ΘΕ1 – Βασικά Μαθηματικά

Σύνολα, σχέσεις, ιδιότητες σχέσεων

Σύνολα

Έστω $\chi(z)$ μία προτασιακή συνάρτηση με μία μεταβλητή z , και U ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού.

Ο συμβολισμός $\{ z \mid \chi(z) , z \in U \}$ ορίζει ένα σύνολο, που αποτελείται από *όλες* τις τιμές του U (και *μόνο*) που: άν αντικαταστήσουν τη μεταβλητή z στη συνάρτηση $\chi(z)$, προκύπτει μια πρόταση με τιμή αλήθειας true .

Συνοπτικά, $a \in \{ z \mid \chi(z) , z \in U \}$ αν και μόνο αν $a \in U$ και $TA(\chi(a)) = true$.

Το πεδίο ορισμού U ονομάζεται *σύνολο αναφοράς*, και η προτασιακή συνάρτηση $\chi(z)$ ονομάζεται *χαρακτηριστική συνάρτηση* του συνόλου $\{ z \mid \chi(z) , z \in U \}$.

Όταν το σύνολο αναφοράς εννοείται από τα συμφραζόμενα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο συμβολισμός $\{ z \mid \chi(z) \}$. [1]

Παράδειγμα 1

Έστω $\chi_1(z) =$ " αν $z^2 > 3$ τότε $z^2 > 4$ " , και $U = \{1, 2, 3\}$:

έχουμε $\{ z \mid \chi_1(z) , z \in U \} = \{ z \mid$ " $z^2 \le 3$ είτε $z^2 > 4$ " , $z \in U \} = \{1, 3\}$.

Έστω $\chi_2(z) =$ " $z^2 \le 4$ αν και μόνο αν $z^2 < 2$ " , και $U = \{0, 1, 2, 3\}$:

έχουμε $\{ z \mid \chi_2(z) , z \in U \} = \{ z \mid$ " $z^2 \le 4$ και $z^2 < 2$ " είτε " $z^2 > 4$ και $z^2 \ge 2$ " , $z \in U \}$

$= \{ z \mid$ " $z^2 < 2$ είτε $z^2 > 4$ " , $z \in U \} = \{0, 1, 3 \}$.

Παρατήρηση 1

Οι γνωστές πράξεις μεταξύ συνόλων (τομή, ένωση, συμπλήρωμα) αντιστοιχούν σε λογικές πράξεις (και, είτε, όχι) μεταξύ των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συνόλων. Έστω $S_1 = \{ z \mid \chi_1(z) , z \in U \}$, $S_2 = \{ z \mid \chi_2(z) = true, z \in U \}$: τότε $S_1 \cap S_2 = \{ z \mid \chi_1(z)$ και $\chi_2(z) \}$, $S_1 \cup S_2 = \{ z \mid \chi_1(z)$ είτε $\chi_2(z) \}$, $U - S_1 = \{ z \mid$ όχι $\chi_1(z) \}$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω μπορούμε να δούμε ότι, από κάθε ταυτότητα της άλγεβρας Boole –

όπως πχ not (s and r) = (not s) or (not r) -- προκύπτει μιά αντίστοιχη ταυτότητα για σύνολα –

όπως πχ $U - (S_1 \cap S_2) = (U - S_1) \cup (U - S_2)$.

Σχέσεις

Ονομάζουμε (*διμερή*) *σχέση πάνω στο σύνολο* U , ένα υπο-σύνολο του καρτεσιανού γινομένου $U \times U$.

Μία σχέση R πάνω στο U είναι ένα σύνολο *ζευγών, με όρους από το* U .

Ο συμβολισμός $x R y$ σημαίνει ότι το (x , y) είναι ένα ζεύγος της R , και είναι ταυτόσημος με τον συμβολισμό $(x , y) \in R$.

---

[1] Εναλλακτικά χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\{ z : \chi(z) , z \in U\}$ – αντίστοιχα $\{ z : \chi(z) \}$, όταν το σύνολο αναφοράς εννοείται.

Έστω $\chi(z_1 , z_2)$ μία προτασιακή συνάρτηση με μεταβλητές z_1 , z_2 , και U ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού.

Ο συμβολισμός $\{ (z_1 , z_2) \mid \chi(z_1 , z_2) ,\ z_1 \in U,\ z_2 \in U \}$ ορίζει μία σχέση R πάνω στο U , που είναι ένα σύνολο ζευγών με σύνολο αναφοράς το $U \times U$, και χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi(z_1 , z_2)$.

Συνοπτικά, $a_1 \, R \, a_2$ ανν $a_1 \in U$, $a_2 \in U$ και TA($\chi(a_1 , a_2)$) = true .

Εναλλακτικά, μπορεί να συμβολιστεί με $R(z_1 , z_2)$ η τιμή της χαρακτηριστικής συνάρτηση της σχέσης R , ώστε $a_1 \, R \, a_2$ ανν $a_1 \in U$, $a_2 \in U$ και $R(a_1 , a_2)$ = true .

<u>Παράδειγμα 2</u>

a) Οι γνωστές σχέσεις $= , \neq , < , \leq$ πάνω στο σύνολο N των θετικών ακέραιων, είναι τα υποσύνολα του $N \times N$ που ορίζονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες προτασιακές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, η σχέση = είναι το σύνολο ζευγών $\{ (z_1 , z_2) \mid z_1 = z_2 ,\ z_1 \in N,\ z_2 \in N \}$ κοκ.

b) Για κάθε θετικό ακέραιο p , η σχέση $\equiv_p$ πάνω στο N ορίζεται ως εξής:

$m \equiv_p n$ ανν $m \in N$, $n \in N$, και οι διαιρέσεις m : p και n : p αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

c) Η σχέση div πάνω στο N ορίζεται ως εξής:

m div n ανν $m \in N$, $n \in N$, και ο m είναι διαιρέτης του n .

Συμμετρική σχέση

Μία σχέση R πάνω στο U λέγεται *συμμετρική*, όταν:

η δήλωση “ αν x R y τοτε y R x ” ισχύει στο U .

<u>Παρατήρηση 2</u>

Η σχέση R πάνω στο U είναι συμμετρική, ανν:

για οποιεσδήποτε τιμές των x , y στο U ,

TA(x R y) implies TA(y R x) = true .

Η σχέση R πάνω στο U *δεν είναι* συμμετρική, ανν:

υπάρχουν (κατάλληλες) τιμές x_0 , y_0 στο U , έτσι ώστε

TA(x_0 R y_0) = true και TA(y_0 R x_0) = false .

Μεταβατική σχέση

Μία σχέση R πάνω στο U λέγεται *μεταβατική*, όταν:

η δήλωση “ αν ‘ x R y και y R z ’ τοτε x R z ” ισχύει στο U .

<u>Παρατήρηση 3</u>

Η σχέση R πάνω στο U είναι μεταβατική, ανν:

για οποιεσδήποτε τιμές των x , y , z στο U ,

TA(x R y και y R z) implies TA(x R z) = true .

Η σχέση R πάνω στο U *δεν είναι* μεταβατική, ανν:

υπάρχουν (κατάλληλες) τιμές των x_0 , y_0 , z_0 στο U , έτσι ώστε

$TA(x_0 \, R \, y_0$ και $y_0 \, R \, z_0) = true$, και $TA(x_0 \, R \, z_0) = false$.

Παράδειγμα 3

a) Έστω $\chi_1(z_1 , z_2)$ = " αν $z_1^2 > 3$ τότε $z_2^2 > 4$ " , και U = {1, 2, 3} :

Ορίζουμε μία σχέση ρ_1 , όπου $\rho_1 = \{ (z_1 , z_2) \mid \chi_1(z_1 , z_2) , \ z_1 \in U, \ z_2 \in U \}$.

Έχουμε $\rho_1 = \{ (z_1 , z_2) \mid$ " $z_1^2 \leq 3$ είτε $z_2^2 > 4$ " , $z_1 \in U, \ z_2 \in U \} = (\{1\} \times U) \cup (U \times \{3\})$.

Επειδή $TA(1 \, \rho_1 \, 2) = true$, $TA(2 \, \rho_1 \, 1) = false$, η σχέση ρ_1 δεν είναι συμμετρική.

b) Έστω $\chi_2(z_1 , z_2)$ = " $z_1 > 1$ είτε $z_2 > 1$ " , και U = {1, 2, 3} :

Ορίζουμε μία σχέση ρ_2 , όπου $\rho_2 = \{ (z_1 , z_2) \mid \chi_2(z_1 , z_2) , \ z_1 \in U, \ z_2 \in U \}$.

Έχουμε $\rho_2 = \{ (z_1 , z_2) \mid$ " $z_1 > 1$ είτε $z_2 > 1$ " , $z_1 \in U, \ z_2 \in U \} = U - \{(1, 1)\}$.

Επειδή $TA(1 \, \rho_2 \, 2$ και $2 \, \rho_2 \, 1) = true$, $TA(1 \, \rho_2 \, 1) = false$,

η σχέση ρ_2 δεν είναι μεταβατική.

Σημείωση 1 Η σχέση R πάνω στο U είναι συμμετρική, ανν:

η δήλωση “ x R y αν και μόνο αν y R x ” ισχύει στο U .

Σημείωση 2 Άν η σχέση R πάνω στο U είναι συμμετρική: τότε και η σχέση R^0 πάνω στο U , όπου

$a \, R^0 \, b$ όταν $a \, R \, b$ είτε $a = b$, $a , b \in U$, θα είναι συμμετρική.

Άν η σχέση R πάνω στο U είναι μεταβατική: τότε και η σχέση R^0 πάνω στο U , όπου

$a \, R^0 \, b$ όταν $a \, R \, b$ είτε $a = b$, $a , b \in U$, θα είναι μεταβατική.

Σχετική βιβλιογραφία

Βούρος – Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική Α

2.1 Διμελείς σχέσεις και ιδιότητές τους

Γεωργακόπουλος – Σύνολα

Παράγραφοι 1 ώς και 9

Γεωργακόπουλος – Σχέσεις

Παράγραφοι 1 ώς και 5

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

1.1 Σύνολα και ακολουθίες

Rosen - Discrete Mathematics

2.1 Sets

2.2 Set Operations

9.1 Relations and Their Properties

9.3 Representing Relations

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Έστω $S_1 = \{ z \mid \chi_1(z) ,\ z \in U \}$, $S_2 = \{ z \mid \chi_2(z) ,\ z \in U \}$:

α Επαληθεύστε ότι $\{ z \mid \chi_1(z) \text{ xor } \chi_2(z) ,\ z \in U \} = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1)$,
όπου xor(s, t) = true αν και μόνο αν $s \neq t$, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s , t .

Το παραπάνω σύνολο ονομάζεται *συμμετρική διαφορά των* S_1 , S_2 , και συμβολίζεται $S_1 \oplus S_2$.

Επαληθεύστε ότι: $S_1 \oplus S_1 = \{ \}$, $S_1 \oplus S_2 = S_2 \oplus S_1$, $S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \oplus S_2) \oplus S_3$,
για οποιαδήποτε σύνολα S_1 , S_2 , S_3 .

β Ποιό σύνολο έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_1(z)$ implies $\chi_2(z)$;
Ποιό σύνολο έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_1(z)$ iff $\chi_2(z)$;

γ Επαληθεύστε ότι: $S_1 \subseteq S_2$ ανν η δήλωση " αν $\chi_1(z)$ τότε $\chi_2(z)$ " ισχύει στο U .
Επαληθεύστε ότι: $S_1 = S_2$ ανν η δήλωση " $\chi_1(z)$ αν και μόνο αν $\chi_2(z)$ " ισχύει στο U .

2 Ποιά είναι τα σύνολα $S_1 = \{ z \mid z = z ,\ z \in U \}$, $S_2 = \{ z \mid z \neq z ,\ z \in U \}$;
Ποιά σύνολα ζευγών είναι οι σχέσεις $R_1 = \{ (z_1 , z_2) \mid z_1 \in U,\ z_2 \in U \}$,
$R_2 = \{ (z_1 , z_2) \mid z_1 \neq z_1 ,\ z_1 \in U,\ z_2 \in U \}$;
Βρείτε αν οι σχέσεις R_1 , R_2 είναι συμμετρικές. Βρείτε αν είναι μεταβατικές.

3 Ποιά σύνολα ζευγών είναι οι γνωστές σχέσεις $\neq$, $<$, $\leq$, πάνω στο σύνολο N των θετικών ακέραιων;

4 Βρείτε ποιές από τις σχέσεις $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $\equiv_p$, div , πάνω στο σύνολο N των θετικών ακέραιων, είναι συμμετρικές. Βρείτε ποιές είναι μεταβατικές.

5 **α** Βρείτε ποιό σύνολο ζευγών είναι η σχέση με χαρακτηριστική συνάρτηση “ $z_1^2 = z_2$ ” ,
πάνω στο σύνολο $\{0, 1, 2\}$.

β Βρείτε αν η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική. Βρείτε αν είναι μεταβατική.

6 Βρείτε αν η σχέση με χαρακτηριστική συνάρτηση “ $z_1 \neq z_2$ και $z_1^2 = z_2$ ” , πάνω στο σύνολο $\{0, 1, 2\}$, είναι συμμετρική. Βρείτε αν είναι μεταβατική.

7 Βρείτε αν η σχέση ρ_1 στο Παράδειγμα 3(a) είναι μεταβατική, εξετάζοντας όλες τις τιμές x , y , z στο U , για τις οποίες ισχύει η πρόταση ‘ $x \rho_1 y$ και $y \rho_1 z$ ’ .
Βρείτε αν η σχέση ρ_2 στο Παράδειγμα 3(b) είναι συμμετρική.

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

1 Έστω $S_1 = \{ z \mid \chi_1(z) ,\ z \in U \}$, $S_2 = \{ z \mid \chi_2(z) ,\ z \in U \}$:

β Ποιό σύνολο έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_1(z)$ implies $\chi_2(z)$;

Ποιό σύνολο έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_1(z)$ iff $\chi_2(z)$;

Έχουμε $\{ z \mid \chi_1(z) \text{ implies } \chi_2(z) ,\ z \in U \} =$

$= \{ z \mid (\text{not } \chi_1(z)) \text{ or } \chi_2(z) ,\ z \in U \}$

$= \{ z \mid (\text{not } \chi_1(z)) ,\ z \in U \} \cup \{ z \mid \chi_2(z) ,\ z \in U \}$

$= (U - S_1) \cup S_2$.

Έχουμε $\{ z \mid \chi_1(z) \text{ iff } \chi_2(z) ,\ z \in U \} =$

$= \{ z \mid (\text{not } \chi_1(z)) \text{ and } (\text{not } \chi_2(z)) \text{ or } (\chi_1(z) \text{ and } \chi_2(z)) ,\ z \in U \}$

$= \{ z \mid (\text{not } \chi_1(z)) \text{ and } (\text{not } \chi_2(z)) ,\ z \in U \} \cup \{ z \mid (\chi_1(z) \text{ and } \chi_2(z)) ,\ z \in U \}$

$= ((U - S_1) \cap (U - S_2)) \cup (S_1 \cap S_2)$.

2 Έχουμε $S_1 = U$, $S_2 = \{ \}$, $R_1 = U \times U$, $R_2 = \{ \}$.

Η σχέση R_1 είναι συμμετρική: για οποιεσδήποτε τιμές των x , y στο U , έχουμε

$TA(y\ R\ x) = \text{true}$, οπότε $TA(x\ R\ y) \text{ implies } TA(y\ R\ x) = \text{true}$.

Η σχέση R_1 είναι μεταβατική: για οποιεσδήποτε τιμές των x , y , z στο U , έχουμε

$TA(x\ R\ z) = \text{true}$, οπότε $TA(x\ R\ y \text{ και } y\ R\ z) \text{ implies } TA(x\ R\ z) = \text{true}$.

Η σχέση R_2 *δεν γίνεται να μην είναι* συμμετρική:

επειδή $TA(x\ R_2\ y) = \text{false}$ για οποιαδήποτε x , y στο U , δεν υπάρχουν τιμές x_0 , y_0

ώστε $TA(x_0\ R\ y_0) = \text{true}$, και $TA(y_0\ R\ x_0) = \text{false}$. Άρα, η σχέση R_2 είναι συμμετρική.

Η σχέση R_2 *δεν γίνεται να μην είναι* μεταβατική:

επειδή $TA(x\ R_2\ y) = \text{false}$ για οποιαδήποτε x , y στο U , δεν υπάρχουν τιμές x_0 , y_0 , z_0

ώστε $TA(x_0\ R\ y_0 \text{ και } y_0\ R\ z_0) = \text{true}$, και $TA(x_0\ R\ z_0) = \text{false}$.

Άρα, η σχέση R_2 είναι μεταβατική.