τέλος την κορυφή β . Τότε το G θα έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή β και τέλος την κορυφή α .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω μία διαδρομή, $\delta = (\boldsymbol{\alpha}, e_1, a_2, \ldots, a_n, e_n, \beta)$. "Αντιστρέφοντας" την δ , δημιουργούμε την ακολουθία $\delta^R = (\beta, e_n, a_n, \ldots, a_2, e_1, \boldsymbol{\alpha})$.

Επειδή η ακολοθία δ είναι διαδρομή του G, και οι ακμές που εμφανίζονται στην δ είναι μη-κατευθυνόμενες, η ακολουθία δ^R που κατασκευάστηκε είναι επίσης διαδρομή του G (δείτε τον παραπάνω ορισμό), με αρχή την κορυφή β και τέλος την κορυφή α .

Μονοπάτια

Για ένα δεδομένο γράφημα G , *μονοπάτι του* G λέγεται οποιαδήποτε διαδρομή $(a_1, e_1, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ του G που *δεν επαναλαμβάνει κορυφές* (οι όροι της ακολουθίας που είναι *κορυφές* είναι ανά δύο διαφορετικοί). Προφανώς, τα άκρα ενός μονοπατιού είναι πάντα διαφορετικές κορυφές.

Ίχνη

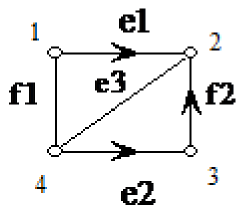
Για ένα δεδομένο γράφημα G , *ίχνος του* G λέγεται οποιαδήποτε διαδρομή $(a_1, e_1, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ του G που *δεν επαναλαμβάνει ακμές* (οι όροι της ακολουθίας που είναι *ακμές* είναι διαφορετικοί μεταξύ τους). Όταν τα άκρα ενός ίχνους ταυτίζονται, το ίχνος λέγεται *κλειστό* -- αλλοιώς λέγεται *ανοιχτό*.

<u>Παρατήρηση 2</u>

Επειδή ένα μονοπάτι δεν επαναλαμβάνει κορυφές, δεν επαναλαμβάνει ούτε ακμές. Επομένως κάθε μονοπάτι είναι και ανοιχτό ίχνος. Το αντίστροφο δεν ισχύει – υπάρχουν ανοιχτά ίχνη που δεν είναι μονοπάτια.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στο γράφημα Γ του Παραδείγματος 1, η διαδρομή $(4, f_1, 1, e_1, 2, e_3, 4, e_3, 2)$ δεν είναι ίχνος, επειδή η ακμή e_3 εμφανίζεται και δεύτερη φορά στην ακολουθία.
Η διαδρομή $(4, f_1, 1, e_1, 2, e_3, 4, e_2, 3)$ είναι ίχνος, επειδή καμμία ακμή δεν εμφανίζεται δεύτερη φορά στην ακολουθία.
Η προηγούμενη διαδρομή δεν είναι μονοπάτι, λόγω της επανάληψης της κορυφής 4.
Η διαδρομή $(1, e_1, 2, e_3, 4, e_2, 3)$ είναι μονοπάτι, επειδή καμμία κορυφή δεν επαναλαμβάνεται.



Απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών

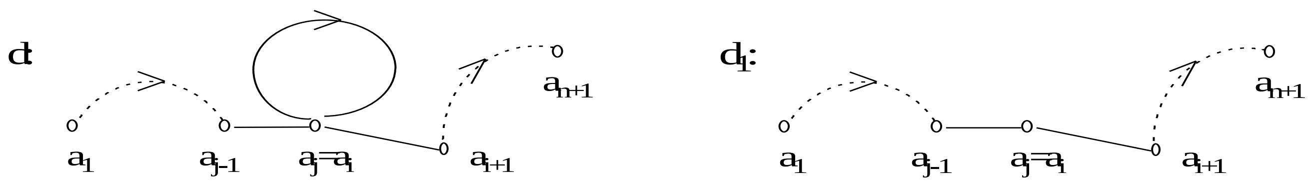
Έστω μία οποιαδήποτε διαδρομή $d = (a_1, e_1, ..., a_n, e_n, a_{n+1})$ ενός γραφήματος G , όπου $a_1 \neq a_{n+1}$:

Θα υπάρχει και ένα *μονοπάτι* του G , με αρχή την κορυφή a_1 και τέλος την κορυφή a_{n+1} .

Απόδειξη

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι του G ως εξής: Διατρέχουμε τη διαδρομή d μέχρι να συναντήσουμε κάποια κορυφή a_i την οποία έχουμε ξανασυναντήσει. Δηλαδή, βρίσκουμε κάποιο i για το οποίο $a_i = \mathbf{a_j}$, για κάποια κορυφή a_j με $j < i$ -- άν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή a_i , η διαδρομή d είναι μονοπάτι. Διαγράφουμε από τη διαδρομή d την υπο-ακολουθία $(e_j , a_{j+1} , . . . , a_i)$: η ακολουθία

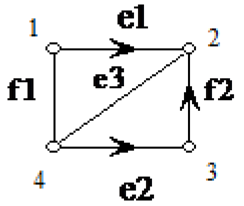
$d_1 = (a_1, e_1, ..., a_{j-1}, e_{j-1}, \mathbf{a_j}, e_i, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$ που προκύπτει, είναι επίσης μία διαδρομή του G.



(στο σχήμα τα βέλη υποδηλώνουν τη σειρά με την οποία διατρέχονται οι ακμές των διαδρομών).

Αν η διαδρομή d_1 επαναλαμβάνει κορυφές εκτελούμε την ίδια διαδικασία στην d_1 , κοκ.

Με κάθε εκτέλεση αυτής της διαδικασίας παίρνουμε μια νέα διαδρομή, με αρχή την κορυφή a_1 και τέλος την a_{n+1} , η οποία θα περιέχει λιγώτερες ακμές και λιγώτερες κορυφές από την προηγούμενη διαδρομή. Επομένως μετά από την *τελευταία* εκτέλεση της διαδικασίας θα έχει δημιουργηθεί μία διαδρομή που δεν επαναλαμβάνει κορυφές -- δηλαδή ένα μονοπάτι, με αρχή την a_1 και τέλος την a_{n+1} .



Παράδειγμα 2

Άν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία στην διαδρομή $d = (1, e_1 , 2, e_3 , 4, e_2 , 3, f_2 , 2, e_3 , 4)$ του γραφήματος Γ στο Παράδειγμα 1, θα βρούμε ότι $a_5 = a_2 = 2$. Διαγράφουμε από τη διαδρομή d την υπο-ακολουθία $(e_3 , 4, e_2 , 3, f_2 , 2)$ και προκύπτει η διαδρομή $d_1 = (1, e_1 , 2, e_3 , 4)$, που είναι μονοπάτι.

Κύκλοι

Για ένα δεδομένο γράφημα G, *κύκλος του* G ονομάζεται οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή του G που *δεν επαναλαμβάνει κορυφές* -- εκτός από την αρχική που ταυτίζεται με την τελική – και επίσης *δεν επαναλαμβάνει ακμές* (είναι κλειστό ίχνος του G).

Παρατήρηση 3

- Λόγω των περιορισμών στις επαναλήψεις κορυφών, ένας βρόχος (u , u) δεν μπορεί να εμφανίζεται σε ένα κύκλο, εκτός άν πρόκειται για τον κύκλο (u, (u, u) , u) .
- Κάθε κύκλος ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος *χωρίς βρόχους*, έχει μήκος τουλάχιστον 3.
- Κάθε κύκλος ενός κατευθυνόμενου γραφήματος *χωρίς βρόχους*, έχει μήκος τουλάχιστον 2.

Κλειστές διαδρομές και κύκλοι

i) Άν ένα γράφημα χωρίς βρόχους έχει μία κλειστή κατευθυνόμενη διαδρομή, θα έχει και ένα κύκλο.

ii) Άν ένα γράφημα χωρίς βρόχους έχει ένα κλειστό ίχνος, θα έχει και ένα κύκλο.

Απόδειξη

Περιγράφουμε μία διαδικασία που εντοπίζει ένα κύκλο στο γράφημα.

i) Έστω $(a_1, e_1, a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$ μία κλειστή κατευθυνόμενη διαδρομή.

Επειδή δεν υπάρχουν βρόχοι, είναι $a_1 \neq a_2$. Εφαρμόζοντας την «Απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών» στη διαδρομή $(a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$, βρίσκουμε ένα μονοπάτι $\boldsymbol{\mu} = (a_2, ..., a_1)$. Συγχωνεύοντας το μονοπάτι $\boldsymbol{\mu}$ με τη διαδρομή (a_1, e_1, a_2) , κατασκευάζουμε μία κλειστή διαδρομή $\delta = (a_2, ..., a_1, e_1, a_2)$, .

Αφού το μονοπάτι μ δεν επαναλαμβάνει κορυφές, η κλειστή διαδρομή δ δεν επαναλαμβάνει κορυφές, εκτός από την αρχική που ταυτίζεται με την τελική. Επειδή η ακμή $e_1 = (a_1, a_2)$ δεν εμφανίζεται στο μ – αφού η κορυφή a_1 εμφανίζεται στο μ μόνο ως τελευταία -- η κλειστή διαδρομή δ δεν θα επαναλαμβάνει ούτε ακμές. Επομένως, η κλειστή διαδρομή δ είναι κύκλος.

ii) Έστω $(a_1, e_1, a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$ ένα κλειστό ίχνος.

Όπως στο (*i*) , βρίσκουμε ένα μονοπάτι $\boldsymbol{\mu} = (a_2, ..., a_1)$, και κατασκευάζουμε την κλειστή διαδρομή $\delta = (a_2, ..., a_1, e_1, a_2)$. Η κλειστή διαδρομή δ δεν θα επαναλαμβάνει κορυφές, εκτός από την αρχική που θα ταυτίζεται με την τελική -- βλέπε και στο (*i*) .

Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε, εξετάζοντας την διαδικασία με την οποία κατασκευάστηκε το μονοπάτι **μ** από τη διαδρομή $(a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$ -- βλέπε στην «Απαλοιφή των επαναλήψεων κορυφών» -- ότι: κάθε ακμή που εμφανίζεται στο **μ** , εμφανίζεται και στη διαδρομή $(a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$.

Αφού η αρχική διαδρομή $(a_1, e_1, a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$ είναι ίχνος, η ακμή $e_1 = \{a_1, a_2\}$ δεν εμφανίζεται στη διαδρομή $(a_2, e_2, ..., a_n, e_n, a_1)$, άρα δεν θα εμφανίζεται ούτε στο μονοπάτι **μ** . Επομένως, η κλειστή διαδρομή δ δεν θα επαναλαμβάνει ούτε ακμές. Άρα, η δ είναι κύκλος.

Σημείωση Θα υποθέτουμε στο εξής ότι τα γραφήματα που εξετάζουμε *δεν έχουν βρόχους*.

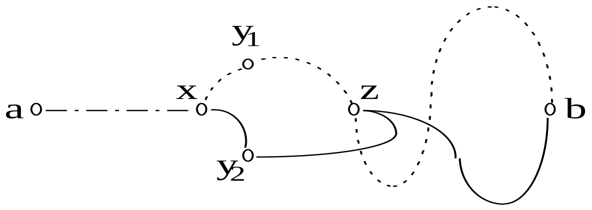
Μονοπάτια και κύκλοι

Έστω ότι σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G υπάρχουν δύο *διαφορετικά* μονοπάτια μ_1 , μ_2 , που καθένα έχει άκρα τις κορυφές a, b. Τότε θα υπάρχει κύκλος στο G.

Απόδειξη

Μπορούμε να εντοπίσουμε ένα κύκλο στο γράφημα G ως εξής: Διατρέχουμε τις ακμές των δύο μονοπατιών, αρχίζοντας από την κοινή αρχική κορυφή a, μέχρι να βρούμε την πρώτη κορυφή x όπου τα δύο μονοπάτια χωρίζονται – δηλαδή, όπου η αμέσως επόμενη ακμή $\{x, y_1\}$ του μ_1 διαφέρει από την αμέσως επόμενη ακμή $\{x, y_2\}$ του μ_2 (άρα είναι $y_1 \neq y_2$).

Μιά τέτοια κορυφή θα βρεθεί καθώς διατρέχουμε τα δύο μονοπάτια: αλλοιώς, τα μ_1 και μ_2 θα πρέπει τελικά να ταυτιστούν (αποκλείεται λόγω της υπόθεσης).



Αφού τα μ_1, μ_2 έχουν κοινή τελική κορυφή b, αν συνεχίσουμε να διατρέχουμε τις ακμές του μ_1 (από την κορυφή y_1 και εξής) θα βρούμε μία πρώτη κορυφή **z** του μ_1 που θα είναι και κορυφή του μ_2 .

Εξετάζουμε τα τμήματα: $\nu_1 = (x, \{x, y_1\},\ldots, \mathbf{z})$ του μονοπατιού μ_1 , και $\nu_2 = (x, \{x, y_2\},\ldots, \mathbf{z})$ του μονοπατιού μ_2 . Τα *μονοπάτια* ν_1 , ν_2 δεν έχουν άλλες κοινές κορυφές εκτός από τις x και **z** , λόγω της διαδικασίας με την οποία κατασκευάστηκαν. Επίσης τα ν_1 , ν_2 δεν έχουν καμμία κοινή ακμή: κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί μόνο άν καθένα τους έχει μήκος 1, δηλαδή άν $z = y_1$ και $z = y_2$. Όμως αυτό αποκλείεται, αφού από την επιλογή των κορυφών y_1 , y_2 έχουμε $y_1 \neq y_2$.

Κατασκευάζουμε μία κλειστή διαδρομή $\delta = (x, \{x, y_1\},\ldots, \mathbf{z},\ldots, \{y_2, x\}, x)$, συγχωνεύοντας το μονοπάτι ν_1 με το "αντίστροφο" του μονοπατιού ν_2 . Από τα παραπάνω, η διαδρομή δ θα είναι κύκλος.

Σχετική βιβλιογραφία

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

2.1 Γραφήματα

2.2 Διαδρομές

Rosen - Discrete Mathematics:

10.1 Graphs and Graph Models

10.2 Graph Terminology and Special Types of Graphs

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Έστω μία διαδρομή $\delta = (a_1, e_1, \ldots, a_n, e_n, a_{n+1})$, στην οποία υπάρχουν επαναλαμβανόμενες ακμές. Αποδείξτε ότι στη διαδρομή δ θα επαναλαμβάνονται κορυφές.

Βρείτε ένα παράδειγμα διαδρομής όπου επαναλαμβάνονται ακμές, και όπου υπάρχει *ακριβώς μία* επανάληψη κάποιας κορυφής.

2 Αποδείξτε ότι: κάθε κύκλος ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος χωρίς *βρόχους*, έχει μήκος τουλάχιστον 3.

3 **α** Βρείτε ένα παράδειγμα κλειστής διαδρομής όπου δεν επαναλαμβάνονται κορυφές -- εκτός από την αρχική που ταυτίζεται με την τελική – αλλά επαναλαμβάνονται ακμές.

β Βρείτε ένα γράφημα που έχει μία κλειστή διαδρομή, αλλά δεν έχει κανένα κύκλο, ούτε κλειστό ίχνος.

4 Αποδείξτε ότι:

α Αν ένα γράφημα έχει μία ανοιχτή διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κάποια κλειστή διαδρομή.

β Αν ένα γράφημα (χωρίς βρόχους) έχει μία κλειστή διαδρομή, θα έχει και κάποια ανοιχτή διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι.

5 Αποδείξτε ότι:

α Αν ένα γράφημα έχει μία ανοιχτή κατευθυνόμενη διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κάποιο κύκλο.

β Αν ένα γράφημα έχει ένα ανοιχτό ίχνος που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κάποιο κύκλο.

6 Βρείτε ένα γράφημα (χωρίς βρόχους) που να έχει κάποιο κύκλο, αλλά κάθε ανοιχτό ίχνος του να είναι μονοπάτι.

7 Βρείτε μιά *ικανή και αναγκαία συνθήκη*, ώστε ένα γράφημα να έχει κάποιο ανοιχτό ίχνος που να μην είναι μονοπάτι.

8 Αποδείξτε ότι: άν ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο, θα υπάρχουν δύο διαφορετικά μονοπάτια μ_1, μ_2 με τα ίδια άκρα, που δεν θα έχουν άλλη κοινή κορυφή.

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

3 **α** Βρείτε ένα παράδειγμα κλειστής διαδρομής όπου δεν επαναλαμβάνονται κορυφές -- εκτός από την αρχική που ταυτίζεται με την τελική – αλλά επαναλαμβάνονται ακμές.

Σε ένα γράφημα με μία μη-κατευθυνόμενη ακμή $e=\{u, v\}$, $u \neq v$, θα έχουμε μία διαδρομή

$d = (u, e, v, e, u)$. Βλέπουμε ότι στην d δεν επαναλαμβάνονται κορυφές (εκτός από την αρχική που ταυτίζεται με την τελική), αλλά επαναλαμβάνεται η ακμή e .

β Βρείτε ένα γράφημα που έχει μία κλειστή διαδρομή, αλλά δεν έχει κανένα κύκλο, ούτε κλειστό ίχνος.

Στο γράφημα $(\{u, v\} , \{ \{u, v\} \})$, $u \neq v$ (με δύο κορυφές και μία μη-κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ τους), υπάρχει η κλειστή διαδρομή $(u, \{u, v\} , v, \{u, v\} , u)$. Δεν υπάρχει κλειστό ίχνος (άρα ούτε και κύκλος), αφού για να έχουμε επανάληψη μιάς από τις u , v θα πρέπει να επαναληφθεί και η ακμή $\{u, v\}$.

5 **α** Αν ένα γράφημα έχει μία ανοιχτή κατευθυνόμενη διαδρομή που δεν είναι μονοπάτι, θα έχει και κάποιο κύκλο.

Έστω $d = (a_1, e_1,..., a_n, e_n, a_{n+1})$ μία ανοιχτή -- $a_1 \neq a_{n+1}$ -- κατευθυνόμενη διαδρομή ενός γραφήματος G . Διατρέχουμε τη διαδρομή d . Επειδή η d δεν είναι μονοπάτι, θα συναντήσουμε κάποια κορυφή a_i την οποία έχουμε ξανασυναντήσει. Δηλαδή, θα βρούμε κάποιο i για το οποίο $a_i = a_j$, για κάποια κορυφή a_j με $j < i$. Το τμήμα $d_1 = (a_j, e_j, \ldots, a_i)$ της διαδρομής d , είναι μία κλειστή κατευθυνόμενη διαδρομή του G . Από την πρόταση "Κλειστές διαδρομές και κύκλοι" , το G θα έχει κάποιο κύκλο.