ΘΕ4 – Αναδρομή και Επαγωγή για Γραφήματα

Επαγωγή και αναδρομή για συνεκτικά γραφήματα

Επαγωγή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής)

Η *αρχή της επαγωγής*, με αφαίρεση κορυφής, για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(G) – όπου G είναι *συνεκτικό* γράφημα – είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς α κορυφές, όπου α κάποιος θετικός ακέραιος.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα συνεκτικό γράφημα Γ = (V, E) με $|V| \geq \alpha$:

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: ΤΑ(Π(Γ)) = true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: ΤΑ(Π(Δ)) = true ,

για κάθε συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z_1\} , \ldots, \{u, z_m\}\})$,

όπου $u \notin V$, $\{ z_1 , ..., z_m \} \subseteq V$, $m \geq 1$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό γράφημα G με τουλάχιστον α κορυφές.

Ορθότητα της επαγωγής για συνεκτικά γραφήματα

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε $n \geq \alpha$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω n = α : ισχύει ότι π(α) , λόγω του (1) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq \alpha$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(K) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(K+1) , έστω Δ ένα συνεκτικό γράφημα με ακριβώς K+1 κορυφές.

Πρέπει να δείξουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

Έστω u μία κορυφή του Δ που δεν είναι κομβικό σημείο – επομένως το γράφημα Γ = Δ–u είναι συνεκτικό. Επίσης το Γ θα έχει ακριβώς K κορυφές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ)) = true . Χρησιμοποιώντας το (2) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

<u>Παράδειγμα 1</u> Να αποδειχτεί ότι: Για κάθε συνεκτικό γράφημα G = (V, E) , είναι $|E| \geq |V|-1$.

Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής, με αφαίρεση κορυφής, για την προτασιακή συνάρτηση Π(G) = « άν G = (V, E) τότε $|E| \geq |V|-1$ » – όπου G είναι συνεκτικό γράφημα.

1 *Αρχική περίπτωση* Για κάθε συνεκτικό γράφημα G = (V, E) με $|V|=1$, είναι $|E|=0$.

Άρα ΤΑ(Π(G)) = true .

2 *Επαγωγικό βήμα* Έστω ένα συνεκτικό γράφημα Γ = (V, E) με $|V| \geq 1$, για το οποίο είναι δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: $|E| \geq |V|-1$.

Πρέπει να επαληθευτεί το *ζητούμενο*: $|E_1| \geq |V_1|-1$,

για κάθε συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V_1 , E_1) = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z_1\} , \ldots, \{u, z_m\}\})$,

όπου $u \notin V$, $\{ z_1 , ..., z_m \} \subseteq V$, $m \geq 1$.

Έχουμε: $|V_1| = |V|+1$, $|E_1| = |E|+m$. Επειδή $m \geq 1$, είναι $(|E_1| - |V_1|) \geq (|E| - |V|)$.

Από την *επαγωγική υπόθεση* $|E| - |V| \geq -1$, άρα $|E_1| - |V_1| \geq -1$.

Αναδρομή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής)

Για την συνάρτηση Φ(G) όπου G είναι *συνεκτικό* γράφημα, έστω ότι:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Υπάρχει μέθοδος που υπολογίζει την τιμή Φ(G) , για κάθε συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς α κορυφές – όπου α κάποιος θετικός ακέραιος.

2 *Επαγωγικό βήμα* Υπάρχει μέθοδος που: για κάθε ένα συνεκτικό γράφημα $\Gamma = (V, E)$, $|V| \geq \alpha$,

χρησιμοποιώντας την τιμή Φ(Γ) *ως δεδομένο,*

μπορεί να υπολογίσει τη *ζητούμενη* τιμή Φ(Δ) ,

για κάθε συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z_1\} , \ldots, \{u, z_m\}\})$,

όπου $u \notin V$, $\{ z_1 , ..., z_m \} \subseteq V$, $m \geq 1$.

Με βάση τα παραπάνω: η τιμή Φ(G) μπορεί να υπολογιστεί, για κάθε συνεκτικό γράφημα G = (V, E) με $|V| \geq \alpha$, με τον παρακάτω *αναδρομικό* αλγόριθμο F(G) :

if |V| = α

then υπολόγισε το F(G) , όπως στο (1)

return F(G)

else βρές μη-κομβικό σημείο u του G

υπολόγισε το F(G–u) % αναδρομική κλήση

χρησιμοποιώντας το F(G–u) ως δεδομένο, υπολόγισε το F(G) – όπως στο (2)

return F(G)

***Ορθότητα του αλγόριθμου* F(G)**

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « Ο αλγόριθμος F(G) τερματίζει, και F(G) = Φ(G) ,

για κάθε συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε $n \geq \alpha$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω n = α : ισχύει ότι π(α) , λόγω του (1) και της πρώτης περίπτωσης του αλγόριθμου F(G) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq \alpha$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(K) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(K+1) , έστω Δ ένα συνεκτικό γράφημα με ακριβώς K+1 κορυφές.

Πρέπει να δείξουμε ότι η κλήση F(Δ) του αλγόριθμου τερματίζει, και F(Δ) = Φ(Δ) .

Επειδή $K+1 > \alpha$, χρησιμοποιείται η δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου $F(G)$. Έστω u το μη-κομβικό σημείο του Δ που επιλέγεται. Το γράφημα $\Gamma = \Delta - u$ είναι συνεκτικό και έχει ακριβώς K κορυφές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση*: η κλήση $F(\Gamma)$ του αλγόριθμου τερματίζει, και $F(\Gamma) = \Phi(\Gamma)$.

Από το (2) και τη δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου $F(G)$, βλέπουμε ότι η κλήση $F(\Delta)$ τερματίζει, και $F(\Delta) = \Phi(\Delta)$.

<u>Παράδειγμα 2</u> Να υπολογιστεί, για κάθε συνεκτικό γράφημα G ,
ένα συνεκτικό και άκυκλο υπο-γράφημα του G , με το ίδιο σύνολο κορυφών.

Σύμφωνα με την αναδρομή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής): υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| \geq 1$, μία τιμή $T(G)$ όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί τιμή $T(G)$ όπως απαιτείται, για κάθε συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς μία κορυφή: Θέτουμε $T(G) = G$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα συνεκτικό γράφημα $\Gamma = (V, E)$ με $|V| \geq 1$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενη* τιμή $T(\Delta)$ όπως απαιτείται,

για κάθε συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V \cup \{u\} ,\ E \cup \{\{u, z_1\} , \ldots, \{u, z_m\}\})$,

όπου $u \notin V$, $\{ z_1 , ..., z_m \} \subseteq V$, $m \geq 1$

έχοντας *δεδομένη* μία τιμή $T(\Gamma) = (V, Z)$ (όπως απαιτείται) :

Θέτουμε $T(\Delta) = (V \cup \{u\} ,\ Z \cup \{\{u, z_1\}\})$.

Το γράφημα $T(\Delta)$ είναι υπο-γράφημα του Δ , με το ίδιο σύνολο κορυφών.

Επειδή το $T(\Gamma)$ είναι συνεκτικό, το $T(\Delta)$ είναι συνεκτικό.

Επειδή το $T(\Gamma)$ είναι άκυκλο, το $T(\Delta)$ είναι άκυκλο – η κορυφή u δεν μπορεί να εμφανιστεί σε κύκλο, αφού έχει βαθμό 1.

Επαγωγή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής)

Η *αρχή της επαγωγής*, με αφαίρεση ακμής, για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση $\Pi(G)$ – όπου G είναι *συνεκτικό* γράφημα – είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* $TA(\Pi(G)) =$ true , για κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|V|=1$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) συνεκτικά γραφήματα $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$:

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: $TA(\Pi(\Gamma_1)) = TA(\Pi(\Gamma_2)) =$ true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: $TA(\Pi(\Delta_1)) = TA(\Pi(\Delta_2)) =$ true ,

για *οποιαδήποτε* συνεκτικά γραφήματα

i) $\Delta_1 = (V_1 ,\ E_1 \cup \{\{z_1, z_2\}\})$, όπου $z_1 \in V_1$, $z_2 \in V_1$

ii) $\Delta_2 = (V_1 \cup V_2 ,\ E_1 \cup E_2 \cup \{\{z_1, z_2\}\})$, όπου $z_1 \in V_1$, $z_2 \in V_2$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $TA(\Pi(G)) =$ true , για κάθε συνεκτικό G .

Ορθότητα της επαγωγής για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής)

Ορίζουμε την εξής προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$, όπου n είναι θετικός ακέραιος:

$\pi(n)$ = « ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό γράφημα G , που έχει το πολύ n ακμές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ($\pi(n)$) = true , για κάθε $n \geq 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$.

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 0$: ισχύει ότι $\pi(0)$, λόγω του (1) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 0$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει $\pi(K)$.

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, $\pi(K+1)$, έστω Δ ένα συνεκτικό γράφημα με ακριβώς K+1 ακμές. Πρέπει να δείξουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true . Έστω $e = \{z_1, z_2\}$ μία ακμή του Δ .

Άν το γράφημα $\Delta - e = \Gamma_1$ είναι συνεκτικό:

Το Γ_1 θα έχει ακριβώς K ακμές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ_1)) = true . Χρησιμοποιώντας το (2) – (i) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true.

Άν το γράφημα $\Delta - e$ δεν είναι συνεκτικό: Έστω Γ_1 , Γ_2 οι συνεκτικές συνιστώσες του $\Delta - e$.

Κάθε ένα από τα Γ_1 , Γ_2 θα έχει το πολύ K ακμές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ_1)) = ΤΑ(Π(Γ_2)) = true. Χρησιμοποιώντας το (2) – (ii) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true.

Σημείωση

Άν το γράφημα Δ έχει κύκλο, μπορεί να επιλεγεί μία ακμή e του Δ που να μην είναι γέφυρα – οπότε το γράφημα $\Delta - e$ θα είναι συνεκτικό, και το (2) – (ii) δεν θα χρησιμοποιηθεί.

Άν το γράφημα Δ δεν έχει κύκλο, δεν υπάρχει ακμή του Δ που να μην είναι γέφυρα.

Μπορούμε να δούμε ότι ισχύει η εξής

<u>*Αρχή της επαγωγής*, με αφαίρεση *μη-γέφυρας*</u>

Για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(G) – όπου G είναι *συνεκτικό* γράφημα – έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε *άκυκλο* συνεκτικό γράφημα G = (V, E) .

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα συνεκτικό γράφημα Γ = (V, E) :

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: ΤΑ(Π(Γ)) = true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: ΤΑ(Π(Δ)) = true ,

για κάθε συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V , E \cup \{\{z_1, z_2\}\})$,

όπου $z_1 \in V$, $z_2 \in V$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό G .

<u>*Ορθότητα της επαγωγής*, με αφαίρεση *μη-γέφυρας*</u>

Ορίζουμε την εξής προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$, όπου n είναι θετικός ακέραιος:

$\pi(n)$ = « ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε συνεκτικό γράφημα G , που έχει το πολύ n μη-γέφυρες » .

Δείχνουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ($\pi(n)$) = true , για κάθε $n \geq 0$.

Χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$ – εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Χρησιμοποιώντας την επαγωγή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής), αποδείξτε ότι:

α Για κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, είναι $|E| \geq |V|-1$.

β Κάθε συνεκτικό γράφημα G , έχει ένα συνεκτικό και άκυκλο υπο-γράφημα, με το ίδιο σύνολο κορυφών.

2 Χρησιμοποιώντας την επαγωγή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής), αποδείξτε ότι:

α Κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ για το οποίο $|E| = |V| -1$, είναι άκυκλο.

β Κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ για το οποίο $|E| > |V| -1$, έχει κύκλο.

3 Να υπολογιστεί, για κάθε συνεκτικό γράφημα G με μέγιστο βαθμό K , ένας *χρωματισμός* των κορυφών του G , με $K+1$ χρώματα (το πολύ), έτσι ώστε: τα χρώματα των άκρων οποιασδήποτε ακμής, να είναι διαφορετικά.
Χρησιμοποιείστε την αναδρομή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής).

4 Χρησιμοποιώντας την επαγωγή με αφαίρεση μη-γέφυρας, αποδείξτε ότι:
Κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, έχει τουλάχιστον $|E|-|V|+1$ κύκλους.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

1.3 Επαγωγή

2.4 Επαγωγή για τα συνεκτικά γραφήματα

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

5.2 Strong Induction and Well-Ordering

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction

5.4 Recursive Algorithms