ΘΕ1 – Βασικά Μαθηματικά

Σχέσεις ισοδυναμίας

Ανακλαστική σχέση

Μία σχέση R πάνω στο σύνολο U λέγεται *ανακλαστική*, όταν η δήλωση “ x R x ” ισχύει στο U .

<u>Παρατήρηση 1</u>

Η σχέση R πάνω στο U είναι ανακλαστική, ανν:

για οποιαδήποτε τιμή της x στο U , ΤΑ(x R x) = true .

Η σχέση R πάνω στο U *δεν είναι* ανακλαστική, ανν:

υπάρχει (κατάλληλη) τιμή της x στο U , ώστε ΤΑ(x R x) = false .

Διαμερισμός συνόλου

Ονομάζουμε *διαμερισμό* ενός συνόλου X , μιά οικογένεια $\{ X_1, ..., X_m \}$ μη-κενών υπο-συνόλων του X , χωρίς κοινά στοιχεία (ξένων) μεταξύ τους, όπου $X = X_1 \cup ... \cup X_m$.

Σχέση ισοδυναμίας

Μία σχέση R πάνω στο σύνολο U λέγεται *σχέση ισοδυναμίας*, όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

Α Η σχέση R είναι συμμετρική, μεταβατική και ανακλαστική.

Β Υπάρχει (μοναδικός) διαμερισμός του U σε υπο-σύνολα $\{ U_1, ..., U_m \}$, ώστε:
Για κάθε x , y στο U ,
x R y αν και μόνο αν τα x , y ανήκουν στο ίδιο σύνολο του διαμερισμού.

Γ Υπάρχει συνάρτηση f_R με πεδίο ορισμού το U , ώστε:
Για κάθε x , y στο U , x R y αν και μόνο αν $f_R(x) = f_R(y)$.

Σημείωση Οι συνθήκες (Α) , (Β) , (Γ) είναι *ισοδύναμες*: κάθε μία από αυτές ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει οποιαδήποτε από τις άλλες δύο (βλέπε την Άσκηση 1).

<u>Παράδειγμα 1</u>

a) Οι γνωστές σχέσεις $=$, $\equiv_p$ πάνω στο σύνολο $\mathbb{N}$ των θετικών ακέραιων, είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

b) Για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) , οι παρακάτω σχέσεις R^0_δ , R^0_μ , R^0_ι , πάνω στο σύνολο V , είναι σχέσεις ισοδυναμίας:

a R^0_δ b όταν: το G έχει μία διαδρομή με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b , είτε a=b .

a R^0_μ b όταν: το G έχει ένα μονοπάτι με αρχή την κορυφή a και τέλος την κορυφή b , είτε a=b .

a R^0_ι b όταν: το G έχει ένα κλειστό ίχνος (a,..., b,..., a) , είτε a=b .

Τα υπο-σύνολα του αντίστοιχου διαμερισμού του V – συνθήκη (B) – για κάθε σχέση, είναι:

$R^0{}_\delta$: τα σύνολα κορυφών των *συνεκτικών συνιστωσών* του G ,

$R^0{}_\mu$: τα σύνολα κορυφών των *συνεκτικών συνιστωσών* του G ,

$R^0{}_\iota$: τα σύνολα κορυφών των *δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές* του G .

Σημείωση Έστω R μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο U . Ονομάζουμε ένα υπο-σύνολο S του U , *μέγιστο για τη σχέση* R , όταν:

1) Η δήλωση " x R y " ισχύει στο S , και

2) Άν $S \subseteq T$, και η δήλωση " x R y " ισχύει στο T , τότε S = T .

Μπορούμε να δούμε ότι: Ένα υπο-σύνολο S του U είναι μέγιστο για τη σχέση R , άν και μόνο άν το S είναι ένα από τα σύνολα του διαμερισμού $\{ U_1, ..., U_m \}$ του U , που αντιστοιχεί στην R σύμφωνα με τη συνθήκη (B) (βλέπε την Άσκηση 5).

Κλάση ισοδυναμίας

Έστω R μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο U . Ονομάζουμε *κλάση ισοδυναμίας* του στοιχείου a ως προς τη σχέση R , το σύνολο $[a]_R = \{ z \mid a R z ,\ z \in U \}$.

Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας

Έστω R μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο U , και $\{ I_1, ..., I_n \}$ οι κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του U , ως προς τη σχέση R :

α Τα σύνολα $\{ I_1, ..., I_n \}$ αποτελούν διαμερισμό του U .

β Για κάθε x , y στο U ,

x R y αν και μόνο αν τα x , y ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

γ Για κάθε x , y στο U , x R y αν και μόνο αν $[x]_R = [y]_R$.

Σημείωση Από τη (β) μπορούμε να δούμε, ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας (των στοιχείων του U ως προς τη σχέση R), συμπίπτουν με τα σύνολα του διαμερισμού του U που αντιστοιχεί στην R (συνθήκη (B)).

Σημείωση Οι παραπάνω «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας» μπορούν να αποδειχτούν – βλέπε τις Ασκήσεις 2 , 3 , 4 – χρησιμοποιώντας τον «Εγκλεισμό κλάσεων ισοδυναμίας», που αναφέρεται παρακάτω.

Εγκλεισμός κλάσεων ισοδυναμίας

Έστω R μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο U . Για κάθε x , y στο U :

1 $x \in [y]_R$ άν και μόνο άν $[x]_R \subseteq [y]_R$.

2 $[x]_R \subseteq [y]_R$ άν και μόνο άν $[x]_R = [y]_R$.

Απόδειξη

1 Ευθύ: Άν $x \in [y]_R$, θα έχουμε $y \, R \, x$, από τον ορισμό της κλάσης ισοδυναμίας του x .

Έστω ότι $z \in [x]_R$ -- τότε θα είναι $x \, R \, z$. Χρησιμοποιώντας τη μεταβατικότητα της R και το ότι $y \, R \, x$, παίρνουμε $y \, R \, z$ – άρα, $z \in [y]_R$. Επειδή το z ήταν τυχαίο, έχουμε ότι $[x]_R \subseteq [y]_R$.

Αντίστροφο: Είναι $x \in [x]_R$ (ανακλαστικότητα της R). Άρα, άν $[x]_R \subseteq [y]_R$, θα είναι και $x \in [y]_R$.

2 $[x]_R \subseteq [y]_R$ άν και μόνο άν $x \in [y]_R$ (από το 1) , άνν $y \, R \, x$ (ορισμός της κλάσης ισοδυναμίας του y), άνν $x \, R \, y$ (συμμετρία της R), άνν $y \in [x]_R$, άν και μόνο άν $[y]_R \subseteq [x]_R$ (από το 1) .

Σχετική βιβλιογραφία

Βούρος – Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική Α

2.3.2 Σχέσεις ισοδυναμίας

Γεωργακόπουλος – Σχέσεις Ισοδυναμίας

Παράγραφοι 1 ώς και 5

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

1.2 Σχέσεις ισοδυναμίας

Rosen - Discrete Mathematics

9.5 Equivalence Relations

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Τα παρακάτω ερωτήματα αφορούν στις συνθήκες (Α) , (Β) , (Γ) για τις «Σχέσεις ισοδυναμίας» :

α Αποδείξτε ότι η (Γ) συνεπάγεται τη (Β) .

β Αποδείξτε ότι η (Β) συνεπάγεται την (Α) .

γ Αποδείξτε ότι η (Α) συνεπάγεται τη (Γ) , άν θέσουμε $f_R(a) = [a]_R$, για κάθε a στο U .

2 Έστω ότι τα x , y , είναι στοιχεία μίας κλάσης ισοδυναμίας $[a]_R$. Αποδείξτε ότι x R y .

3 Έστω ότι δύο κλάσεις ισοδυναμίας, $[a]_R$, $[b]_R$, έχουν (τουλάχιστον ένα) κοινό στοιχείο. Αποδείξτε ότι $[a]_R = [b]_R$.

4 Αποδείξτε τις «Ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας», χρησιμοποιώντας τον «Έγκλεισμό κλάσεων ισοδυναμίας», και τις Ασκήσεις 2 , 3.

5 Αποδείξτε ότι: Ένα υπο-σύνολο S του U είναι μέγιστο για τη σχέση R , μόνο άν το S είναι ένα από τα σύνολα του διαμερισμού $\{ U_1, ..., U_m \}$ του U , που αντιστοιχεί στην R σύμφωνα με τη συνθήκη (Β) .

6 **α** Επαληθεύστε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό $k \neq 0$, η παρακάτω σχέση ρ_k πάνω στο σύνολο των πραγματικών είναι σχέση ισοδυναμίας: $\rho_k = \{ (x , y) \mid xy = k \text{ είτε } x=y \}$.

β Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ρ_k .

γ Βρείτε αν η σχέση ρ_0 πάνω στο σύνολο των πραγματικών, είναι σχέση ισοδυναμίας

7 Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας των σχέσεων = , $\equiv_p$, πάνω στο σύνολο των θετικών ακέραιων.

8 Επαληθεύστε ότι, για κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) , οι σχέσεις $R^0{}_\delta$, $R^0{}_\mu$, και $R^0{}_\iota$ (πάνω στο V), είναι σχέσεις ισοδυναμίας.