Προσβασιμότητα και συναφείς σχέσεις

Προσβασιμότητα

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, ονομάζουμε *προσβασιμότητα για το* G , την παρακάτω σχέση R_δ πάνω στο σύνολο V :

$a \, R_\delta \, b$ όταν: το G έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b .

<u>Παρατήρηση 1</u>

- Για οποιοδήποτε γράφημα G , η προσβασιμότητα για το G είναι μεταβατική σχέση – βλέπε τη «Συγχώνευση διαδρομών».
- Για οποιοδήποτε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , η προσβασιμότητα για το G είναι συμμετρική σχέση – βλέπε την «Αντιστροφή μη-κατευθυνόμενης διαδρομής».

Προσβασιμότητα με μονοπάτι

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, η σχέση R_μ πάνω στο σύνολο V ορίζεται ως εξής:

$a \, R_\mu \, b$ όταν: το G έχει ένα μονοπάτι με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b .

<u>Παρατήρηση 2</u>

- Για οποιοδήποτε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G , η σχέση R_μ είναι συμμετρική – βλέπε την «Αντιστροφή μη-κατευθυνόμενης διαδρομής».
- Υπάρχουν γραφήματα όπου η σχέση R_μ δεν είναι μεταβατική.

Προσβασιμότητα με κλειστό ίχνος

Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, ονομάζουμε *προσβασιμότητα με κλειστό ίχνος για το* G , την παρακάτω σχέση R_ι πάνω στο σύνολο V :

$a \, R_\iota \, b$ όταν: $a \neq b$, και το G έχει ένα κλειστό ίχνος $(a,..., b,..., a)$
(ίχνος που αρχίζει στην a , επισκέπτεται την b , και καταλήγει στην a),

$a \, R_\iota \, a$ όταν: το G έχει ένα κλειστό ίχνος $(a,..., a)$
(ίχνος που αρχίζει στην a , και καταλήγει στην a).

<u>Παρατήρηση 3</u>

- Για οποιοδήποτε γράφημα G , η προσβασιμότητα με κλειστό ίχνος για το G είναι συμμετρική σχέση.
- Υπάρχουν *κατευθυνόμενα* γραφήματα όπου η προσβασιμότητα με κλειστό ίχνος δεν είναι μεταβατική.

Μεταβατικότητα της σχέσης* R_ι *για* μη-κατευθυνόμενα *γραφήματα

Για οποιοδήποτε *μη-κατευθυνόμενο* γράφημα $G = (V, E)$, η δήλωση

“ αν ‘ $x\, R_\iota\, y$ και $y\, R_\iota\, z$ ’ τοτε $x\, R_\iota\, z$ ” ισχύει στο V .

Απόδειξη

Έστω ότι στο μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει ότι ‘ $\alpha\, R_\iota\, \beta$ και $\beta\, R_\iota\, \gamma$ ’ , όπου $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq V$. Τότε το G έχει κλειστά ίχνη, $I = (\alpha,..., \beta,..., \alpha)$ και $J = (\beta,..., \gamma,..., \beta)$.

Για να δείξουμε ότι ισχύει $\alpha\, R_\iota\, \gamma$, θα κατασκευάσουμε ένα κλειστό ίχνος K του G , που αρχίζει στην α , επισκέπτεται την γ , και καταλήγει στην α . Επικεντρώνουμε στην περίπτωση $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Άν η κορυφή α εμφανίζεται στο J , μπορούμε να κατασκευάσουμε το K διατρέχοντας κατάλληλα τις κορυφές και ακμές του J , αρχίζοντας από την α .

Άν η κορυφή α δεν εμφανίζεται στο J :

Διατρέχουμε το I , αρχίζοντας από την α , μέχρι να βρούμε *για πρώτη φορά* μία κορυφή – έστω ζ_1 – του I που *να εμφανίζεται και στο* J . Υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή του I που εμφανίζεται και στο J , συγκεκριμένα η κορυφή β , άρα θα βρούμε την πρώτη τέτοια κορυφή.

Συνεχίζουμε να διατρέχουμε το I , μέχρι να βρούμε *για τελευταία φορά* μία κορυφή – έστω ζ_2 – του I , που *να εμφανίζεται και στο* J . Η κορυφή ζ_2 θα εμφανιστεί πρίν να ολοκληρωθεί η διάτρεξη του I , αφού η τελευταία κορυφή του I είναι η α , που δεν εμφανίζεται στο J .

Διατρέχοντας κατάλληλα τις κορυφές και ακμές του J , κατασκευάζουμε ένα ίχνος $\Xi = (\zeta_1,..., \gamma,..., \zeta_2)$ που αρχίζει στην ζ_1 , επισκέπτεται την γ , και καταλήγει στην ζ_2 . Παρατηρούμε ότι οι ζ_1 , ζ_2 είναι οι μοναδικές κορυφές του Ξ που εμφανίζονται και στο I .

Κατασκευάζουμε το ζητούμενο κλειστό ίχνος K του G ως εξής:

Συγχωνεύουμε το τμήμα $(\alpha,..., \zeta_1)$ του I – που προκύπτει όπως παραπάνω – με το ίχνος $\Xi = (\zeta_1,..., \gamma,..., \zeta_2)$, και στη συνέχεια με το τμήμα $(\zeta_2,..., \alpha)$ του I – που προκύπτει όπως παραπάνω. Μπορούμε να δούμε ότι προκύπτει μία κλειστή διαδρομή $K = (\alpha,..., \zeta_1,..., \gamma,..., \zeta_2,..., \alpha)$ του G , που είναι κλειστό ίχνος.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Βούρος – Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική Α</u>

2.1 Διμελείς σχέσεις και ιδιότητές τους

<u>Γεωργακόπουλος – Σχέσεις</u>

Παράγραφοι 1 ώς και 5

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

2.2 Διαδρομές

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

9.1 Relations and Their Properties

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α** Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε γράφημα G , η σχέση R_δ είναι μεταβατική.
Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G ,
οι σχέσεις R_δ και R_μ είναι συμμετρικές.

β Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου η σχέση R_δ να μην είναι συμμετρική.
Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου η σχέση R_δ να είναι συμμετρική.

2 **α** Βρείτε ένα γράφημα, όπου η σχέση R_μ να μην είναι μεταβατική.
Βρείτε ένα γράφημα, όπου η σχέση R_μ να είναι μεταβατική.

β Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε γράφημα $G = (V, E)$, η δήλωση

“ αν ‘ $x R_\mu y$ και $y R_\mu z$ και $x \neq z$ ’ τοτε $x R_\mu z$ ” ισχύει στο V .

3 Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε γράφημα $G = (V, E)$, η δήλωση

“ ‘ $x R_\mu y$ είτε $x = y$ ’ ανν ‘ $x R_\delta y$ είτε $x = y$ ’ ” ισχύει στο V .

4 Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου η σχέση R_ι να μην είναι μεταβατική.
Βρείτε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, όπου η σχέση R_ι να είναι μεταβατική.

5 Για ένα δεδομένο γράφημα $G = (V, E)$, η σχέση R_κ πάνω στο σύνολο V ορίζεται ως εξής:

$a R_\kappa b$ όταν: το G έχει ένα κύκλο $(a,..., b,..., a)$ – αρχίζει στην a ,
επισκέπτεται την b , καταλήγει στην a .

α Αποδείξτε ότι, για κάθε γράφημα G , οι σχέσεις R_ι , R_κ είναι συμμετρικές.

β Βρείτε ένα γράφημα, όπου η σχέση R_κ να μην είναι μεταβατική.
Βρείτε ένα γράφημα, όπου η σχέση R_κ να είναι μεταβατική.

6 Τα παρακάτω ερωτήματα αφορούν στην Απόδειξη της «Μεταβατικότητας της σχέσης Rι για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα» :

α Συμπληρώστε τις περιπτώσεις όπου δύο από τις κορυφές α , β , γ ταυτίζονται.

β Βρείτε κλειστά ίχνη I , J , για τα οποία $\zeta_1 = \zeta_2$.
Ποιά είναι τα ίχνη Ξ , K σε αυτή την περίπτωση;

γ Επαληθεύστε ότι η κλειστή διαδρομή $K = (\alpha,..., \zeta_1,..., \gamma,..., \zeta_2,..., \alpha)$, είναι κλειστό ίχνος.

δ Βρείτε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που αποτελείται από δύο κλειστά ίχνη I , J , και όπου υπάρχουν περισσότερα από ένα κλειστά ίχνη που αρχίζουν στην α , επισκέπτονται την γ , και καταλήγουν στην α .