(Μονομερείς) ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ *A* × *A* – «γραφήματα»

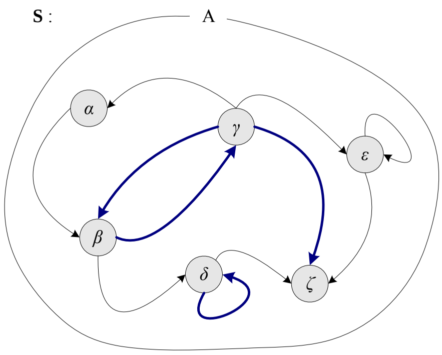
1. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ, (ΜΟΝΟΜΕΡΕΙΣ ή ΕΝΔΟΓΕΝΕΙΣ): το σκεπτικό.

▪ Μια ειδική μορφή των διμερών σχέσεων στο A × B είναι τα δύο μέρη να ισούνται: B = A. Οι σχέσεις αυτές ορίζονται <u>εντός</u> <u>ενός</u> συνόλου αναφοράς A, και γι' αυτό προσδιορίζονται ως *ενδο-γενείς* ή *μονο-μερείς*. Ως «είδος» των σχέσεων, παρουσιάζει περισσότερες ιδιότητες, και μάλιστα πολύ ενδιαφέρουσες. Τα δύο (ή τρία αν θέλετε) κυριώτερα είδη σχέσεων στα μαθηματικά είναι αυτού του τύπου: οι σχέσεις ισοδυναμίας και οι σχέσεις διάταξης.

▪ Η μεθολογία μας για την μελέτη τους θα είναι η ίδια: από τα μορφικά χαρακτηριστικά τους θα επισημάνουμε μορφικές ιδιότητες και από τον συνδυασμό αυτών των ιδιοτήτων θα προσδιορίσουμε διάφορα (υπο)-είδη τους.

2. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: σχεδίαση και μορφικά χαρακτηριστικά.

▪ Στις μονομερείς διμελείς σχέσεις ένα (διατεταγμένο) ζεύγος της σχέσης συνεχίζουμε να το σχεδιάζουμε με ένα βέλος από ένα στοιχείο προς ένα άλλο, μόνο που τώρα δεν χρειάζεται να σχεδιάσουμε δύο σύνολα αναφοράς, αφού έχουμε μόνον ένα.



▪ Στο σχήμα παραπλεύρως έχουμε μια σχέση S με 6 στοιχεία (ή ***κόμβους***), και 7 ζεύγη συσχέτισης (ή ***ακμές***) επί του συνόλου A = { α, β, γ, δ, ε, ζ }.

Έχουμε τρία μορφικά χαρακτηριστικά άξια προσοχής:

▪ Τα ζεύγη ⟨δ, δ⟩ και ⟨ε, ε⟩ συσχετίζουν ένα στοιχείο (το 'δ' ή το 'ε') με τον εαυτό του. Αυτές οι συσχετίσεις ονομάζονται *ανακλαστικές* (από την αναλογία των αντ-ανακλάσεων σε ένα καθρέφτη).

▪ Τα στοιχεία 'β' και 'γ', σχετίζονται κατά συμμετρικό τρόπο: η σχέση διαθέτει και το ζεύγος ⟨β, γ⟩ και το ζεύγος ⟨γ, β⟩. Αυτές οι ακμές είναι και ονομάζονται *συμμετρικές*.

▪ Η ακμή ⟨γ, ζ⟩ προκύπτει από την *σύνθεση* δύο συνεχόμενων (ή *διαδοχικών*) ακμών, των ⟨γ, ε⟩ και ⟨ε, ζ⟩. Αυτές οι ακμές ονομάζονται *μεταβατικές*. Παρόμοια, μεταβατική είναι και η ακμή ⟨γ, β⟩.

3. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ - οι θεμελιακές ιδιότητες: ανακλαστικότητα, συμμετρικότητα, μεταβατικότητα.

▪ Προφανώς σε μια «τυχαία» διμελή σχέση κάποιες ακμές θα είναι λ.χ. συμμετρικές ή μεταβατικές, και κάποιες όχι. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι «ακραίες» καταστάσεις: το τί συμβαινει όταν π.χ. *όλες* οι ακμές είναι συμμετρικές, ή όταν *καμμία* δεν είναι συμμετρική. Η εξέταση των ακραίων μορφών παράγει τις εξής ιδιότητες των διμελών σχέσεων:

Ιδιότητες $S \subseteq A \times A$:	*Τυπική μορφή:*	*Ερμηνεία:*
ανακλαστική	$\forall \alpha \in A\ \langle \alpha, \alpha \rangle \in S$	*όλες* οι ανακλαστικές ακμές υπάρχουν στην S.
μη-ανακλαστική	$\forall \alpha \in A\ \langle \alpha, \alpha \rangle \notin S$	*καμμία* ανακλαστική ακμή δεν υπάρχει στη S.
συμμετρική	$\forall \alpha, \beta \in A\ \langle \alpha, \beta \rangle \in S \rightarrow \langle \beta, \alpha \rangle \in S$	αν υπάρχει μία ακμή στην S, τότε *πάντοτε* υπάρχει και η συμμετρική της.
μη-συμμετρική	$\forall \alpha, \beta \in A\ \langle \alpha, \beta \rangle \in S \rightarrow \langle \beta, \alpha \rangle \notin S$	αν υπάρχει μία ακμή στην S, τότε *ουδέποτε* υπάρχει και η συμμετρική της.
αντισυμμετρική	$\forall \alpha, \beta \in A\ \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle \in S \rightarrow (\alpha = \beta)$	τα μόνα συμμετρικά ζεύγη είναι ανακλαστικά.
μεταβατική	$\forall \alpha, \beta \in A, (\exists \mu \in A\ \langle \alpha, \mu \rangle, \langle \mu, \beta \rangle \in S) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle \in S$	*όλες* οι μεταβατικές ακμές περιέχονται στην S.
μη-μεταβατική ***(ή αμετάβατη)***	$\forall \alpha, \beta \in A, (\exists \mu \in A\ \langle \alpha, \mu \rangle, \langle \mu, \beta \rangle \in S) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle \notin S$	*καμμία* μεταβατική ακμή δεν περιέχεται στη S.

▪ ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε μη-συμμετρική σχέση είναι κατ' ανάγκην μη-ανακλαστική, διότι δεν μπορούν να υπάρχουν ανακλαστικά ζεύγη ⟨x, x⟩, αφού σε αυτά το συμμετρικό τους συμπίπτει με τον εαυτό τους, και έτσι το ⟨x, x⟩ ∈ S θα μας οδηγούσε στην αντίφαση ⟨x, x⟩ ∉ S. Γι' αυτό διακρίνουμε την χαλαρότερη περίπτωση της *αντισυμμετρίας*, όπου τα *μόνα* συμμετρικά ζεύγη που επιτρέπονται είναι τα «τετριμμένα», δηλαδή τα ανακλαστικά ⟨x, x⟩.

4. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ - η μορφολογία: 3 κύριες «μεταβατικές» περιπτώσεις.

▪ Μια (ενδογενής) διμελής σχέση είναι δυνατόν να διαθέτει έναν οποιοδήποτε *συνδυασμό* ιδιοτήτων όπως αυτές που αναφέραμε στα προηγούμενα. Κάποιοι συνδυασμοί εξ αυτών εμφανίζονται συχνά και παρουσιάζουν ειδικό ενδιαφέρουν: παράγουν ένα *είδος* σχέσεως. Θα περιοριστούμε εδώ σε *μεταβατικές* σχέσεις, και από αρκετά ενδιαφέροντα είδη, θα διακρίνουμε τρία θεμελιακά. Δίνουμε έναν σχετικό πίνακα, και τον εξηγούμε αμέσως μετά:

Μορφολογία: 3 θεμελιακά είδη (μεταβατικών) διμελών σχέσεων – *ισοδυναμίες και διατάξεις* , (*γνήσιες και μή*).

μεταβατική	*συμμετρική*	*αντι-συμμετρική*	*μη-συμμετρική*	*ανακλαστική*	*μη-ανακλαστική*	ΜΟΡΦΗ ΣΧΕΣΕΩΣ
✓	✓			✓		***σχέση ισοδυναμίας***
✓		✓		✓		***(μερική) διάταξη, μη-γνήσια***
✓		⇒	✓		⇒ ✓	***(μερική) διάταξη, γνήσια***

- ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ:
  - ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΤΗΤΑ: Σε όλες τις περιπτώσεις υποθέτουμε την μεταβατική ιδιότητα. Η ιδιότητα αυτή δεν είναι φυσικά αναγκαία, αλλά έχει την πρώτη προτεραιότητα εκ μέρους μας διότι, πρακτικά, οι σχέσεις λαμβάνουν όλη τους την σημασία στην «επανάληψή» τους, δηλαδή στη σύνθεση με άλλες και, φυσικά με τον εαυτό τους.
    - Π.χ. όταν συνδέουμε οδικά μία πόλη με μία άλλη, αυτό δεν γίνεται για να διανύουμε αυτή την μία οδό και μόνον, αλλά για να χρησιμοποιούμε την μία οδό μετά την άλλη, διανύοντας έτσι ένα «οδικό δίκτυο».
    - Όταν γνωρίζουμε ένα φίλο, τότε μέσω αυτού – το συχνότερο – γνωρίζουμε και τους φίλους του φίλου μας, κοκ., κινούμενοι έτσι σε ένα πλέγμα κοινωνικών σχέσεων.
    - Όταν βάζουμε ένα βιβλίο στη βαλίτσα μας, και στη συνέχεια την παίρνουμε στην εκδρομή μας, τότε έχουμε πάρει μαζί μας και το συγκεκριμμένο βιβλίο (προφανώς!). Για τον «ίδιο» μεταβατικό λόγο, όταν εισέλθουμε σε ένα δωμάτιο έχουμε ταυτοχρόνως εισέλθει και στο σχετικό κτίριο, και στο βάρος μίας φόρτωσης θα πρέπει το βάρος των δοχείων να προσθέσουμε και το βάρος του περιεχομένου τους.
    - Και, ως τελευταίο παράδειγμα, εάν μια πράξη μας θα έχει συνέπειες, πρέπει να συνυπολογίσουμε και τις συνέπειες των συνεπειών, κοκ.

    Όλα τα προηγούμενα δεν εκφράζουν παρά την μεταβατικότητα διαφόρων σχέσεων.
  - Ακόμα και όταν μια σχέση δεν είναι μεταβατική κατά γράμμα, συχνά δεν χάνει το «νόημά της» εάν προσθέσουμε όσες μεταβατικές ακμές χρειάζονται για να γίνει. Π.χ. δύο πόλεις «*συνδέονται αεροπορικά*» εάν υπάρχει ένα δρομολόγιο από την $1^η$ στην $2^η$. Αυτή η $2^η$ πόλη είναι συχνότατα δυνατόν να συνδέεται αεροπορικά με μια $3^η$ χωρίς να υπάρχει κατ' ευθείαν δρομολόγιο από την $1^η$ στη $3^η$. Αυτό όμως δεν μας εμποδίζει να λέμε ότι είναι δυνατόν να «*μεταβείς αεροπορικά*» από την $1^η$ στην $3^η$, διότι τα ουσιώδη σημεία αυτού του τρόπου μεταφοράς (λ.χ. «πτήση» και «ταχύτητα») διατηρούνται.
  - ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: Η συμμετρικότητα λαμβάνει τις δύο ακραίες μορφές, (συμμετρική και μη-συμμετρική), και την (ήδη σχολιασμένη) χαλαρότερη μορφή της αντισυμμετρικότητας.
  - ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ: Ο συνδυασμός «*μεταβατική + συμμετρική*» ουσιαστικά επιβάλλει ως τρίτη επιλογή την ανακλαστική ιδιότητα: μια *μεταβατική + συμμετρική + μη-ανακλαστική* σχέση δεν θα περιείχε κανένα ζεύγος (!) διότι αν υπήρχε ένα ζεύγος $\langle α, β\rangle$ θα υπήρχε και το $\langle β, α\rangle$ (λόγω συμμετρίας) και θα λαμβάναμε το $\langle α, α\rangle$ (λόγω μεταβατικότητας), το οποίο όμως αποκλείεται (λόγω μη-ανακλαστικότητας). Επίσης η μη-συμμετρική ιδιότητα έχει ως άμεση συνέπεια την μη-ανακλαστικότητα, αφού αν για κάποια α υπάρχει το ζεύγος $\langle α, α\rangle$ υπάρχει και το συμμετρικό του (το ίδιο το $\langle α, α\rangle$), πράγμα που αποκλείεται, άρα το $\langle α, α\rangle$ δεν υπάρχει για κανένα στοιχείο α. Τέλος, για παρόμοιους λόγους η αντι-συμμετρική ιδιότητα αρμόζει να εξεταστεί μαζί με την ανακλαστική, (συχνά κατά σύμβαση), αφού αν υπάρχει έστω ένα συμμετρικό ζεύγος $\langle α, β\rangle$ και $\langle β, α\rangle$ αυτό θα πρέπει (μεταβατικά) να είναι ανακλαστικό.

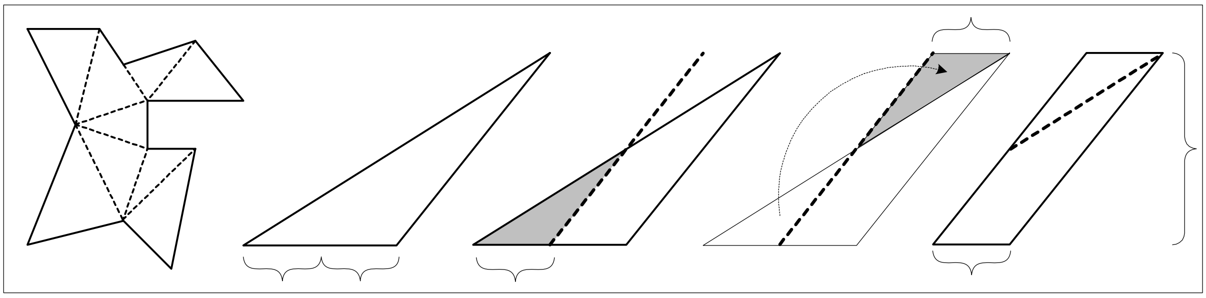
- ΟΡΟΛΟΓΙΑ:
  - Η συμμετρικότητα μας οδηγεί να πούμε τον πρώτο συνδυασμό ιδιοτήτων ***σχέση ισοδυναμίας***.
  - Η α-συμμετρία μας οδηγεί να ονομάσουμε το $2^ο$ και $3^ο$ είδος ***σχέση διάταξης***.
  - Και στις διατάξεις, η ανακλαστικότητα ή μη, διαφοροποιεί,
    - το $2^ο$ είδος σε «***μη-γνήσιες***», και,
    - το $3^ο$ είδος σε «***γνήσιες***» διατάξεις.

5. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: παραδείγματα.

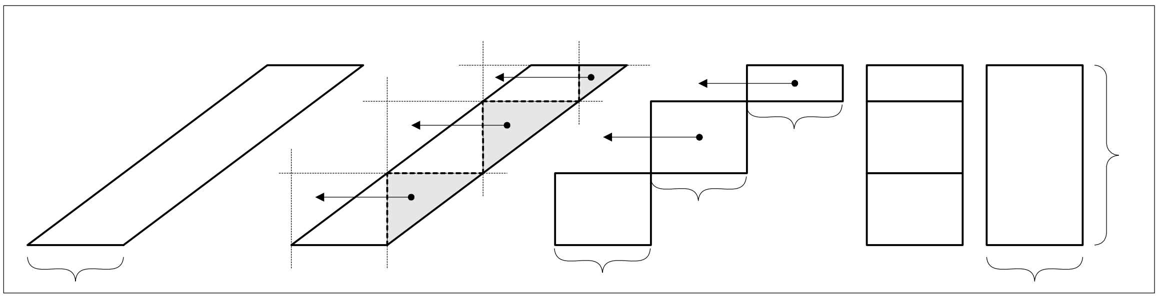
▪ Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα σχέσεων και εξετάστε –από τον κανόνα των σχέσεων– ποιές ιδιότητες έχουν και επομένως σε μια είδη εντάσσονται (εφόσον συμβαίνει κάτι τέτοιο). Ορισμένες εξ αυτών τις αναλύουμε περισσότερο στις επόμενες παραγράφους. Το «Κ/Σ» συντομογραφεί το «κατά σύμβαση.

	Κανόνας σχέσης	*Ανακλαστική*	*Συμμετρική*	*Μεταβατική*	*ΕΙΔΟΣ*	*ΕΙΔΟΣ*
	Καθημερινά (επί προσώπων):					
1	«α φίλος-του β»	ΝΑΙ (Κ/Σ)	ΝΑΙ	×	×	×
2	«α πρόγονος-του β»	ΜΗ-ΑΝΑΚ	ΜΗ-ΣΥΜΜ	ΝΑΙ		ΔΙΑΤ (ΓΝ)
3	«α αδελφός-του β»	ΝΑΙ (Κ/Σ)	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
4	«α συνδέεται οδικά με β»	ΝΑΙ (Κ/Σ)	ΝΑΙ	ΝΑΙ (Κ/Σ)	ΙΣΟΔ	
5	«α το-πολύ-νεότερος του β»	ΝΑΙ	ΑΝΤΙ-ΣΥΜΜ	ΝΑΙ		ΔΙΑΤ (ΜΓ)
6	«οι α και β έχουν το ίδιο ύψος»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
7	«εργαζόμενος α συνάδελφος-του β»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
8	«σε 'τουρνουά' η ομάδα α νίκησε την β»	ΜΗ-ΑΝΑΚ	ΜΗ-ΣΥΜΜ	×	×	×
	Μαθηματικά (επί αριθμών ή σχημάτων):					
9	«σχήμα α τέμνει σχήμα β»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	×	×	×
10	«αριθμός α διαιρεί-τον β»	ΝΑΙ	ΑΝΤΙ-ΣΥΜΜ	ΝΑΙ		ΔΙΑΤ (ΜΓ)
11	«α και β έχουν το ίδιο υπόλοιπο δια 7»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
12	«το σχήμα α ανασυναρμολογείται στο β»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
13	«τρίγωνο α όμοιο με τρίγωνο β»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	
14	«ζάρι α κερδίζει ζάρι β»	ΜΗ-ΑΝΑΚ	ΜΗ-ΣΥΜΜ	ΟΧΙ	×	×
15	«σχήμα α χωράει-*εντός*-του σχήματος β»	ΜΗ-ΑΝΑΚ	ΜΗ-ΣΥΜΜ	ΝΑΙ		ΔΙΑΤ (ΓΝ)
16	«διάστημα α όλο-πριν διάστημα β»	ΜΗ-ΑΝΑΚ	ΜΗ-ΣΥΜΜ	ΝΑΙ		ΔΙΑΤ (ΓΝ)
17	«πολύγωνο α ίσου-εμβαδού-με β»	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΙΣΟΔ	

▪ ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ #12: Έστω ότι έχουμε δύο επίπεδα πολύγωνα Α και Β. Αν το κόψουμε το Α με ευθείες γραμμές σε μικρότερα πολύγωνα, ίσως είναι δυνατόν να το «ανασυναρμολογήσουμε» και να σχηματίσουμε το πολύγωνο Β. Σε αυτή τη περίπτωση θα λέμε ότι το πολύγωνο Α είναι «*ισοκοπτικό*» του Β.

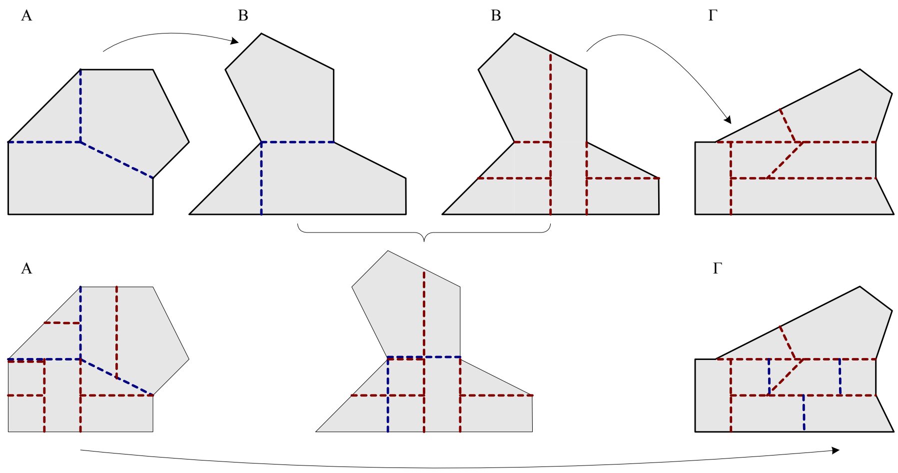


▪ Π.χ. στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι κάθε απλό πολύγωνο διαμερίζεται σε τρίγωνα, και ότι κάθε *τρίγωνο* είναι ισοκοπτικό με ένα *πλάγιο παραλληλόγραμμο*, (με την μισή βάση και το ίδιο ύψος).



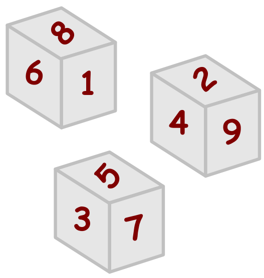
▪ Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το πώς κάθε *πλάγιο παραλληλόγραμμο*, είναι ισοκοπτικό με ένα *ορθογώνιο* παραλληλόγραμμο, με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

▪ Χρειάζεται περισσότερη προσπάθεια για να δείξουμε ότι ένα ορθογώνιο είναι ισοκοπτικό με ένα τετράγωνο, και ότι δύο τετράγωνα είναι (από κοινού) ισοκοπτικά με *ένα* τετράγωνο. (Γι' αυτά χρειαζόμαστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.) Όλα αυτά θα μας έδιναν ότι κάθε πολύγωνο είναι, τελικά, ισοκοπτικό με ένα τετράγωνο (!) — αν ήμασταν βέβαιοι για τις ιδιότητες αυτής της σχέσης...



- Είναι εύκολο να βεβαιώσει κάποιος ότι η ισοκοπτική σχέση είναι *ανακλαστική* (διότι δεν χρειάζεται καμμία κοπή), και *συμμετρική* (διότι αρκεί, με τις ίδιες κοπές, να αντιστρέψουμε την αρμολόγηση). Αλλά τί καθιστά την σχέση αυτή μεταβατική; Διότι αν το πολύγωνο Α κόβεται και δίδει το Β, και το Β κόβεται και δίδει το Γ, *πώς* θα μπορούσε να κοπεί το *Α* ώστε να δώσει το Γ; Αυτό φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το ενδιάμεσο πολύγωνο Β κόβεται κατά δύο τρόπους: κατ' αυτόν που προέρχεται από το Α και κατ' αυτόν που παράγει το Γ. Αρκεί να υπερθέσουμε τις δύο κοπές (μαζί με όποια σύνορα των διαφόρων τμημάτων), και να τις μεταφέρουμε στο Α, ώστε να λάβουμε μια κοπή στο Α ικανή να παραγάγει το Γ. Η σχέση «ισοκοπτικότητας» λοιπόν είναι *και μεταβατική*, είναι δηλαδή συνολικά *σχέση ισοδυναμίας*.
  (Και άρα – ναί – κάθε επίπεδο πολύγωνο είναι ισοκοπτικό με κάποιο τετράγωνο! Μέ ακριβώς ένα; oops!)

- ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ #14: Έχουμε δύο ζάρια με αριθμούς στις 6 όψεις τους – ή απλούστερα στις τρείς όψεις, (και με τους ίδιους αριθμούς στις αντίθετες όψεις). Δύο παίκτες ρίχνουν το ζάρι τους και κερδίζει όποιος φέρει τον μεγαλύτερο αριθμό. Καθώς υπάρχουν 3 × 3 = 9 ανεξάρτητα συμβάντα, ένα από τα δύο ζάρια θα κερδίζει περισσότερες από τις μισές φορές, (τουλάχιστον στις 5 από τις 9) και άρα μακροπρόθεσμα ο παίκτης που το έχει θα είναι ο κερδισμένος. Αυτή η σχέση – «α ζάρι κερδίζει β ζάρι» – είναι προφανώς *μη-ανακλαστική*, (κανένα ζάρι δεν κερδίζει ένα αντίτυπό του), και *μη-συμμετρική* (σε δύο διαφορετικά ζάρια α και β, δεν είναι δυνατόν να το α να κερδίζει το β, και το β να κερδίζει το α). Φαίνεται φυσικό η σχέση αυτή να είναι και μεταβατική – και πράγματι σε κάποιες περιπτώσεις ζαριών είναι. Εν γένει όμως αυτή η σχέση *δεν* είναι μεταβατική! Δείτε το παρακάτω παράδειγμα με 3 «διαβολικά» ζάρια:



Β \ Α	1	6	8
3	Β	Α	Α
5	Β	Α	Α
7	Β	Β	Α

Α ≻ Β

Γ \ Β	2	4	9
1	Β	Β	Β
6	Γ	Γ	Β
8	Γ	Γ	Β

Β ≻ Γ

Α \ Γ	3	5	7
2	Γ	Γ	Γ
4	Α	Γ	Γ
9	Α	Α	Α

Γ ≻ Α !!

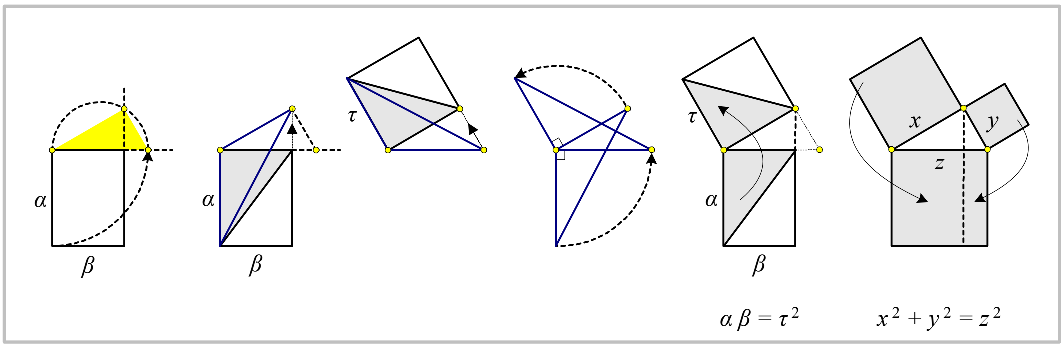
- Οι παραπάνω πίνακες μας λένε ότι το ζάρι Α κερδίζει το Β (σε 5 ενδεχόμενες ρίψεις από τις 9), το ζάρι Β κερδίζει το Γ, και – ενώ θα περιμέναμε το ζάρι Α να κερδίζει, μεταβατικά, το Γ – προκύπτει ότι η σχέση παρουσιάζει μια «κυκλικότητα», και ότι είναι το ζάρι Γ αυτό που κερδίζει το Α! Η σχέση δεν είναι μεταβατική, και, εδώ, μια *διάταξη* «κερδίζει» δεν υφίσταται.

6. (ΜΟΝΟΜΕΡΕΙΣ) ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: το μεταβατικό πλήρωμα και άλλα.

- Όπως σχολιάσαμε στα προηγούμενα, ακόμα και όταν μια σχέση δεν είναι μεταβατική κατά γράμμα, ίσως να μην χάνει το νόημά της, εάν *προσθέσουμε* όσες μεταβατικές ακμές χρειάζονται ώστε να *καταστεί* μεταβατική. Θα εξετάσουμε αυτή την «μεταβατική πλήρωση» μιας σχέσης, σε ειδική ενότητα, αργότερα. Στις επόμενες ενότητες θα εξετάσουμε, επίσης, με περισσότερες λεπτομέρειες τις 1+2 κύριες σχέσεις: πώς προκύπτουν, τί ιδιαίτερα δομικά χαρακτηριστικά έχουν, ποιες πράξεις ξεχωρίζουν σε αυτές και με τί ιδιότητες, και τί περαιτέρω αξιόλογα υπο-είδη περιέχουν.

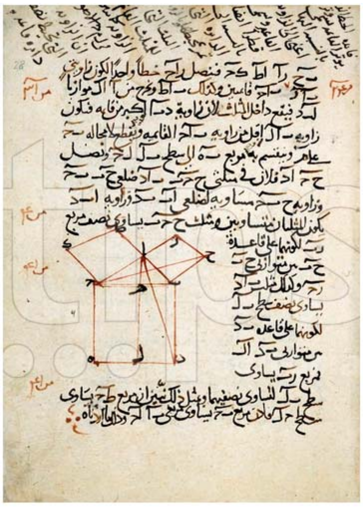
7. (ΠΕΡΙ «ΙΣΟΚΟΠΤΙΚΩΝ» - ΓΙΑ ΟΣΟΥΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑΙ)

- Συμπληρώνουμε εδώ – για όσους και όσες έχουν περιέργεια, τα περί «ισοκοπτικότητας» πολυγώνων.



- Στα παραπάνω σχήματα (1ο έως 5ο) δείχνουμε το πώς ένα ορθογώνιο $\alpha \times \beta$ είναι ισοκοπτικό με ένα τετράγωνο:
  - Στρέφουμε την μεγαλύτερη, και έστω (χ.α.γ.) αριστερή και κάθετη, πλευρά α ώστε να γίνει οριζόντια και επί αυτής σχηματίζουμε ένα ημικύκλιο έξω από το ορθογώνιο (όπως στο 1ο σχήμα), ώστε προεκτείνοντας την απέναντι πλευρά της έως ότου τμήσει το ημικύκλιο να λάβουμε ορθογώνιο τρίγωνο, (κίτρινη σκίαση/σημεία).
  - Το ήμισυ του ορθογωνίου $\alpha \times \beta$ (σκιασμένο τρίγωνο) είναι ισοκοπτικό με το τρίγωνο που έχει πλευρά την α και κορυφή την κορυφή του ορθογωνίου τριγώνου, (μπλέ χρώμα στο 2ο σχήμα), διότι έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη, και άρα είναι ισοκοπτικά με το ίδιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (βλ. και προηγούμενα, σελ. 3).
  - Με την μία πλευρά του κίτρινου ορθογωνίου τριγώνου, κατασκευάζουμε τετράγωνο, όπως στο 3ο σχήμα. Από αυτό το τετράγωνο το ήμισυ (σκιασμένο) είναι ισοκοπτικό με το αντίστοιχο τρίγωνο (μπλέ χρώμα), για τον ίδιο λόγο: έχουν ίσες βάσεις (την πλευρά τ του τετραγώνου), και ίσα ύψη (την πλευρά τ επίσης).
  - Τα δύο μπλέ τρίγωνα είναι όμως ίσα, διότι το ένα φέρεται επί του άλλου δια μίας στροφής 90ο (4ο σχήμα). Άρα τα ημίσεα του ορθογωνίου και του τετραγώνου είναι ισοκοπτικά κατά κάποια κοπή Κ (5ο σχήμα). Είναι επομένως και ολόκληρα ισοκοπτικά: κόπτουμε κατά τις διαγωνίους και επαναλαμβάνουμε την κοπή Κ δύο φορές: $\alpha \times \beta = \tau^2$.

- Στο 6ο σχήμα φαίνεται επίσης και το γιατί *δύο* τετράγωνα είναι από κοινού ισοκοπτικά με *ένα* τετράγωνο: απλά τοποθετούμε τα δύο τετράγωνα με πλευρές x και y, καθέτως μεταξύ τους, με κοινή κορυφή, επαναλαμβάνουμε αντίστροφα την ίδια διαδικασία δύο φορές, και παράγουμε από τα δύο τετράγωνα δύο ορθογώνια, τα οποία έχουν κοινή πλευρά και σχηματίζουν το τετράγωνο της υποτείνουσας z του τριγώνου με πλευρές x, y, z: $x^2 + y^2 = z^2$.



- Η τελευταία απόδειξη δεν είναι παρά η απόδειξη του *Πυθαγόρειου θεωρήματος* – και μάλιστα η πιο διάσημη από εκατοντάδες και πάνω (!) αποδείξεις που έχουν δοθεί: αντίγραφα του σχεδίου της έχουν βρεθεί, ανά τους αιώνες, στα λατινικά, ινδικά, κινέζικα, αραβικά (βλ. εικόνα στα αριστερά, από Περσία), κά.

- Το όλο συμπέρασμα είναι ότι κάθε πολύγωνο είναι ισοκοπτικό με μια συλλογή τριγώνων, κάθε τρίγωνο από αυτά είναι ισοκοπτικό με ένα τετράγωνο, και ότι η συλλογή των τετραγώνων που προκύπτει ισοκόπτεται (ανά δύο) για να σχηματίσει τελικά *ένα* τετράγωνο. ***Μεταβατικά***, λοιπόν, κάθε επίπεδο πολύγωνο p είναι ισοκοπτικό με ένα τετράγωνο, με πλευρά έστω τ. Το εμβαδόν τ^2 αυτού του τετραγώνου ορίζεται, (δικαίως πια…), ως το *εμβαδόν* του πολυγώνου, $E(p) = \tau^2$, και αυτή ήταν, περίπου και σε αδρές γραμμές, η «θεωρία» των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών περί του εμβαδού των επιπέδων σχημάτων – αν και η έννοια «σχέση ισοδυναμίας» δεν χρησιμοποιήθηκε (ρητά, τουλάχιστον).